Ученые записки Таврического национального университета имени В.И.Вернадского
Серия «Физика». Том 17-18 (56-57). 2005 г. № 1. С. 37-43

УДК 535.1

НЕАДИАБАТИЧЕСКАЯ ПОПРАВКА К ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ФАЗЕ БЭРРИ В СПИРАЛЬНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКНАХ

Алексеев К.Н., Яворский М.А.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы исследуем спиральные (навитые) слабонаправляющие оптические волокна. Основной особенностью этих волокон с точки зрения практического применения является способность сохранять циркулярную поляризацию, которая оказывается нечувствительна к большим изменениям температуры волокна, что находит свое применение в различных датчиках и сенсорах [1]. Пристальный интерес исследователей вызывает вопрос, связанный с радиационными потерями, которые вызывают затухание энергии в направляемых модах волокна [2].

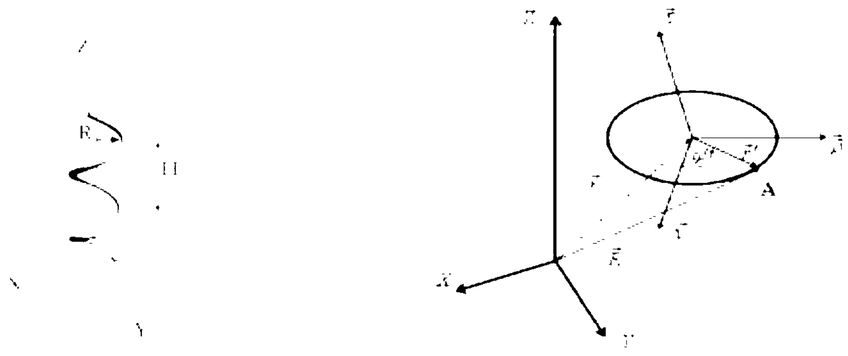
Еще одно направление теоретических и экспериментальных исследований спиральных волокон связано с возможностью наблюдения на уровне классической физики так называемой топологической фазы Бэрри для фотонов [3]. Эффект должен проявляется как вращение плоскости поляризации света, прошедшего один виток спирального волокна, что и было впервые экспериментально обнаружено в 1986 году [4].

Несмотря на многочисленные работы по теоретическому анализу распространения света в спиральных волокнах (например, [5]), так и не был рассмотрен вопрос о распространении мод высших порядков, который стал особенно актуальным в связи с открытием сингулярностей электромагнитного поля - оптических вихрей, самая общая концепция которых была создана в 1974 году [6].

Цель данного исследования состоит в разработке метода решения волнового векторного уравнения для спиральных волокон, записанного в локальной системе координат, с помощью теории возмущений. Такой подход позволяет не только исследовать вопрос о распространении мод высших порядков ($l \geq 1$), но и получить правильное выражение для неадиабатической поправки к скалярной постоянной распространения фундаментальной моды ($l = 0$).

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

В качестве модели мы рассматриваем идеальное круглое волокно, которое свернуто в виде спирали с постоянным шагом H и радиусом R (рис. 1.а).



(а) (б)

Рис. 1.а. Модель спирального волокна с шагом H и радиусом навивки R, (X,Y,Z) - лабораторная система координат.
Рис. 1.б. Введение локальной системы координат с базисом $(\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\beta})$.

Одним из методов исследования оптических волокон является рассмотрение волнового векторного уравнения [7]:

$$\left(\nabla^2 + n^2(x,y,z)k^2\right)\mathbf{E}(x,y,z) + \nabla\left(\mathbf{E}(x,y,z)\cdot\nabla \ln n^2(x,y,z)\right) = 0. \qquad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число в вакууме, а показатель преломления обычно записывают в виде: $n^2(x,y,z) = n_{co}^2\left(1 - 2\Delta f(x,y,z)\right)$. Мы рассматриваем слабонаправляющие волокна, для которых высота профиля показателя преломления $\Delta << 1$.

Основная идея решения уравнения (1) заключается в том, чтобы переписать его в локальной системе координат, в которой показатель преломления будет зависеть только от одной координаты r': $n^2(x,y,z) \to n'^2(r')$.

