Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2004) 3–10

УДК 517.988.6

Б.М. Вронский

О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ СИСТЕМЫ "ЖИДКОСТЬ-ГАЗ"В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

1. Постановка задачи

1.1. **Уравнения эволюционной задачи.** Рассмотрим систему, состоящую из несмешивающихся идеальных несжимаемой и сжимаемой (газа) жидкости, целиком заполняющих область $\Omega \subset R^3$. В состоянии покоя жидкость занимает область $\Omega_1 \subset \Omega$, ограниченную частью S_1 твердой стенки $S = \partial\Omega$ и границей раздела сред Γ, которая является горизонтальной. Соответственно, газ занимает область $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$, ограниченную поверхностью Γ и частью $S_2 = S \setminus S_1$ твердой стенки S. Будем считать, что система находится в гравитационном поле с ускорением $\vec{g} = -g\vec{k}$, где $\vec{k}$ – орт оси Oz. Система координат (x_1, x_2, z) выбрана так, что оси Ox_1 и Ox_2 лежат на плоскости Γ, а ось Oz перпендикулярна ей.

Малые движения системы описываются следующей системой уравнений, краевых и начальных условий [2]:

$$\frac{\partial^2 \vec{w}_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_1}\nabla p_1; \qquad \operatorname{div}\vec{w}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1); \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{w}_2}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_2}\nabla p_2; \qquad p_2 + \rho_2 c^2 \operatorname{div}\vec{w}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2); \tag{2}$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на} S_1), \quad \vec{w}_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_2); \tag{3}$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = \vec{w}_2 \cdot \vec{n} \quad (\text{на } \Gamma); \tag{4}$$

$$(-p_1 + g\rho_1 \vec{w}_1 \cdot \vec{n}) = (-p_2 + g\rho_2 \vec{w}_2 \cdot \vec{n}) \quad (\text{на } \Gamma); \tag{5}$$

$$\vec{w}_i(\vec{x}, 0) = \vec{w}_i^0(\vec{x}), \qquad \frac{\partial \vec{w}_i(\vec{x}, 0)}{\partial t} = \vec{w}_i^1(\vec{x}) \quad (i = 1, 2). \tag{6}$$

Здесь введены обозначения: $\vec{w}_i = \vec{w}_i(\vec{x}, t)$ – смещение частиц i-й жидкости от состояния покоя, $p_i = p_i(\vec{x}, t)$ – отклонение полей давлений от их равновесных значений; $\rho_i = \text{const}$ — плотности в состоянии покоя; c — скорость звука в газе; $\vec{x} = (x_1, x_2, z)$ – точка в R^3; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S, а на границе раздела Γ положим по определению $\vec{n} = \vec{k}$. Состояние покоя предполагается устойчивым, то есть сжимаемая жидкость находится над несжимаемой и $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2 > 0$.

1.2. **Переход к скалярной задаче.** Из (1), (2) следует, что можно ввести в рассмотрение потенциалы полей смещений, то есть скалярные функции $\Phi_i = \Phi_i(\vec{x}, t)$ такие, что

$$\vec{w}_i = \nabla\Phi_i \quad (i = 1, 2). \tag{7}$$

В этом случае

$$p_i = -\rho_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2} + c_i(t),$$

где $c_i(t)$ — произвольные функции времени, которые можно считать тождественно равными нулю. В результате этого исходная начально-краевая задача примет вид:

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = c^2 \Delta\Phi_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{9}$$

$$\nabla\Phi_i \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_i) \quad (i = 1, 2), \tag{10}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \equiv \xi \quad (\text{на } \Gamma), \tag{11}$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right) \quad (\text{на } \Gamma), \tag{12}$$

$$\vec{w}_i(\vec{x}, 0) = \nabla\Phi_i(\vec{x}, 0) = \vec{w}_i^0(\vec{x}), \qquad \frac{\partial \vec{w}_i(\vec{x}, 0)}{\partial t} = \vec{w}_i^1(\vec{x}). \tag{13}$$

1.3. **Формулировка спектральной задачи.** Будем теперь разыскивать собственные колебания системы, то есть решения задачи (8) – (12), зависящие от времени по закону $\exp(i\omega t)$, где ω — частота колебаний. Получим следующую спектральную задачу:

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{14}$$

$$-\Delta\Phi_2 = \frac{\lambda}{c^2} \Phi_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \lambda \equiv \omega^2, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \equiv \xi \quad (\text{на } \Gamma), \tag{16}$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_i), \quad (i = 1, 2), \tag{17}$$

