Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2004) 59 – 67

УДК 517.98

М. А. Муратов[1], Б. А. Рубштейн[2]

АНАЛОГИ ДОМИНАНТНОЙ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ В ПЕРЕСТАНОВОЧНО ИНВАРИАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

1. Введение

Как известно, большую роль в эргодической теории играют теоремы, изучающие асимптотическое поведение и условия сходимости Чезаровских средних для различных классов операторов в банаховых пространствах (см. например, [1] — [7].)

Одной из основных теорем указанного класса является доминантная эргодическая теорема, которая рассматривалась различными авторами, в частности, Г.Харди и Д.Литлвудом [8] для трансляций, Н.Винером [7] для сохраняющих меру преобразований, Н.Данфордом и Д.Шварцем [9] для положительных сжатий.

В работе [10] был доказан аналог доминантной эргодической теоремы в перестановочно инвариантных пространствах измеримых функций на отрезке [0, 1] для Чезаровских средних, порожденных положительными сжатиями, а в работе [11] - обобщение этого результата на случай бесконечной меры .

В настоящей статье рассматриваются аналоги доминантной эргодической теоремы в перестановочно инвариантных пространствах для последовательностей положительных сжатий, удовлетворяющих различным эргодическим неравенствам. Мы будем использовать обозначения и терминологию из [10] —[14].

2. Основные понятия и факты

Пусть μ - мера Лебега на полупрямой $[0, +\infty)$ и $S(0, +\infty)$ пространство всех измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций на $(0, +\infty)$. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь те функции $f \in S(0, +\infty)$, для которых их функция распределения

$$n_{|f|}(y) = n_f(y) = \mu\{s : \ |f(s)| > y\}$$

[1]Таврический Национальный Университет, Симферополь.

[2]Beer-Sheva.

не равна тождественно $+\infty$. Обозначим множество таких функций через $S_0(0, +\infty)$. Ясно, что для любой функции $f \in S_0(0, +\infty)$ $\lim_{y\to+\infty} n_f(y) = 0$.

Заметим, что если $\lambda = \inf|f(t)|$ на $(0, +\infty)$, то $n_f(y) < +\infty$ для любого $y > \lambda$.

Функция $f^*(t)$, определенная для каждого $t \in (0, +\infty)$ равенством:

$$f^*(t) = \inf\{y > 0 : \ n_f(y) \le t\}$$

называется убывающей перестановкой функции $f(t)$.

Как известно, функция $f^*(t)$ невозрастает, непрерывна справа и $f^* = |f|^*$.

Функции $f(t)$ и $g(t)$ называются равноизмеримыми, если

$$n_f(y) = n_g(y)$$

для любого $y \in (0, +\infty)$.

Если $f(t)$ и $g(t)$ равноизмеримы, то $f^*(t) = g^*(t)$ для каждого $t \in (0, +\infty)$.

Обозначим

$$f^*(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} f^*(t) = \inf\{y > 0 : \ n_f(y) < +\infty\}.$$

Ясно, что $f^*(+\infty) = \lambda = \inf|f(t)|$ на $(0, +\infty)$ и $n_f(y) = +\infty$ при $y < f^*(+\infty)$.

Определение 1. Пусть $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$. Функция

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t f^*\,d\mu, \ t \in (0, +\infty)$$

называется максимальной функцией Харди-Литлвуда.

В следующем предложении приведены основные свойства максимальной функции Харди-Литлвуда.

Предложение 1. ([12],[11])

1^o. $f^*(t) \le f^{**}(t)$ для любого $t \in (0, +\infty)$.

2^o. $f^{**}(t)$ непрерывная, невозрастающая на $(0, +\infty)$ функция.

3^o. Для каждого $u > f^*(+\infty)$

$$f^{**}(\mu\{f^{**} > u\}) = u.$$

4^o. $f^{**}(+\infty) = f^*(+\infty)$.

5^o. $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\sup_{G:\mu G=t}\int_G |f(s)|\,ds$ для любой функции $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$.