Введем локальную систему координат. Как известно, уравнение спирали в параметрическом виде имеет вид: $r = R$, $\varphi = t$, $z = \dfrac{H}{2\pi}t$, где (r,φ,z) - координаты точки в цилиндрической системе координат, которая связанна с лабораторной системой (ЛС) (рис. 1.а). Удобно ввести естественный параметр – длину спирали s, который связан с t: $t = Ks$, где $K = \dfrac{2\pi}{\sqrt{H^2 + (2\pi R)^2}}$. Воспользуемся методом подвижного репера и введем в рассмотрение вектора трехгранника Френе $\left(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}\right)$. Записав радиус-вектор спирали в виде: $\vec{r} = R\cos(Ks)\vec{i} + R\sin(Ks)\vec{j} + \kappa s\vec{k}$, где $\nu = \dfrac{HK}{2\pi}$, получим (рис. 1.б):

$$\begin{cases} \vec{\tau} = -\upsilon\sin(Ks)\vec{i} + \upsilon\cos(Ks)\vec{j} + \nu\vec{k}, \\ \vec{\nu} = -\left(\cos(Ks)\vec{i} + \sin(Ks)\vec{j}\right), \\ \vec{\beta} = \nu\sin(Ks)\vec{i} - \nu\cos(Ks)\vec{j} + \upsilon\vec{k}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\upsilon = RK$.

В плоскости векторов $\left(\vec{\nu}, \vec{\beta}\right)$, которая ортогональна к касательному вектору $\vec{\tau}$, введем полярную систему координат следующим образом (рис. 1.б): $\vec{r}\,' = r'\cos\varphi'\cdot\vec{\nu} + r'\sin\varphi'\cdot\vec{\beta}$. Таким образом, положение любой точки волокна задается тремя координатами (r', φ', s). Их связь с декартовыми координатами ЛС имеет вид:

$$\begin{cases} \mathrm{X} = \mathrm{R}\cos(K\,\mathrm{s}) - r'\cos\varphi'\cdot\cos(K\,\mathrm{s}) + r'\nu\sin\varphi'\sin(K\,\mathrm{s}), \\ \mathrm{Y} = \mathrm{R}\sin(K\,\mathrm{s}) - r'\cos\varphi'\sin(K\,\mathrm{s}) - r'\nu\sin\varphi'\cos(K\,\mathrm{s}), \\ \mathrm{Z} = \nu\mathrm{s} + r'\upsilon\sin\varphi'. \end{cases} \tag{3}$$

Далее мы опускаем штрих у координат r', φ', и будем подразумевать только локальную систему координат.

Для того чтобы переписать уравнение (1) в новых координатах мы используем формулы дифференциальной геометрии [8] для физических компонент вектора:

$$\vec{\Delta}\vec{\mathrm{A}} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{\mathrm{A}} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{\mathrm{A}},\ \mathrm{div}\vec{\mathrm{A}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{i}}}\left(\mathrm{A}_i\sqrt{\frac{G}{g_{ii}}}\right),\ (\nabla\Phi)_k = \sqrt{g_{kk}}\,g^{ki}\frac{\partial\Phi}{\partial x^i},$$

$$\left(rot\vec{A}\right)_i = \sqrt{\frac{g_{ii}}{G}}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(g_{kn}\frac{A_n}{\sqrt{g_{nn}}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(g_{jn}\frac{A_n}{\sqrt{g_{nn}}}\right)\right], \tag{4}$$

где $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & r^2K\nu \\ 0 & r^2K\nu & g_{33} \end{pmatrix}$ - метрический тензор локальной системы координат, а $g_{33} = (1 - rK\upsilon\cos\varphi)^2 + r^2\nu^2K^2$, $G = \det g_{ik}$.

Последнее слагаемое в уравнении (1) описывает спин-орбитальное взаимодействие в оптических волокнах [9]. Ограничимся исследованием волокон, для которых $r_0K << 1$, r_0-радиус волокна, что позволит пренебречь геометрическими эффектами в векторном члене. Таким образом, векторное слагаемое запишется в виде оператора спин-орбитального взаимодействия в идеальных волокнах [10].

Для решения уравнения (1) необходимо сделать следующие шаги: 1) перейти в локальную систему координат с помощью формул (4); 2) переписать уравнение в приближении $r_0 K << 1$; 3) записать уравнение (1) для поперечной составляющей $\vec{E}_t$; 4) перейти к матричной форме записи; 5) искать решение в трансляционно-инвариантном виде: $\vec{E}_t(r,\varphi,s) = \vec{e}_t(r,\varphi)\exp(i\beta s)$.

