Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2004) 30 – 37

УДК 517.983

И. И. Карпенко, А. И. Сухтаев, Д. Л. Тышкевич

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЮ ФУНКЦИЙ КВАТЕРНИОННОГО ПЕРЕМЕННОГО

Введение

В последнее время появились работы (см., например, [1], [2]), связанные с детальным изучением спектральных задач для линейных операторов, действующих в гильбертовых кватернионных пространствах. В частности, возникает вопрос об аналитических свойствах резольвенты линейного оператора [1]. Как показывают конкретные примеры, нельзя сделать вывод о дифференцируемости и аналитичности резольвенты в соответствии с определениями дифференцируемости и аналитичности функции кватернионного переменного, приведенными в работах R.Fueter'a (см. обзор работ в [4]). Другой подход к определению дифференцируемости (так называемая супердифференцируемость), позволяющий говорить об аналитичности резольвенты, предложен в работе [3]. В настоящей работе предлагается ввести понятие дифференцируемости функции кватернионного переменного по направлению, охватывающее достаточно широкий класс функций. И в этом смысле резольвента линейного оператора также оказывается дифференцируемой оператор-функцией. Отметим, что предложенное ниже определение является обобщением понятия дифференцируемости, приведенного в работе [5].

1. Структура невещественного поля в теле кватернионов.

Предложение 1. *Пусть F - поле, являющееся подтелом $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}\setminus F \neq \varnothing$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\mathbb{R} \subsetneqq F$;

(2) *существует* $q \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R} : F = \{p \in \mathbb{H} \mid pq = qp\}$.

Доведення. Докажем импликацию (1)⇒(2). Пусть $q \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$, $q = q_0 + \overrightarrow{q}$. Так как $\overrightarrow{q}^2 = -|\overrightarrow{q}|^2$, то

$$q^2 = q_0^2 - |\overrightarrow{q}|^2 + 2q_0\overrightarrow{q}. \tag{1}$$

Так как $\mathbb{R} \subsetneqq F$, то по теореме Фробениуса F изоморфно полю $\mathbb{C}$, следовательно $\dim(F : \mathbb{R}) = 2$. Так как $\overrightarrow{q} \neq 0$, то система $\{1, \overrightarrow{q}\}$ – линейно независима в $\mathbb{H}$ над

$\mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}$-линейно независима). Тогда система $\{q, q^2\}$ также $\mathbb{R}$-линейно независима в $\mathbb{H}$.

Действительно, из (1) следует, что

$$\begin{vmatrix} q_0 & 1 \\ q_0^2 - |\overrightarrow{q}|^2 & 2q_0 \end{vmatrix} = 2q_0^2 - (q_0^2 - |\overrightarrow{q}|^2) = q_0^2 + |\overrightarrow{q}|^2 \neq 0.$$

Очевидно, q и q^2 входят в $\{p \in \mathbb{H} \mid pq = qp\}$, а, следовательно, и любая их $\mathbb{R}$-линейная комбинация входит в это множество. Поэтому в силу двумерности F над $\mathbb{R}$ выполняется (1).

Импликация (2)$\Rightarrow$(1) очевидна. □

Предложение 2. *Пусть $F = \{p \in \mathbb{H} \mid pq = qp\}$. Тогда*

(1) *существует такой кватернион ε, что $\varepsilon^2 = -1$, и любой кватернион $h \in \mathbb{H}$ однозначно представим в виде $h = u + v\varepsilon$, $(u, v \in F)$;*

(2) *существует такая инволюция $J : F \to F$, что*

$$pJ(p) = \nu^2(p) \ (p \in F);$$
$$J(p) = p \Leftrightarrow p \in \mathbb{R};$$
$$\varepsilon p = J(p)\varepsilon \ (p \in F).$$

Доведення. (1) Положим $f = \frac{1}{|\overrightarrow{q}|}\overrightarrow{q}$, тогда

$$f^2 = -1 \tag{2}$$

В силу рассуждений при доказательстве импликации (1) $\Rightarrow$ (2) в предложении 1 система $\{1, f\}$ является базисом над $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}$-базисом) в F. Пусть ε - такой векторный кватернион, что $\varepsilon^2 = -1$, $\{\varepsilon, f\}$ - линейно независимая над $\mathbb{R}$ система и $(\varepsilon, f) = 0$. Тогда система $\{1, f, \varepsilon, f\varepsilon\}$ является $\mathbb{R}$-базисом в $\mathbb{H}$. Следовательно, для любого $h \in \mathbb{H}$ имеет место однозначное разложение:

$$h = r_1 + r_2 f + s_1\varepsilon + s_2 f\varepsilon = (r_1 + r_2 f) + (s_1 + s_2 f)\varepsilon = u + v\varepsilon; \quad u, v \in F.$$