6^o. $(f_1 + f_2)^{**}(t) \le f_1^{**}(t) + f_2^{**}(t)$ для любых функций $f_1, f_2 \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$.

7^o. Если $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и ряд $\sum_{k=1}^\infty f_k^{**}(t)$ сходится, то для любого измеримого множества G такого, что $\mu(G) = t$, ряд $\sum_{k=1}^\infty f_k(t)$ сходится почти всюду на G и

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)^{**}(t) \le \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{**}(t).$$

Замечание 1. Если $f_\lambda = |f| - \lambda$, то $f_\lambda^* = f^* - \lambda$ и $f_\lambda^*(+\infty) = 0$. Кроме того , $(f_\lambda + \lambda)^{**} = f^{**} = f_\lambda^{**} + \lambda$.

Определение 2. Банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ функций из $S_0(0, +\infty)$ называется перестановочно инвариантным или симметричным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$S1^o$. Если $f, g \in S_0(0, +\infty)$, $g \in E$ и $|f(t)| \le |g(t)|$ почти всюду на $(0, +\infty)$, то $f \in E$ и $\|f(t)\|_E \le \|g(t)\|_E$.

$S2^o$. Если $f, g \in S_0(0, +\infty)$, $g \in E$ и $f^*(t) = g^*(t)$, то $f \in E$ и $\|f(t)\|_E = \|g(t)\|_E$.

Как известно, перестановочно инвариантными пространствами являются пространства $L_p(0, +\infty)$, Орлича, Лоренца, Марцинкевича.

Имеет место следующая теорема (см.[12], теорема 4.1):

Теорема 1. Любое перестановочно инвариантное пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ является промежуточным между $L_1(0, +\infty)$ и $L_\infty(0, +\infty)$, то есть

$$L_1(0, +\infty) \cap L_\infty(0, +\infty) \subset E \subset L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty).$$

Пусть E перестановочно инвариантное пространство. Легко видеть, что если $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и $f^{**} \in E$, то $f \in E$.

Обозначим, как и в [11],

$$H(E) = \{f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty) : \ f^{**} \in E\}$$

и положим $\|f\|_{H(E)} = \|f^{**}\|_E$.

Предложение 2. ([11]) Пространство $(H(E), \|\cdot\|_{H(E)})$ является перестановочно инвариантным и имеет место следующая цепочка вложений:

$$L_1(0, +\infty) \cap L_\infty(0, +\infty) \subset H(E) \subset E \subset L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty).$$

Определение 3. Положительный линейный оператор

$$T: \ L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty) \longrightarrow L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$$

называется положительным $L_1 - L_\infty$ сжатием или абсолютным сжатием, если

1^o. T действует в $L_1(0, +\infty)$ и $L_\infty(0, +\infty)$;

2^o. $\|T\|_{L_1 \to L_1} \le 1$, $\|T\|_{L_\infty \to L_\infty} \le 1$.

Обозначим, как и в [10], множество всех положительных $L_1 - L_\infty$ сжатий через $\mathcal{PC}$.

Заметим, что если E перестановочно инвариантное пространство, то для любого оператора $T \in \mathcal{PC}$

$$T(H(E)) \subset H(E)$$

и $\|Tf\|_{H(E)} \leq \|f\|_{H(E)}$.

3. Различные типы эргодических неравенств

Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ — последовательность положительных сжатий. Обозначим

$$B_{\{T_n\}}f(s) = \sup_n \{T_n|f|(s)\},$$

где $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и $s \in (0, +\infty)$.