Заметим, что проинтегрировав левые и правые части уравнений (14) и (15) по областям Ω_1 и Ω_2 и воспользовавшись формулой Грина, легко можно получить необходимые условия, налагаемые на функции Φ_i $(i = 1, 2)$:

$$\int_\Gamma \xi \, d\Gamma = \int_\Gamma (\rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2) \, d\Gamma = \int_{\Omega_2} \Phi_2 \, d\Omega = 0. \tag{18}$$

Эти условия вызывают необходимость введения оператора P_Γ, который действует по формуле:

$$P_\Gamma v \equiv v|_\Gamma - (|\Gamma|)^{-1} \int_\Gamma v \, d\Gamma \tag{19}$$

Таким образом, динамическое условие на границе раздела Γ приобретает вид:

$$g\Delta\rho\xi = \lambda P_\Gamma\left(\rho_1\Phi_1 - \rho_2\Phi_2\right) \quad (\text{на } \Gamma). \tag{20}$$

Отметим простейшие свойства решений полученной спектральной задачи:

1. Умножив обе части уравнения (14) на $\rho_1\Phi_1$, а уравнения (15) на $\rho_2\Phi_2$, проинтегрируем по Ω_1 и Ω_2, соответственно, воспользовавшись формулой Грина. Складывая результаты, получим, что собственные значения λ задачи (14) – (20) находятся среди значений функционала:

$$F(\Phi_1,\Phi_2) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}|\nabla\Phi_k|^2\,d\Omega_k}{g(\Delta\rho)^{-1}\int\limits_{\Gamma}|P_\Gamma(\rho_1\Phi_1-\rho_2\Phi_2)|^2\,d\Gamma + \rho_2 c^{-2}\int\limits_{\Omega_2}|\Phi_2|^2\,d\Omega_2}. \tag{21}$$

и поэтому $\lambda \geq 0$. Отсюда следует, что собственные частоты колебаний $\omega = \pm\sqrt{\lambda}$ вещественны.

2. Задача имеет тривиальное решение $\lambda_0 = 0$, $(\Phi_0)_i = c_i$ $(i = 1,2)$, которому отвечает состояние покоя исследуемой системы.

Отметим, что наличие тривиального решения задачи приводит к тому, что функции Φ_i $(i = 1,2)$ определяются с точностью до постоянного слагаемого. В дальнейшем на них будут налагаться условия:

$$\int\limits_{\Gamma}\Phi_1\,d\Gamma = \int\limits_{\Omega_2}\Phi_2\,d\Omega = 0. \tag{22}$$

2. Операторный метод исследования спектральной задачи

2.1. Вспомогательные краевые задачи. Рассмотрим вспомогательные краевые задачи, непосредственно связанные со спектральной задачей (14)-(20).

Задача 1.

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_1);$$
$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \xi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int\limits_{\Gamma}\xi\,d\Gamma = \int\limits_{\Gamma}\Phi_1\,d\Gamma = 0.$$

Задача 2.

$$\Delta\Phi_{22} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2),$$
$$\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n} = -\xi \quad (\text{на } \Gamma), \int\limits_{\Gamma}\xi\,d\Gamma = \int\limits_{\Omega_2}\Phi_{22}\,d\Omega = 0.$$

Задача 3.

$$-\Delta\Phi_{21} = f \quad (\text{в } \Omega_2), \qquad \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2 \cup \Gamma),$$

$$\int\limits_{\Omega_2} f\, d\Omega = \int\limits_{\Omega_2} \Phi_{21}\, d\Omega = 0.$$

Известно (см.например [3]), что при выполнении необходимого условия $\int\limits_\Gamma \xi\, d\Gamma = 0$ задача 1 имеет единственное обобщенное решение $\Phi_1 \in W_2^1(\Omega_1)$, удовлетворяющее условию $\int\limits_\Gamma \Phi_1\, d\Gamma = 0$, для всех функций $\xi \in H_-$, где

$$H_- \equiv \{\xi \in W_2^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \quad \int\limits_\Gamma \xi\, d\Gamma = 0\}.$$

Таким образом, решение задачи 1 можно записать в виде $\Phi_1 = T_1\xi$, где $T_1 : H_- \to W_2^1(\Omega_1)$ — линейный ограниченный оператор. Кроме оператора T_1 введем еще два оператора:

а) оператор γ_1 взятия следа функции $\Phi_1 \in W_2^1(\Omega_1)$ на границе $\Gamma : \gamma_1\Phi_1 \equiv \Phi_1|_\Gamma$. В нашем случае $\gamma_1 : W_2^1(\Omega_1) \to H_+$, где H_+ — позитивное пространство, построенное по негативному H_- и нулевому $H_0 \equiv L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$.