(2) Положим $J(r_1 + r_2 f) := r_1 - r_2 f$. Тогда в силу равенства (2):

$$J((r_1 + r_2 f)(s_1 + s_2 f)) = J(r_1 s_1 - r_2 s_2 + (r_1 s_2 + r_2 s_1)f) =$$
$$r_1 s_1 - r_2 s_2 + (r_1 s_2 + r_2 s_1)f = (r_1 - r_2 f)(s_1 - s_2 f) =$$
$$= J(r_1 + r_2 f)J(s_1 + s_2 f).$$

Аддитивность отображения J очевидна. Кроме того,

$pJ(p) = (r_1 + r_2 f)J(r_1 + r_2 f) = (r_1 + r_2 f)(r_1 - r_2 f) = |r_1|^2 + |r_2|^2 = \nu^2(p)$, и

$J(p) = p$ или $r_1 + r_2 f = r_1 - r_2 f$ тогда и только тогда, когда $p \in \mathbb{R}$.

Далее, $\varepsilon p = \varepsilon(r_1 + r_2 f) = \varepsilon r_1 + \varepsilon r_2 f = r_1\varepsilon + r_2\varepsilon f = r_1\varepsilon + r_2[\overrightarrow{\varepsilon}, \overrightarrow{f}] = r_1\varepsilon - r_2[\overrightarrow{f}, \overrightarrow{\varepsilon}] = r_1\varepsilon + r_2 f\varepsilon = (r_1 - r_2 f)\varepsilon = J(r_1 + r_2 f)\varepsilon = J(p)\varepsilon$. □

2. Дифференцируемость функции кватернионного переменного

Пусть φ - функция, действующая в $\mathbb{H}$, $D(\varphi)$ - область определения φ, $q_0 \in D(\varphi)$.

Рассмотрим множество $F(q_0) = \{u \in \mathbb{H} \mid uq_0 = q_0u\}$. Будем записывать $g_0 = \lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q_0)} g(h)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $h \in F(q_0)$, $|h| < \delta$ следует $|g(h) - g_0| < \varepsilon$.

Определение 1. Функцию $\varphi(q)$ назовем *дифференцируемой справа в точке* q_0, если существует предел $\lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q_0)} (\varphi(q_0 + h) - \varphi(q_0))h^{-1}$, который мы будем называть *правой производной* функции φ в точке q_0 и обозначать $\varphi'(q_0)$.

Пусть $q_0 \in \mathbb{H} \backslash \mathbb{R}$. Тогда согласно предложению 1, $F(q_0)$ - поле, $\mathbb{R} \subset F(q_0)$ и $\dim(F : \mathbb{R}) = 2$. В качестве $\mathbb{R}$-базиса в $F(q_0)$ можно выбрать векторы 1, $f = \frac{1}{|q_0|}\overrightarrow{q_0}$. В этом случае для всех $h \in F(q_0)$ $h = h_1 + h_2 f$. Кроме того, можно выбрать такой векторный кватернион ε, что $\varepsilon^2 = -1$, и система $\{1, \varepsilon, f, f\varepsilon\}$ является $\mathbb{R}$-базисом в $\mathbb{H}$.

В таком случае произвольный кватернион $h \in \mathbb{H}$ допускает разложение:

$$h = h_0 + h_1 f + h_2 \varepsilon + h_3 f \varepsilon,$$

где $h_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,3}$. Следовательно,

$$\varphi(q) = \varphi_0(x_0, x_1, x_2, x_3) + \varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3)f + \varphi_2(x_0, x_1, x_2, x_3)\varepsilon + \varphi_3(x_0, x_1, x_2, x_3)f\varepsilon,$$

где $\varphi_i(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,3}$.

Теорема 1. *Пусть функция $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 f + \varphi_2 \varepsilon + \varphi_3 f\varepsilon$ определена в некоторой окрестности невещественной точки q_0, причем в этой окрестности функции $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ дифференцируемы относительно переменных x_0 и x_1. Тогда для дифференцируемости функции кватернионного переменного φ в точке q_0 необходимо и достаточно, чтобы в этой точке имели место следующие соотношения*

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} = -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_0} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}. \tag{3}$$

Доведення. а) Необходимость. Пусть существует

$$\varphi'(q_0) = \lim_{h \to 0 \cdot F(q_0)} (\varphi(q_0 + h) - \varphi(q_0))h^{-1}.$$

Так как любой кватернион $h \in F(q_0)$ представим в виде $h = h_1 + h_2 f$, где $h_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,2}$, то $h \to 0 \cdot F(q_0)$ тогда и только тогда, когда $h_1, h_2 \to 0$.

