Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2004) 78 – 82

УДК 519.216.2

Е.А. ПАВЛОВ

К ТЕОРЕМЕ БИРКОФА-ХИНЧИНА

Введение

В данной статье теорема Биркофа-Хинчина [1] обобщена на правильные идеальные структуры, обладающие свойствами Фату и Лебега. Новый метод доказательства позволяет получить результаты в ряде конкретных классических функциональных пространствах.

В данной статье для стационарного, в узком смысле, случайного процесса η и правильной идеальной структуры $E((-\infty,\infty);P(dw))$, инвариантной относительно сдвигов S_t и обладающей свойствами Фату и Лебега устанавливается соотношение:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\eta(S_t w)dt=\hat{\eta}(w) \tag{1}$$

Данное соотношение может быть переписано в виде:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta\left(S_t w\right)\chi_{[-T,T]}\left(t\right)\frac{1}{2T}dt\to\hat{\eta}(w) \tag{2}$$

в норме пространства .

Рассмотрим оператор

$$(A_T\eta)(w)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta(S_t w)f_T(t)dt, \tag{3}$$

где $f_T(t)=\frac{1}{2T}\chi_{[-T,T]}(t)$.

Оператор A_T отображает пространство случайных функций $E((-\infty,\infty);P(dw))$ в себя. Оператор (3) можно рассматривать как одно из обобщений интегрального оператора свертки

$$(A_K f)(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t-s)K(s)ds=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\tau+t)\bar{K}(\tau)d\tau=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(S_t\tau)\bar{K}(\tau)d\tau, \tag{4}$$

где $S_t\tau=\tau+t$, S_t - обычные операторы сдвига на $t: S_t x(\tau)=x(\tau+t)$.

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, U, P), где U - σ алгебра подмножеств из Ω, P - вероятностная мера на алгебре U.

Рассмотрим вероятностное пространство для случая, когда $\Omega = (-\infty, +\infty)$, $U - \sigma$ - алгебра измеримых в смысле Лебега, подмножеств из $(-\infty, +\infty)$, $P(dw)$ - вероятностная мера Стилтьеса.

Пусть S_t - семейство сдвигов множеств из U, сохраняющих вероятностную меру этих множеств. То есть $P(A) = P(S_t A)$, где $A \in U$. Обозначим U_t - семейство операторов сдвига, определенных на случайных величинах $\eta(w)$, $w \in (-\infty, +\infty)$, предел (см. [1])

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \eta(t)dt = \hat{\eta} \in L_p((-\infty, +\infty); P(dw)) \ \exists \text{ в } \ L_p, \tag{5}$$

где $\eta(t) = \eta(S_t w)$, $\hat{\eta} = \hat{\eta}(w) \in L_p$, $\eta = \eta(w) \in L_p$.

Приведем некоторые определения.

Определение 1. (см. [3]) Банахово функциональное пространство $E((-\infty, +\infty); P(dw))$ будем называть симметричным, если:

1) из неравенства $|x(w)| \le |y(w)|$, где $y(w) \in E((-\infty, +\infty); P(dw))$ следует неравенство $\|x(w)\|_E \le \|y(w)\|_E$

2) из равенства

$$P\{w : |x(w)| > \tau\} = P\{w : |y(w)| > \tau\} \tag{6}$$

для всех $\tau > 0$ следует равенство

$$\|x\|_E = \|y\|_E. \tag{7}$$

Определение 2. Будем говорить, что функциональное банахово пространство $E((-\infty, +\infty); P(dw))$ обладает свойством Лебега (кратко будем обозначать - свойством (Л)), если из сходимости

$$x_n(w) \to x(w) \tag{8}$$

почти наверное и неравенства $|x_n(w)| < |y(w)|$, где $y(w) \in E$ следует сходимость по норме

$$\|x_n(w) - x(w)\|_E \to 0, \ x_n(w) \in E, \ x \in E \tag{9}$$

Определение 3. (см. [2], [3])

Говорят, что идеальная структура обладает свойством Фату, если из того, что последовательность функций $x_n(t) \in E$ сходится почти наверное к функции $x(t)$ и ограничена по норме E, ($\|x_n\|_E \le C < \infty$, $\forall n \in N$), следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E \le \underline{\lim} \|x_n\|_E$.