б) оператор $C_1 \equiv \gamma_1 T_1$.

Перейдем к задаче 2. Для нее справедливо сказанное о задаче 1, и можно ввести аналогичные операторы $T_2, \quad \gamma_2, \quad C_2 \equiv -\gamma_2 T_2$.

Для задачи 3 известно, что для любой $f \in W_2^{-1}(\Omega_2)$ при выполнении условия $\int\limits_{\Omega_2} f\, d\Omega = 0$ она разрешима, и решение, удовлетворяющее условию $\int\limits_{\Omega_2} \Phi_{21}\, d\Omega = 0$, единственно. Задачу 3 можно записать в виде $A\Phi_{21} = f$ и ее решение задается формулой $\Phi_{21} = A^{-1}f$, где оператор A, определенный на плотном в пространстве $L_2(\Omega_2)\ominus\{1_{\Omega_2}\}$ множестве D(A), является самосопряженным неограниченным положительно определенным оператором с дискретным спектром [?]. Поэтому $A \gg 0, \quad A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$.

2.2. **Приведение задачи (14)–(20) к операторной форме.** Как следует из вышеприведенных рассмотрений, функцию Φ_1, входящую в (14)–(20) можно искать в виде: $\Phi_1 = T_1\xi$, $\Phi_1|_\Gamma = C_1\xi$.

Функцию Φ_2 из (14)–(20) будем искать в виде суммы $\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$, где Φ_{21}, и Φ_{22} удовлетворяют второй и третьей краевым задачам, соответственно, при $\xi = \lambda(g\Delta\rho)^{-1}P_\Gamma(\rho_1\Phi_1 - \rho_2\Phi_2)$, и $f = \lambda c^{-2}\Phi_2$.

С учетом введенных обозначений можно записать задачу (14)–(20) в операторной форме:

$$\begin{cases} A\eta = \lambda c^{-2}(\eta + T_2\xi), \\ g\Delta\rho\xi = \lambda(-\rho_2 P_\Gamma \gamma_2 \eta + P_\Gamma(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)\xi), \end{cases} \tag{23}$$

где $\eta \equiv \Phi_{21}|_{\Omega_2}$.

Элемент $(\eta, \xi)^T$ будем считать принадлежащим гильбертову пространству $\mathcal{H} \equiv H \oplus H_0$, где $H \equiv L_2(\Omega_2) \ominus \{1_{\Omega_2}\}$.

В пространстве H_- введем норму в одной из эквивалентных форм:

$$\|\xi\|_-^2 = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 \, d\Omega + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Phi_{22}|^2 \, d\Omega, \tag{24}$$

в этом случае справедлива

Теорема 1. *Оператор $C \equiv P_\Gamma(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2) : H_0 \to H_0$ положительный вполне непрерывный. Его расширение на H_- есть изометрический оператор, отображающий H_- на H_+, при этом $D(C^{-\frac{1}{2}}) = H_+$, а после расширения $D(C^{-\frac{1}{2}}) = H_0$, $C^{-\frac{1}{2}} H_0 = H_-$.*

Доказательство можно найти в [1].#

Выполним в (23) замену $c\sqrt{\rho_2} A\eta = \psi$, $\sqrt{g\Delta\rho}\xi = \varphi$, после чего запишем систему в виде:

$$y = \lambda \mathcal{A} y, \tag{25}$$

где $y \equiv (\psi, \varphi)^T \in \mathcal{H} \equiv (L_2(\Omega_2) \ominus \{1\}) \oplus (L_2(\Gamma) \ominus \{1\})$, а оператор $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} c^{-2} A^{-1} & \rho_2^{\frac{1}{2}} (g\Delta\rho)^{-\frac{1}{2}} c^{-1} A^{-\frac{1}{2}} (A^{\frac{1}{2}} T_2) \\ -\rho_2^{\frac{1}{2}} (g\Delta\rho)^{-\frac{1}{2}} c^{-1} P_\Gamma (\gamma_2 A^{-\frac{1}{2}}) A^{-\frac{1}{2}} & (g\Delta\rho)^{-1} C \end{pmatrix}.$$

2.3. Свойства оператора $\mathcal{A}$ и структура спектра.