Так как предел не зависит от направления, предположим сначала, что $h = h_1 \to 0$, где $h_1 \in \mathbb{R}$. В этом случае получим

$$\varphi'(q_0) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} + f\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \varepsilon\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} + f\varepsilon\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_0}. \tag{4}$$

Найдем тот же предел в предположении, что $h = h_2 f \to 0$:

$$\varphi'(q_0) = -f\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + f\varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} - \varepsilon\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1}. \tag{5}$$

Сравнивая выражения (4) и (5), приходим к равенствам (3).

б) Достаточность. Согласно определению дифференцируемой функции двух действительных переменных имеют место равенства:

$$\varphi_s(x_0 + h_1, x_1 + h_2, x_2, x_3) - \varphi_s(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial\varphi_s}{\partial x_0}h_1 + \frac{\partial\varphi_s}{\partial x_1}h_2 + \alpha_s \cdot \rho, \ \ (s = \overline{0,3}),$$

где α_s стремятся к нулю вместе с ρ ($\rho = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = \nu(h)$). Тогда приращение функции $\varphi(q)$ принимает вид:

$$\varphi(q_0 + h) - \varphi(q_0) = \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}h_1 + \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}h_2 + f\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_0}h_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}h_2\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_0}h_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}h_2\right) +$$
$$+ f\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_0}h_1 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1}h_2\right) + \eta\cdot\rho,$$

где $\eta = \alpha_0 + f\alpha_1 + \varepsilon\alpha_2 + f\varepsilon\alpha_3$. Используя соотношения (3), это приращение можно переписать в виде:

$$\varphi(q_0 + h) - \varphi(q_0) = \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0} + f\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_0} + \varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_0} + f\varepsilon\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_0}\right)(h_1 + h_2 f) + \eta\cdot\rho,$$

где $A = \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0} + f\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_0} + \varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_0} + f\varepsilon\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_0}$ - число, не зависящее от h, а $\lim\limits_{h\to 0\cdot F(q_0)} \eta\rho h^{-1} = 0$.

Таким образом, $\lim\limits_{h\to 0\cdot F(q_0)} (\varphi(q_0 + h) - \varphi(q_0))h^{-1}$ существует и равен A. □

Пусть $q_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $F(q_0)$ совпадает с $\mathbb{H}$. В этом случае для всех $h \in F(q_0)$ $h = h_1 + h_2 i + h_3 j + h_4 k$.

Теорема 2. *Пусть функция $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 i + \varphi_2 j + \varphi_3 k$ определена в некоторой окрестности вещественной точки q_0, причем в этой окрестности функции $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ дифференцируемы относительно переменных x_0, x_1, x_2 и x_3. Тогда для дифференцируемости функции кватернионного переменного φ в точке q_0 необходимо и достаточно, чтобы в этой точке имели место следующие соотношения*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3},\\
&\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_0} = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3},\\
&\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_0} = -\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3},\\
&\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_0} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_3}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Доведення. Пусть существует $\varphi'(q_0) = \lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q_0)} (\varphi(q_0 + h) - \varphi(q_0))h^{-1}$.

Так как любой кватернион $h \in F(q_0)$ представим в виде $h = h_1 + h_2 i + h_3 j + h_4 k$, где $h_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,4}$, то условие $h \to 0 \cdot F(q_0)$ равносильно условию $h_1, h_2, h_3, h_4 \to 0$.

Предположим сначала, что $h = h_1 \to 0$. Получим:

$$\varphi'(q_0) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} + i\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + j\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} + k\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_0}. \tag{7}$$

Найдем тот же предел в предположении, что $h = h_2 f \to 0$.

$$\varphi'(q_0) = -i\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + k\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - j\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}. \tag{8}$$

Теперь пусть $h = h_3 f \to 0$. Тогда

$$\varphi'(q_0) = -j\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2} - k\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + i\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} \tag{9}$$

И, наконец, $h = h_4 f \to 0$. В этом случае

$$\varphi'(q_0) = -k\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_3} + j\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} - i\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3}. \tag{10}$$

Сравнивая выражения (7),(8),(9) и (10), приходим к равенствам (6).

Доказательство обратного утверждения аналогично приведенному доказательству теоремы 1.