Определение 4. Говорят, что последовательность положительных сжатий $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ удовлетворяет неравенству (MI_λ), если для любой функции $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и для всех $t > 0$

$$(MI_\lambda) \qquad \mu\{B_{\{T_n\}}f_\lambda > t\} \leq \frac{1}{t} \int\limits_{\{B_{\{T_n\}}f_\lambda > t\}} |f|\, d\mu$$

Теорема 2. Пусть E перестановочно инвариантное пространство и последовательность положительных сжатий $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ удовлетворяет неравенству (MI_λ). Тогда из $f \in H(E)$ следует, что $B_{\{T_n\}}f \in E$ и

$$\|B^+_{\{T_n\}}f\|_E \leq \|f\|_{H(E)}.$$

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 1. ([10],[11]) Пусть f и g две неотрицательные измеримые функции из $S(0, +\infty)$ такие, что

1) $g^*(+\infty) = 0$;

2) Для любого $t > 0$

$$\mu\{g > t\} \leq \frac{1}{t} \int\limits_{\{g>t\}} f\, d\mu.$$

Тогда $g^*(s) \leq f^{**}(s)$ для каждого $s > 0$.

Лемма 2. Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ и $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$. Тогда для любого $s \in (0, +\infty)$

$$(B_{\{T_n\}}f)^*(s) \leq f^{**}(s).$$

Доказательство. Без ограничения общности, считаем $f = |f| \geq 0$.

1) Пусть сначала $f^*(+\infty) = 0$. Покажем, что тогда и $(B_{\{T_n\}}f)^*(+\infty) = 0$. Действительно, $B_{\{T_n\}}f(s) = \sup_n \{T_n(f)(s)\}$.

Поэтому для любого $\theta > 0$ (см.[12])

$$\int_0^\theta (B_{\{T_n\}}f)^*(s)\,ds = \sup_{\mu F=\theta}\int_F (B_{\{T_n\}}f)(s)\,ds = \sup_{\mu F=\theta}\int_F \sup_n\{T_n(f)(s)\}\,ds =$$

$$= \sup_n \sup_{\mu F=\theta}\int_F T_n(f)(s)\,ds = \sup_n \int_0^\theta (T_n(f))^*(s)\,ds \le$$

$$\le \sup_n \int_0^\theta f^*(s)\,ds = \int_0^\theta f^*(s)\,ds,$$

откуда следует, что $(B_{\{T_n\}}f)^*(+\infty) = 0$.

По нашему предположению, $f^*(+\infty) = \lambda = 0$. Следовательно, $f_\lambda = f$ и неравенство (MI_λ) примет вид

$$(MI) \qquad \mu\{B_{\{T_n\}}f > t\} \le \frac{1}{t}\int_{\{B_{\{T_n\}}f>t\}} f\,d\mu.$$

Полагая $B_{\{T_n\}}f(s) = g(s)$, получим, что функции f и g удовлетворяют условиям леммы 1. Поэтому $g^*(s) \le f^{**}(s)$, то есть

$$(B_{\{T_n\}}f)^*(s) \le f^{**}(s)$$

для каждого $s \in (0, +\infty)$.

2) Пусть теперь $f^*(+\infty) = \lambda > 0$.

Тогда функция f представима в виде $f = f_\lambda + \lambda$, и $f_\lambda^*(+\infty) = 0$.

Так как $(f_\lambda + \lambda)^*(t) = f_\lambda^*(t) + \lambda$ и $(f_\lambda + \lambda)^{**}(t) = f_\lambda^{**}(t) + \lambda$, то мы имеем:

$$(B_{\{T_n\}}f)^*(s) = [B_{\{T_n\}}(f_\lambda + \lambda)]^*(s) = [\sup_n T_n(f_\lambda + \lambda)](s) \le$$

$$\le [\sup_n(T_n f_\lambda + \lambda)]^*(s) = [\sup_n T_n f_\lambda + \lambda]^*(s) =$$

$$= [\sup_n T_n f_\lambda](s) + \lambda = (B_{\{T_n\}}f_\lambda)^*(s) + \lambda \le f_\lambda^{**}(s) + \lambda =$$

$$= (f_\lambda + \lambda)^{**}(s) = f^{**}(s).$$

Таким образом, и в этом случае

$$(B_{\{T_n\}}f)^*(s) \le f^{**}(s).$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть E перестановочно инвариантное пространство, последовательность положительных сжатий $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{PC}$ удовлетворяет неравенству (MI_λ) и $f \in H(E)$. Тогда $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и $f^{**} \in E$. По лемме 2