Теорема 2. *Оператор $\mathcal{A}$ — самосопряженный, положительный, вполне непрерывный.*

Доказательство. Составим квадратичную форму $(\mathcal{A}y, y)$ и преобразуем ее, используя определение вектора y и входящих в $\mathcal{A}$ операторов. Имеем:

$$(\mathcal{A}y, y) = c^{-2}(A^{-1}\psi, \psi) + c^{-1}\sqrt{\rho_2}(g\Delta\rho)^{-\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}T_2\varphi, \psi) -$$

$$-c^{-1}\sqrt{\rho_2}(g\Delta\rho)^{-\frac{1}{2}}(P_\Gamma\gamma_2 A^{-\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}\psi, \varphi) + (g\Delta\rho)^{-1}(C\varphi, \varphi) =$$

$$= (\rho_2 A\eta, \eta) + (\rho_2 A\eta, T_2\xi) - (\rho_2 P_\Gamma\eta, \xi) + (C\xi, \xi) =$$

$$= \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} (-\Delta\Phi_{21}(\Phi_{21} + \Phi_{22})^*)\, d\Omega - \rho_2 \int\limits_\Gamma \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n}\Phi_{21}^*\, d\Gamma +$$

$$+\rho_1 \int\limits_\Gamma \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\Phi_1^*\, d\Gamma + \rho_2 \int\limits_\Gamma \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n}\Phi_{22}^*\, d\Gamma =$$

$$= \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2\, d\Omega + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Phi_2|^2\, d\Omega.$$

Из выражения для $(\mathcal{A}y, y)$ следует, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ и $\mathcal{A} \geq 0$. Если же $(\mathcal{A}y, y) = 0$, то $\Phi_1 = \text{const}$, $\Phi_2 = \text{const}$, а из условий (1.3) вытекает, что $\Phi_1 = 0$ и $\Phi_2 = 0$, то есть $y = 0$, следовательно, оператор $\mathcal{A}$ положителен.

Осталось доказать его полную непрерывность. Из первой части доказательства следует, что операторы $\mathcal{A}_{12} = A^{\frac{1}{2}}T_2$ и $\mathcal{A}_{21} = -P_\Gamma\gamma_2 A^{-\frac{1}{2}}$ взаимно сопряженные. В силу свойств ограниченности операторов P_Γ и γ_2 и полной непрерывности $A^{-\frac{1}{2}}$ следует, что $\mathcal{A}_{21} \in \mathfrak{S}_\infty$ (а значит и $\mathcal{A}_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$). Из свойств полной непрерывности операторов A и C следует теперь полная непрерывность оператора $\mathcal{A}$. #

Исследуемая задача приведена, таким образом, к задаче на характеристические значения для вполне непрерывного, положительного самосопряженного оператора. Из теоремы Гильберта–Шмидта следует:

Теорема 3. *Задача (25) имеет дискретный спектр, то есть:*

1. Существует счетное множество собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ таких, что

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \ldots, \quad \lambda_k \to +\infty \quad (k \to +\infty);$$

2. Система собственных векторов $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ оператора $\mathcal{A}$ образует ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}$.

Установим теперь асимптотическое поведение собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ при $k \to \infty$. Для этого заметим, что λ_k представляют собой последовательные минимумы функционала:

$$\Psi(y) = \frac{(y, y)_\mathcal{H}}{(\mathcal{A}y, y)_\mathcal{H}}. \tag{26}$$

Используя определение вектора y и оператора $\mathcal{A}$, мы можем записать выражение для функционала $\Psi(y)$ в виде:

$$\Psi(y) = \frac{c^2\rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\Delta\Phi_2|^2 \, d\Omega + g\Delta\rho \int\limits_{\Gamma} |\xi|^2 \, d\Gamma}{\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 \, d\Omega + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Phi_2|^2 \, d\Omega}. \tag{27}$$

Кроме того, как показано выше, собственные значения $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ могут быть найдены как последовательные минимумы функционала $F(\Phi_1, \Phi_2)$ из (21). Для них может быть установлена следующая асимптотическая формула:

$$\lambda_k = \frac{2g(\Delta\rho)(|\Gamma|)^{1/2}}{(\rho_1+\rho_2)\pi^{1/2}} k^{1/2}[1+o(1)] \quad (k \to \infty). \tag{28}$$

