Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2004) с.123–126

УДК 517.43

А.С. Тихонов

СВОЙСТВО МАКСИМАЛЬНОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ (СЛУЧАЙ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ)

В работе [1] Набоко ввел спектральные компоненты $N_\pm$ для операторов, близких к самосопряженным. Несколькими годами позже, рассматривая параллельный случай почти унитарных операторов, Макаров [2] нашел следующую характеризацию этих инвариантных подпространств: подпространство N_+ есть максимальное среди всех рационально инвариантных подпространств H' оператора S, для которых сужение $S|H'$ есть деформация слабого волне неунитарного сжатия.

Напомним, что оператор S называется деформацией оператора T (мы будем записывать это в виде $S \prec T$), если существует квазиаффинент X такой, что $SX = XT$ (ограниченный оператор X называется квазиаффинентом, если $\operatorname{Ker} X = \{0\}$, $\operatorname{Ker} X^* = \{0\}$). Операторы S и T называются квазиподобными, если $S \prec T$ и $T \prec S$.

В статье [3] указанная выше характеризация для подпространств $N_\pm$ была получена для случая ядерных возмущений нормальных операторов со спектром на простой замкнутой кривой. Целью данной работы является распространение этого результата на более общий случай, когда непрерывный спектр лежит на границе многосвязной области. Отметим, что операторы, у которых спектр связан естественным образом с многосвязными областями в комплексной плоскости изучались ранее (см., например, [4] и соответствующие ссылки там). Мотивацией для изучения такого рода абстрактных операторов служат периодические дифференциальные и разностные операторы (см. [4]).

Перейдем к точным утверждениям. Пусть C - простая замкнутая $C^{4+\varepsilon}$ гладкая кривая, $G_+ = \operatorname{Int} C$ ($G_- = \operatorname{Ext} C$) – внешность (внутренность) кривой C. Пусть $U \in [H]$ – нормальный (т.е., $U^*U = UU^*$) оператор, действующий в гильбертовом пространстве H и пусть $\sigma(U) \subset C$. Мы будем рассматривать ядерные возмущения $S = U + V$, $V \in \mathfrak{S}_1$ такие, что $\rho(S) \cap G_+ \neq \emptyset$. Для такого класса операторов мы определяем спектральные компоненты:

$$N_\pm(S) = \operatorname{clos}\{\, f \in H : \forall g \in H \quad ((S - z)^{-1} f, g) \in E^2(G_\pm)\,\},$$

где $E^2(G_\pm)$ есть классы Харди-Смирнова [5, 6]. Это (слабое) описание спектральных компонент дается в терминах самого оператора S и не использует никакой дополнительной информации типа представимости оператора S в виде возмущения какого-либо вспомогательного оператора (ср. с описаниями в [1, 2]). Если S есть почти унитарный оператор, рассматриваемые нами подпространства совпадают с соответствующими подпространствами, определенными в [1, 2]. Для читателей, знакомых с теорией С.-Надя-Фояша [7], отметим, что $N_+(T_0) = H_{\cdot 1}$, $N_-(T_0) = H$ в случае, если T_0 есть вполне неунитарное сжатие.

Чтобы сформулировать главный результат этой статьи, нам необходимо ввести некоторые понятия и обозначения. Для односвязных областей естественным аналогом сжимающих операторов являются операторы, представимые в виде $\varphi_\pm(T_0)$, где T_0 есть сжатие и $\varphi_\pm$ – конформные отображения единичного круга $\mathbb{D}$ на области $G_\pm$. Однако в случае многосвязных областей, мы уже не можем воспользоваться теоремой Римана о существовании конформного отображения. Здесь на помощь приходит другая характеризация сжатий – через существование унитарной дилатации: $T_0 = P_H U_0|H$, где U_0 – унитарный оператор, а H – полуинвариантное (т.е. представимое в виде ортогональной разности инвариантных подпространств) подпространство для него.