$$(B_{\{T_n\}}f)^*(s) \le f^{**}(s), \quad \forall s \in (0, +\infty).$$

Так как E - идеальная структура, то $(B_{\{T_n\}}f)^* \in E$ и

$$\|(B_{\{T_n\}}f)^*\|_E \le \|f^{**}\|_E.$$

Но функции $B_{\{T_n\}}f$ и $(B_{\{T_n\}}f)^*$ имеют одинаковые убывающие перестановки:

$$[(B_{\{T_n\}}f)^*]^* = (B_{\{T_n\}}f)^*.$$

Поэтому $B_{\{T_n\}}f \in E$ и

$$\|B_{\{T_n\}}f\|_E = \|(B_{\{T_n\}}f)^*\|_E \le \|f^{**}\|_E = \|f\|_{H(E)}.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Легко видеть, что

$$(B_{\{T_n\}}f)^*(s) \le (B_{\{T_n\}}f_\lambda)^*(s) + \lambda \le f^{**}(s).$$

Действительно, так как $(B_{\{T_n\}}f_\lambda)^*(s) \le f_\lambda^{**}(s)$, то
$(B_{\{T_n\}}f)^*(s) \le (B_{\{T_n\}}f_\lambda)^*(s) + \lambda \le f^{**}(s) + \lambda = (f_\lambda + \lambda)^{**}(s) = f^{**}(s)$.

Для каждого $T \in \mathcal{PC}$ обозначим через

$$S_n(T)f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k|f|$$

последовательность Чезаровских средних оператора T. Тогда $B_{\{S_n(T)\}} \in \mathcal{PC}$ и имеет место следующее следствие:

Следствие 1. Пусть E перестановочно инвариантное пространство и $T \in \mathcal{PC}$. Тогда из $f \in H(E)$ следует $B_{\{S_n(T)\}}f \in E$ и

$$\|B_{\{S_n(T)\}}f\|_E \le \|f\|_{H(E)}.$$

Определение 5. Говорят, что последовательность положительных сжатий $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ удовлетворяет неравенству (IMI_λ), если для любой функции $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и для всех $t > 0$

$$(IMI_\lambda) \qquad \frac{1}{2t}\int\limits_{\{f_\lambda > t\}} f_\lambda\, d\mu \le \mu\{B_{\{T_n\}}f_\lambda > t\}$$

Лемма 3. Пусть $C > 1$. Для каждой функции $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$, $f \ge 0$ и всех $t > 0$ имеет место неравенство

$$(I_\lambda) \qquad (C-1)\mu\{f_\lambda^{**} \ge Ct\} \le \frac{1}{t}\int\limits_{\{f_\lambda > t\}} f\, d\mu$$

Так как $f_\lambda^*(+\infty) = 0$, то доказательство леммы следует из ([11], Лемма 1).

Лемма 4. Если последовательность положительных сжатий $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ удовлетворяет неравенству (IMI_λ), то

$$(2_\lambda) \qquad f_\lambda^{**}(s) \le 2(B_{\{T_n\}} f_\lambda)^* \left(\frac{s}{2}\right)$$

для любого $s > 0$ и для любой функции $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$.

Доказательство. Полагая в (I_λ) $C = 2$, получаем:

$$\mu\{f_\lambda^{**} \ge 2t\} \le \frac{1}{t} \int\limits_{\{f_\lambda > t\}} f\, d\mu$$

для всех $t > 0$ и $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$

Поэтому, в силу неравенства (IMI_λ),

$$\mu\{f_\lambda^{**} \ge 2t\} \le 2\mu\{B_{\{T_n\}} f_\lambda > t\} \quad \forall t > 0.$$