После несложных вычислений получаем окончательное уравнение:

$$\left(\hat{H}_0 + \hat{V}\right)\left|\Phi\right\rangle = \beta^2\left|\Phi\right\rangle, \tag{5}$$

где $\hat{H}_0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\hat{1} + \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} -1 & -2\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ 2\frac{\partial}{\partial\varphi} & -1 \end{pmatrix} + k^2 n^2(r)$,

$$\hat{V} = \Big\{\left(-\upsilon K\cos\varphi - r\upsilon^2K^2\cos^2\varphi\right)\frac{\partial}{\partial r} - \left(2r\upsilon K\cos\varphi + 3r^2\upsilon^2K^2\cos^2\varphi\right)\beta^2 +$$

$$+ v^2K^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sqrt{G}}\left[\upsilon K\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} - 2i\beta\left(rvK + r^2vK^2\upsilon\cos\varphi\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] - \frac{\upsilon^2K^2}{2} +$$

$$+ \frac{f'_r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\Big\}\hat{\sigma}_0 + \hat{\sigma}_X\left[\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{r}{2}\upsilon^2K^2\sin 2\varphi + \frac{\beta 2r^2}{2\sqrt{G}}v\upsilon K^2\cos\varphi + \frac{f'_r}{2r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] +$$

$$+ \hat{\sigma}_Y\left[-\frac{i}{\sqrt{G}}\upsilon K\sin\varphi - i\frac{\beta 2r^2}{2\sqrt{G}}v\upsilon K^2\cos\varphi - i\frac{f'_r}{2r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] + \hat{\sigma}_Z\Big[-\upsilon^2K^2\cos^2\varphi +$$

$$+ \frac{r^2}{\sqrt{G}}\upsilon K^2\upsilon i\beta\sin\varphi + \frac{\upsilon^2K^2}{2} + \frac{f'_r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\Big],$$

$\left|\Phi\right\rangle = \begin{pmatrix} e_r(r,\varphi) \\ e_\varphi(r,\varphi) \end{pmatrix}$, $f = \ln n^2$, а $f'_r = \frac{\partial f}{\partial r}$, $\hat{\sigma}_i$ - матрицы Паули.

Уравнение (5) представляет собой уравнение на собственные функции $\left|\Phi\right\rangle$ и собственные значения β^2.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МОДА И ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ

Для решения уравнения (5) применим теорию возмущений. Как известно [9], в случае фундаментальной моды ($l=0$) спектр оператора $\hat{H}_0$ дважды вырожден (по поляризации), поэтому необходимо использовать теорию возмущений с вырождением. Для определения основного состояния и поправок 1-го порядка надо построить оператор возмущения $\hat{V}$ в $\hat{H}_0$-представлении [11]. В качестве базиса в пространстве собственных функций оператора нулевого приближения, принадлежащих одному собственному значению, удобно выбрать поля: $|1\rangle=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{i\varphi}F_0(r)$ и $|2\rangle=\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{-i\varphi}F_0(r)$, где радиальная функция $F_0(r)$ удовлетворяет уравнению:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+k^2n^2(r)\right]F_0(r)=\tilde{\beta}^2F_0(r). \tag{6}$$

В выбранном базисе матрица возмущения имеет вид:

$$V=\begin{pmatrix}A+2\beta\nu K & -\frac{5}{8}\upsilon^2K^2\\ -\frac{5}{8}\upsilon^2K^2 & A-2\beta\nu K\end{pmatrix}, \tag{7}$$

где A - константа спин-орбитального взаимодействия [10].

При написании матрицы мы пренебрегли слагаемыми, которые слабо перенормируют окончательный результат.

Фундаментальные моды в локальной системе координат имеют вид:

$$|\Psi_1\rangle=\left[\cos\gamma\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{i\varphi}-\sin\gamma\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{-i\varphi}\right]F_0(r)e^{i\beta_1 S},$$

$$|\Psi_2\rangle=\left[\sin\gamma\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{i\varphi}+\cos\gamma\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{-i\varphi}\right]F_0(r)e^{i\beta_2 S}, \tag{8}$$

где $tg2\gamma=\dfrac{5\upsilon^2K}{16\tilde{\beta}\nu}$, $0<\gamma<\dfrac{\pi}{4}$. При $\nu\tilde{\beta}>>1$, $tg2\gamma\approx 0$ и моды являются почти чистыми циркулярно поляризованными полями, что согласуется с результатами в работе [5].