Пусть G_+ конечносвязная область, границей которой является спрямляемая жорданова кривая C, состоящая из внешнего контура C_0 и внутренних контуров C_k, $k = 1, \ldots, n$. Будем говорить, что оператор T является G_+-сжатием, если он представим в виде $T = P_H U|H$, где U – нормальный оператор со спектром на C, а H – полуинвариантное подпространство для $(U - a)^{-1}$, $a \in G_-$. В случае односвязных областей это определение согласовано с приведенной выше характеризацией через конформные отображения. Оператор T назовем G_+-вполне неунитарным сжатием, если у него нет нетривиальных приводящих подпространств, на которых T индуцирует нормальный оператор со спектром на кривой C. Для области G_- соответствующие определения даются аналогичным образом. Обозначим

$$\mathcal{G}_\pm = \{\, T : T \;-\; G_\pm\text{-вполне неунитарное сжатие}\,\}.$$

и через

$$\operatorname{Lat}_\pm S = \{\, H' \in \operatorname{Lat} S : \exists\, T \in \mathcal{G}_\pm \quad S|H' \prec T \,\}$$

класс инвариантных подпространств оператора S таких, что сужение S на них есть деформация операторов из $\mathcal{G}_\pm$. Следующее утверждение является основным результатом данной работы.

Теорема. *1) $N_\pm(S) = \bigvee_{H' \in \operatorname{Lat}_\mp S} H'$; 2) $N_\pm(S) \in \operatorname{Lat}_\mp S$; 3) оператор S квазиподобнен оператору из $\mathcal{G}_\pm \iff N_\mp(S) = N_\mp(S^*) = H$.*

Таким образом подпространства $N_{\pm}(S)$ являются *минимальными* инвариантными подпространствами, которые содержат все инвариантные подространства, где оператор S индуцирует операторы, являющиеся деформациями операторов из класса $\mathcal{G}_{\mp}$. С другой стороны, подпространства $N_{\pm}(S)$ являются *максимальными* среди тех инвариантных подпространств, на которых оператор S индуцирует операторы являющиеся деформациями операторов из класса $\mathcal{G}_{\mp}$.

Замечание. Справедливы аналогичные утверждения для спектральных компонент $N(S)$ и $NM_{\pm}(S)$ (определения см. в [3, 8]). Соответствующие утверждения могут быть получены, если мы заменим $\mathcal{G}_{\pm}$ на $\mathcal{G}_{\mathrm{e}}$ или на $\mathcal{G}_{\mathrm{i}\pm}$, где

$$\mathcal{G}_{\mathrm{e}} = \{\, T : \ T^*T = TT^*,\ \sigma(T) \subset C\,,\ \sigma_p(T) = \emptyset\,,\ \sigma_{sing}(T) = \emptyset\}\,,$$
$$\mathcal{G}_{\mathrm{i}\pm} = \{\, T : T \ - \ G_{\pm}\text{-вполне неунитарное сжатие класса } C_{00}\,\}\,.$$

Доказательство теоремы производится путем сведения к случаю односвязной области, который уже рассмотрен в [3]. Следующая теорема позволяет произвести это сведение.

Теорема. *Пусть* $S - U \in \mathfrak{S}_1$, $\sigma_c(S) \subset C$, $U^*U = UU^*$, $\sigma(U) \subset C$, *где* $C = \bigcup\limits_{k=0}^{n} C_k$ *есть* $C^{2+\varepsilon}$*-гладкая кривая, ограничивающая конечносвязную область* G_+. *Тогда существует оператор* $\bigoplus\limits_{k=0}^{n} Y_k$, *осуществляющий подобие операторов* S *и* $\bigoplus\limits_{k=0}^{n} S_k$, *где* $S_k - U_k \in \mathfrak{S}_1$, $\sigma_c(S_k) \subset C_k$, $U_k^*U_k = U_kU_k^*$, $\sigma(U_k) \subset C_k$.