Пусть $s > 0$. Тогда

$$(B_{\{T_n\}} f_\lambda)^*(\frac{s}{2}) = \inf\left\{t > 0 : \ \mu\{B_{\{T_n\}} f_\lambda > t\} \le \frac{s}{2}\right\} =$$

$$= \inf\{t > 0 : \ 2\mu\{B_{\{T_n\}} f_\lambda > t\} \le s\} \ge \inf\{t > 0 : \ \mu\{f_\lambda^{**} \ge 2t\} \le s\} \ge$$

$$\ge \inf\{t > 0 : \ \mu\{f_\lambda^{**} > 2t\} \le s\} = \frac{1}{2} \inf\{2t > 0 : \ \mu\{f_\lambda^{**} > 2t\} \le s\} =$$

$$= \frac{1}{2} \inf\{u > 0 : \ \mu\{f_\lambda^{**} > u\} \le s\} = \frac{1}{2}(f_\lambda^{**})^*(s) = \frac{1}{2} f_\lambda^{**}(s).$$

Следовательно,

$$f_\lambda^{**}(s) \le 2(B_{\{T_n\}} f_\lambda)^* \left(\frac{s}{2}\right).$$

Лемма доказана.

Замечание 3. Если для каждого натурального n имеет место $T_n I = I$, то

$$(B_{\{T_n\}} f)^*(s) = (B_{\{T_n\}} f_\lambda)^*(s) + \lambda.$$

Замечание 4. Если в условиях леммы 4 для каждого натурального числа n имеет место $T_n I = I$, то для любого $s > 0$ верно неравенство

$$(2) \qquad f^{**}(s) \le 2(B_{\{T_n\}} f)^* \left(\frac{s}{2}\right).$$

Действительно, в силу неравенства (2_λ), для любого $s > 0$

$$f_\lambda^{**}(s) \le 2(B_{\{T_n\}} f_\lambda)^* \left(\frac{s}{2}\right).$$

Следовательно,

$$f^{**}(s) - \lambda \le 2((B_{\{T_n\}} f)^* \left(\frac{s}{2}\right) - \lambda) = 2(B_{\{T_n\}} f)^* \left(\frac{s}{2}\right) - 2\lambda,$$

то есть

$$f^{**}(s) \le 2(B_{\{T_n\}} f)^* \left(\frac{s}{2}\right) - \lambda \le 2(B_{\{T_n\}} f)^* \left(\frac{s}{2}\right).$$

Определение 5 и лемма 4 могут быть сформулированы в более общем виде.

Определение 6. Говорят, что последовательность положительных сжатий $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ удовлетворяет неравенству $(IMI_{\lambda,k})$, если существует такое $k > 0$, что для любой функции $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и для всех $t > 0$

$$(IMI_{\lambda,k}) \qquad \frac{1}{t} \int\limits_{\{f_\lambda > t\}} f_\lambda \, d\mu \le k\mu\{B_{\{T_n\}} f_\lambda > t\}$$

Лемма 5. Если последовательность положительных сжатий $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ удовлетворяет неравенству $(IMI_{\lambda,k})$, то для любых $s > 0$ и $C > 1$ и для любой функции $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$

$$(2_{\lambda,C,k}) \qquad f_\lambda^{**}(s) \le C(B_{\{T_n\}} f_\lambda)^* \left(\frac{C-1}{k} s\right).$$

Замечание 5. Если в условиях леммы 5 для каждого натурального числа n имеет место $T_n I = I$, то для любого $s > 0$ верно неравенство

$$(2_{C,k}) \qquad f^{**}(s) \le C(B_{\{T_n\}} f)^* \left(\frac{C-1}{k} s\right).$$

Действительно,

$$f_\lambda^{**}(s) = f^{**} - \lambda \le C(B_{\{T_n\}} f_\lambda)^* \left(\frac{C-1}{k} s\right) =$$

$$= C((B_{\{T_n\}} f)^* \left(\frac{C-1}{k} s\right) - \lambda) = C(B_{\{T_n\}} f)^* \left(\frac{C-1}{k} s\right) - C\lambda.$$