Окончательный итог исследованию подводит

Теорема 4. *Задача (14)-(20) имеет дискретный спектр собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ с асимптотическим поведением, описываемым формулой (28) и систему собственных функций $\{((\Phi_{21})_k, \xi_k)^T\}_{k=1}^{\infty}$, образующую ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Так как система собственных векторов задачи (25) $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис пространства $\mathcal{H}$, а система векторов $(\eta_k, \xi_k)^T = ((\Phi_{21})_k, \xi_k)^T$ получается из $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ по формулам $\eta_k = \sqrt{\rho_2}A^{-1}\psi_k$, $\xi_k = (g\Delta\rho)^{-\frac{1}{2}}\varphi_k$, то есть действием на компоненты векторов y_k ограниченных операторов, то требуемое утверждение доказано. #

3. О разрешимости эволюционной задачи

Методом, изложенным выше, эволюционная задача (8)–(13) может быть приведена к задаче Коши

$$\mathcal{A}\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y\prime(0) = y_1, \tag{29}$$

для дифференциального уравнения в пространстве $\mathcal{H}$, где оператор $\mathcal{A}$ определен в (25), а $y = y(t) \in \mathcal{H}$ при всех $t > 0$.

Определение. Назовем решение $y = y(t)$ задачи (29) решением с конечной энергией, если для всех $t > 0$ функции $A^{\frac{1}{2}}y'$ и y непрерывны по времени t в норме пространства $\mathcal{H}$.

Лемма 1. *При выполнении условий $y_0 \in \mathcal{H}$, $y_1 \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ задача (29) однозначно разрешима и имеет решение с конечной полной энергией. Для этого решения выполнен закон сохранения энергии:*

$$\|\mathcal{A}^{1/2}y'\|^2_{\mathcal{H}} + \|y\|^2_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{A}^{1/2}y_1\|^2_{\mathcal{H}} + \|y_0\|^2_{\mathcal{H}} \tag{30}$$

Доказательство. Осуществим в уравнении (29) замену $\mathcal{A}^{1/2}y = p$. В результате прийдем к задаче Коши для абстрактного гиперболического уравнения:

$$p'' + \mathcal{A}^{-1}p = 0, \quad p(0) = p_0, \quad p'(0) = p_1. \tag{31}$$

Как следует из, обобщенное решение задачи (31) имеет вид:

$$p(t) = \cos(t\mathcal{A}^{-1/2})p_0 + \sin(t\mathcal{A}^{-1/2})\mathcal{A}^{1/2}p_1.$$

Отсюда следует, что если $y_0 \in \mathcal{H}$, $y_1 \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, то функции $p'(t)$ и $\mathcal{A}^{-1/2}p(t)$ непрерывны по t в норме пространства $\mathcal{H}$.

Покажем, что из этого следует, что $y(t) = \mathcal{A}^{1/2}p(t)$ является решением с конечной полной энергией. В самом деле, функция $\mathcal{A}^{1/2}y'$ непрерывна по t в норме пространства $\mathcal{H}$, функция $\|\mathcal{A}^{-1/2}y(t)\|_{\mathcal{H}}$ непрерывна по t, с другой стороны Аналогично доказывается, что при . Первое утверждение леммы доказано.

Для доказательства закона сохранения энергии умножим обе части равенства (29) на $y'(t)$ и проинтегрируем от 0 до t по времени, использовав начальные условия. В результате получим равенство (30), выражающее закон сохранения энергии. #

Следствием данной леммы является

Теорема 5. *Если в начальный момент времени функции* (13) *таковы, что им отвечают конечные кинетическая и потенциальная энергии системы,условия то существует единственное обобщенное решение задачи* (8)–(13), *для которого кинетическаяи потенциальная энергии системы являются непрерывными функциями времени и имеет место закон сохранения энергии:*

$$K(t) + U(t) = K(0) + U(0).$$

4. Выводы

В предложенной статье исследована задача о малых движениях и собственных колебаниях системы "жидкость-газ". Доказана дискретность спектра, получены вариационные и на их основе асимптотические формулы для собственных частот. Для собственных векторов доказаны теоремы о полноте и базисности.

Список литературы

[1] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. - М. : Наука, 1989. - 416 с.

[2] Комаренко А. Н., Луковский И. А., Фещенко С. Ф. К задаче о собственных значениях с параметром в краевых условиях // Укр. мат. журнал. - 1965. - т. 17, № 6. - с. 22 - 30.

[3] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. - М: Наука, 1970. - 512 с.

E-mail: bmw1960@mail.ru