Поясним некоторые моменты доказательства этого утверждения. Пусть L_k контуры лежащие в резольветном множестве оператора S и отделяющие компоненту границы C_k от остальных ее компонент. Положим

$$P_k = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k} (S-\lambda)^{-1}\,d\lambda\,, \qquad Q_k = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k} (U-\lambda)^{-1}\,d\lambda\,,$$

$$\widetilde{S}_k = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k} S(S-\lambda)^{-1}\,d\lambda\,, \qquad \widetilde{U}_k = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k} U(U-\lambda)^{-1}\,d\lambda\,.$$

Определим подпространства $H_k^s = \operatorname{Ran} P_k$ и $H_k^u = \operatorname{Ran} Q_k$ и операторы $V_k = Q_k | H_k^s : H_k^s \to H_k^u$. Почти обратным к V_k будут операторы вида $Z_k = P_k | H_k^u$ в том смысле, что $I - Z_kV_k \in \mathfrak{S}_1$ и $I - V_kZ_k \in \mathfrak{S}_1$. Эти соотношения позволяют рассматривать для операторов V_k конечный индекс $\operatorname{ind}(V_k) = \operatorname{codim}\operatorname{Ran} V_k - \dim\operatorname{Ker} V_k$. В случае, если $\operatorname{ind}(V_k) = 0$, мы можем рассмотреть конечномерные возмущения Y_k операторов V_k, которые уже являются обратимыми операторами. Основным препятствием является возможность того, что $\operatorname{ind}(V_k) \neq 0$. В этом случае необходимо модифицировать подпространства H_k^u и операторы $\widetilde{U}_k$. Необходимая реконструкция может быть достигнута с использованием следующей леммы.

Лемма. *Пусть C - $C^{2+\varepsilon}$-гладкая кривая, $\widetilde{U}$ – нормальный оператор, $\sigma(\widetilde{U}) \subset C$. Тогда существует нормальный оператор U такой, что $\sigma(U) \subset C$, $\sigma_p(U) \neq \emptyset$ и $\widetilde{U} - U \in \mathfrak{S}_1$.*

Применяя лемму, построим конечномерные обратимые возмущения Y_k для V_k и определим $S_k = Y_k \widetilde{S}_k Y_k^{-1}$, которые и удовлетворяют всем условиям теоремы.

Отметим, что доказанная теорема открывает возможность другого описания спектральных компонент для ядерных возмущений нормальных операторов, а, именно, в терминах конформных отображений:

$$\mathrm{Lat}_\pm S = \{\, H' \in \mathrm{Lat}\, S : \exists T \in \widetilde{\mathcal{G}}_\pm \;\; S|H' \prec T \,\}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{G}}_\pm = \{\, T : T = \varphi_{0\pm}(T_0) \oplus (\bigoplus_{k=1}^{n} \varphi_{k\mp}(T_k)),\;\; T_k \text{ - вполне неунитарные сжатия} \,\}.$$

Здесь $\varphi_{k\mp}$ – конформные отображения единичного круга на области $G_\pm$.

Заключение. В работе установлено, что операторы близкие к нормальным с непрерывным спектром на кривой обладают максимальными инвариантными подпространсвами, соответствующими внешней и внутринней областям, ограниченных данной кривой. Результаты статьи являются обобщением соответствующих результатов Набоко и Макарова.

Список литературы

[1] S. N. Naboko, On spectral analysis of non-selfadjoint operators, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **232** (1977) 36-39; English transl. in: *Sov. Math. Dokl.* **18** (1977) 32-36.

[2] N. G. Makarov, Canonical subspaces of almost unitary operators, in: *A. Haar Memorial Conference. Vol. 1, 2 (Budapest, 1985), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 49* (North-Holland, Amsterdam–New York, 1985) 611–621.

[3] A. S. Tikhonov, Property of maximality for spectral components, in: V. Kadets, W. Zelazko, eds., *Functional analysis and its applications* (Elsevier, 2004) 287–293.

[4] С. И. Федоров, О гармоническом анализе в многосвязной области характер-автоморфных пространствах Харди. Алгебра и Анализ, т. 9 (1997), No. 2, с. 192-240.

[5] P. L. Duren, *Theory of H^p spaces* (Academic Press, New York–London, 1970).

[6] S. D. Fisher, *Function theory on planar domains* (John Wiley and Sons, New York, 1983).

[7] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space* (North-Holland, Amsterdam–London, 1970).

[8] А. С. Тихонов, Функциональная модель и двойственность спектральных компонент для операторов с непрерывным спектром на кривой. Алгебра и Анализ, т. 14 (2002), No. 4, с. 158-195.