Следовательно,

$$f^{**}(s) \le C(B_{\{T_n\}} f)^* \left(\frac{C-1}{k} s\right) - (C-1)\lambda \le C(B_{\{T_n\}} f)^* \left(\frac{C-1}{k} s\right)$$

Теорема 3. Пусть E перестановочно инвариантное пространство, последовательность положительных сжатий $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ удовлетворяет неравенству $(IMI_{\lambda,k})$ и $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$. Тогда если $B_{\{T_n\}} f_\lambda \in E$, то $f_\lambda \in H(E)$

Доказательство. Пусть $B_{\{T_n\}} f \in E$. Тогда $(B_{\{T_n\}} f)^* \in E$.

Рассмотрим для любого $C > 0$ оператор растяжения $\sigma_{\frac{k}{C-1}}$,определенный равенством

$$\sigma_{\frac{k}{C-1}} g(t) = g\left(\frac{C-1}{k} t\right).$$

Оператор $\sigma_{\frac{k}{C-1}}$ действует как ограниченный оператор в любом перестановочно инвариантном пространстве E (см. [12]). Поэтому $\sigma_{\frac{k}{C-1}} (B_{\{T_n\}} f_\lambda)^* \in E$, то есть функция $(B_{\{T_n\}} f_\lambda)^* \left(\frac{C-1}{k} s\right)$ принадлежит E.

Тогда, в силу леммы 5, $f^{**}(s)$ принадлежит E. Таким образом, $f \in H(E)$.

Теорема доказана.

Следствие 2. Если в условиях теоремы 3 для любого натурального n имеет место $T_n I = I$, то из $B_{\{T_n\}} f \in E$ следует, что $f \in H(E)$

Следствие 3. Если в условиях теоремы 3 $f_\lambda = |f|$ (то есть $\lambda = 0$) ,то из $B_{\{T_n\}} f \in E$ следует, что $f \in H(E)$

Заключение. В настоящей работе рассматриваются аналоги доминантной эргодической теоремы для последовательностей абсолютных сжатий в перестановочно инвариантных пространствах измеримых функций на положительной полуоси.

Список литературы

[1] von Neumann J. Proof of the quasiergodic hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, No. 18, 70–82 (1932).

[2] Birkgoff G. D. Proof of the ergodic theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, No. 17, 656–660 (1931).

[3] Yosida K. Mean ergodic theorem in Banach Spaces *Proc. Imp. Acad. Yokyo*, No. 14, 292–294 (1938).

[4] Kakutani S. Iteration of linear operations in complex Banach spaces *Proc. Imp. Acad. Yokyo*, No. 14, 295–300 (1938).

[5] Hopf E. On the ergodic theorem for positive linear operators *J. Reinc. Ang. Math.*, No. 205, 101–106 (1960).

[6] Hopf E. The general temporally descrete Markov process, *J. Rat. Meca. Anal.*, No. 3, 13–45 (1954).

[7] Weiner N. The ergodic theorem, *Duke. Math. J.*, No. 5, 1–18 (1939).

[8] Hardy G. H., Littlewood J. E. A maximal theorem with function-theoretik application, *Acta Math.*, No. 54, 81–116 (1930).

[9] Dunford N., Schwarts J. T. Convergence almost everywhere of operator averages, *J. Rat. Mech. Anal.*, No. 5, 129–178 (1956).

[10] Braverman M, Rubshtein B, Veksler A. Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces, *Studia Mathem.*, No. 128 (2), 145–157 (1998).

[11] М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова, Б. А. Рубштейн Доминантная эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций для последовательности абсолютных сжатий. - Ученые записки ТНУ, Т.17 (56), № 2, с. 36 - 48, 2003.

[12] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов, *Наука*, Москва, 1978, 400с.

[13] Krengel U., Ergodik Theorems, *de Gruyter Stud. Math.*, de Gruyter, Berlin, 1985, 357p.

[14] Lindenstrauss J. and Tzafriri L., Classical Banach Spaces. Function Spaces, *Springer*, 1979.