Теорема 1. Пусть $E((-\infty, \infty); P(dw))$ сепарабельное симметрическое пространство, обладающее свойством Фату и Лебега и $\eta(t)$ - стационарный, в узком смысле, случайный процесс и $\eta(w) \in E((-\infty,\infty); P(dw))$. Тогда существует, в смысле сходимости по норме , предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \eta(t)dt = \hat{\eta}(w) \in E((-\infty,+\infty); P(dw)) \tag{10}$$

Доказательство. Так как $E((-\infty,\infty); P(dw))$ сепарабельно, то (см. [3]) в $E((-\infty,\infty); P(dw))$ плотно множество ограниченных функций. Пусть $\eta_0(w)$ - произвольная ограниченная функция. В силу вложения $L_\infty((-\infty,\infty); P(dw)) \subset E((-\infty,\infty); P(dw)) \subset L_1((-\infty,\infty); P(dw))$ имеем, что $\eta_0(w) \in E((-\infty,\infty); P(dw))$. Так как $\eta_0(w) \in E((-\infty,\infty); P(dw))$, то по теореме Биркофа-Хинча (см., например, [1]) имеем

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \eta_0(S_t w)dt = \eta^*(w) \tag{11}$$

почти наверное. Далее имеем

$$\left\| \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \eta(S_t w)dt - \eta^*(w) \right\|_E \le \left\| \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} (\eta(S_t w) - \eta_0(S_t w)dt \right\|_E +$$

$$+ \left\| \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} (\eta_0(S_t w)dt - \eta_0^*(w) \right\|_E + \|\eta_0^*(w) - \eta^*(w)\|_E \tag{12}$$

В силу обобщенного неравенства Минковского (см. [4]) имеем:

$$\left\| \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} (\eta(S_t w) - \eta_0(S_t w)dt \right\|_E \le \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \|\eta(S_t w) - \eta_0(S_t w)\|_E \, dt =$$

$$= \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \|\eta(w) - \eta_0(w)\|_E \, dt = \|\eta(w) - \eta_0(w)\|_E . \tag{13}$$

Обозначим $\|\eta(w) - \eta_0(w)\|_E = \delta$. Далее имеем

$$\frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} [\eta_0(S_t w) - \eta(S_t w)] \, dt \to \eta_0^*(w) - \eta^*(w) \tag{14}$$

почти наверное.

Кроме того, справедливо неравенство:

$$\|\eta_0^*(w) - \eta^*(w)\|_E \le \varliminf_{T\to\infty} \left\| \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} [\eta_0(S_t w) - \eta(S_t w)] \, dt \right\|_E \le$$

$$\leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \|\eta_0(S_t w) - \eta(S_t w)\|_E\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \|\eta_0(w) - \eta(w)\|_E\, dt = \delta \tag{15}$$

Далее имеем, пользуясь обобщенным неравенством Гельдера:

$$\left|\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \eta_0(S_t w)dt - \eta_0^*(w)\right| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\eta_0(S_t w)| \left|\frac{1}{2T}\chi_{[-T,T]}(t)\right| dt + |\eta_0^*(w)| \leq$$

$$\leq \|\eta_0(S_t w)\|_E \frac{\varphi_{E^1}(2T)}{2T} + |\eta_0^*(w)| \leq \eta_1(w), \tag{16}$$

где $\eta_1(w) = |\eta_0^*(w)| + c\,\|\eta_0(w)\|_E \in E$.

Кроме того, выполняется соотношение:

$$\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \eta_0(S_t w)dt - \eta_0^*(w) \to 0 \tag{17}$$

почти наверное. Из (12), (13) и того факта, что обладает свойством Лебега, следует, что

$$\left\|\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \eta_0(S_t w)dt - \eta_0^*(w)\right\|_E \to 0 \ (\text{при } T \to \infty). \tag{18}$$

Итак, получаем неравенство

$$\left\|\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \eta_0(S_t w)dt - \eta_0^*(w)\right\|_E \leq 3\delta \tag{19}$$

где δ- произвольно мало.

Теорема 2. Пусть $E((-\infty,\infty); P(dw))$ - правильная идеальная структура, инвариантная относительно сдвигов S_t и обладающая свойствами Фату и Лебега.

Тогда справедливо соотношение

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \eta(t)dt = \hat{\eta}(w) \in E, \tag{20}$$

где $\eta(t)$ - стационарный, в узком смысле, случайный процесс и $\eta(t) = \eta(S_t w) \in E$ (t - фиксировано), $\hat{\eta}(w) \in E$.

Доказательство производится по схеме, предложенной в доказательстве теоремы 1.

Заключение. В данной статье теорема Биркофа-Хинчина обобщена на правильные идеальные структуры, обладающие свойствами Фату и Лебега.

Список литературы

[1] Гихман И.И., Скороход А.В. *Теория случайных поцессов.* – М.: Наука, 1971, т. 1,2.

[2] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функционалльный анализ.* – М.: Наука, 1977г.

[3] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* – М.: Наука, 1978г.

[4] Павлов Е.А. *Об операторах, инвариантных относительно сдвига в симметричных пространствах.* – Сибирский мат журнал, 1977 г., т. 18, №1, 80 85.