Решая характеристическое уравнение $\left|V_{ij} - \Delta\beta^2\delta_{ij}\right| = 0$ и принимая во внимание, что $\beta^2 - \widetilde{\beta}^2 = \Delta\beta^2$, получаем выражения для постоянных распространения при условии $v\widetilde{\beta} >> 1$:

$$\beta_1 \approx \widetilde{\beta} + A/2\widetilde{\beta} + vK + vKA/2\widetilde{\beta}^2 + \frac{v^2K^2}{\widetilde{\beta}},$$

$$\beta_2 \approx \widetilde{\beta} + A/2\widetilde{\beta} - vK - vKA/2\widetilde{\beta}^2 + \frac{v^2K^2}{\widetilde{\beta}}. \quad (9)$$

Легко заметить, что слагаемые $\pm vK$ в обоих выражениях определяются исключительно геометрией спирали, в которую навито оптическое волокно, поэтому они описывают топологические эффекты. Эти поправки обуславливает различную фазовую скорость для право и лево циркулярной моды, что и приводит к вращению линейно поляризованного пучка по мере распространения по волокну, что и было экспериментально подтверждено в работе [4]. Слагаемые $\frac{v^2K^2}{\widetilde{\beta}}$ и $vKA/2\widetilde{\beta}^2$, таким образом, можно трактовать как постадиабатическую поправку, которая уже определяются не только геометрией волокна, но и его материальными параметрами (из-за наличия $\widetilde{\beta}$). Другими словами, происходит гибридизация топологической и динамической фаз в выражении для полной фазы электромагнитного поля $\beta_{1,2}s$, что имеет место и для скрученных оптических волокон [10]. Необходимо отметить, что к слабому дополнительному расщеплению фазовых скоростей приводит только слагаемое, являющееся результатом гибридизации геометрических эффектов со спин-орбитальным взаимодействием.

Выражения (8) и (9) справедливы, когда $r_0K << 1$ и $v\widetilde{\beta} >> 1$, что делает их применимыми даже для волокон с $H \propto 0.1$ мм. Этот факт позволяет сделать вывод о существовании фазы Бэрри в широком, но не во всем диапазоне возможных параметров навивки волокна.

ВЫВОДЫ

Построена теория возмущений для спиральных оптических волокон, с помощью которой определена структура фундаментальной моды $l = 0$. Показано, что возникает гибридизация геометрической и динамической фаз при распространении света в спиральных оптических волокнах за счет спин-орбитального взаимодействия.

Список литературы

1. Ross J. N. // Opt. Quantum Electron. –1984. - V.16, p. 455.
2. Altintas A. and Love J. D. // Opt. Quantum Electron. –1990. -V.22, p. 211.
3. Berry M. V. The adiabatic phase and Pancharatnam`s phase for polarized light// J. Mod. Optics. -1987.- V.34, p.1401-1407.
4. Tomita A. and Chiao R. Y. Observation of Berry`s topological phase by use of an optical fibre// Phys. Rev. Lett. – 1986. - V.57, p. 937.
5. Berry M. V. Interpreting the anholonomy of coiled light //Nature. - 1987. - V.326, p. 277-278.
6. Nye J.F., Berry M.V. Dislocations in wave trains// Proc. Royal. Soc Lond., Ser. A.-1974.-V.336.-P.165-90.
7. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987. - 656 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля М.: Наука, 1988.- 512с.
9. Алексеев К.Н., Воляр А.В., Фадеева Т.А. Спин-орбитальное взаимодействие и эволюция оптических вихрей в возмущенных слабо направляющих оптических волокнах. //Оптика и спектроскопия.-2002.-Т.93,№4.-С.639-649.
10. Alexeyev C.N., Volyar A.V., Yavorsky M.A. Vortex-preserving weakly guiding anisotropic twisted fibres //J.Opt.A: Pure Appl Opt. – 2004. - V.6, №5, P.S162-S165.
11. Давыдов А.С. Квантовая механика М.: Наука, 1973.- 703с.

Поступила в редакцию 02.02.2005 г.