□

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $f(q) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k q^k$. Тогда

$\lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q)} (f(q+h) - f(q))h^{-1} = \lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q)} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k (q+h)^k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k q^k \right) h^{-1}$. Так как $h \in F(q)$, то h коммутирует с q, и $f(q+h) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (q+h)^k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \sum\limits_{l=0}^{k} C_k^l q^{k-l} h^l$

Поэтому $\lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q)} (f(q + h) - f(q))h^{-1} = \lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q)} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \sum\limits_{l=0}^{k} C_k^l q^{k-l} h^l - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k q^k \right) h^{-1} =$

$$= \lim_{h \to 0 \cdot F(q)} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=1}^{k} C_k^l q^{k-l} h^l \right) h^{-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=1}^{k} C_k^l q^{k-l} \lim_{h \to 0 \cdot F(q)} h^{l-1}.$$

При $l > 1$ $\lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q)} h^{l-1} = 0$. Следовательно, $f'(q) = \lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q)} (f(q+h) - f(q))h^{-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k C_k^1 q^{k-1} = = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k q^{k-1}$.

Пример 2. Пусть $f(q) = (a-q)^{-1}$. Найдем производную в произвольной точке q при условии, что $a \in F(q)$. (Заметим, что отсюда следует, что $q \in F(a)$.)

$$\lim_{h\to 0\cdot F(q)} (f(q+h) - f(q))h^{-1} = \lim_{h\to 0\cdot F(q)} ((a-(q+h))^{-1} - (a-q)^{-1})h^{-1} =$$
$$= \lim_{h\to 0\cdot F(q)} (a-(q+h))^{-1}((a-q) - (a-(q+h)))(a-q)^{-1}h^{-1} =$$
$$= \lim_{h\to 0\cdot F(q)} (a-(q+h))^{-1}h(a-q)^{-1}h^{-1}.$$

Так как $a \in F(q)$, то $(a-q)^{-1} \in F(q)$. Поэтому $(a-q)^{-1}$ и h перестановочны. Получим

$$\lim_{h\to 0\cdot F(q)} (a-(q+h))^{-1}(a-q)^{-1}h\cdot h^{-1} =$$
$$= \lim_{h\to 0\cdot F(q)} (a-(q+h))^{-1}(a-q)^{-1} = (a-q)^{-2}.$$

Таким образом, функция f дифференцируема только в точках множества $F(a)$.

Заметим, что функции, рассмотренные в примерах 1, 2, не являются дифференцируемыми по Фютеру. В то же время несложно привести пример, показывающий, что есть функции, дифференцируемые по Фютеру, но не дифференцируемые в смысле определения 1.

Пример 3. В качестве такого примера можно рассмотреть функцию $f(q) = jqk$. Эта функция не является дифференцируемой в любой комплексной точке в смысле определения 1, однако непосредственные вычисления показывают, что она дифференцируема по Фютеру.

Естественно возникает вопрос о связи между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке. Под непрерывной функцией, как обычно, понимаем функцию, непрерывную относительно топологии, порождаемой модулем кватерниона.

Следующий пример показывает, что функция, дифференцируемая в точке q_0 в смысле определения 1, может не являтся непрерывной в этой точке.

Пример 4. Пусть $q = q_1 + q_2 j$, $q_1, q_2 \in \mathbb{C}$. Рассмотрим для $c \neq 0$ функцию

$$f(q) = \begin{cases} q, & q_2 \neq 0; \\ q+c, & q_2 = 0. \end{cases}$$

Найдем производную этой функции в произвольной точке $q_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Функция f дифференцируема в точке q_0, причем,

$$f'(q_0) = \lim_{h\to 0\cdot F(q_0)} (f(q_0+h) - f(q_0))h^{-1} = \lim_{h\to 0\cdot F(q_0)} (q_0 + h + c - (q_0+c))h^{-1} = 1.$$

Выясним, будет ли эта функция непрерывной в точке q_0. Рассмотрим две последовательности: $h_n = \frac{1}{n}$ и $h_n = \frac{1}{n}j$. В первом случае $\lim\limits_{n\to\infty} f(q_0 + h_n) = q_0 + c$. Во втором случае $\lim\limits_{n\to\infty} f(q_0 + h_n) = q_0$. Следовательно, $\lim\limits_{h\to 0} f(q_0 + h)$ не существует, и данная функция не является непрерывной в точке $q_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Отметим, что отсутствие жесткой связи между непрерывностью и дифференцируемостью функции имеет простой интуитивный смысл. Действительно, дифференцируемость в смысле определения 1 требует существования пределов по особым направлениям, в то время как непрерывность подразумевает существование пределов по всем направлениям.

3. Еще один критерий дифференцируемости функции кватернионного переменного

Пусть $\varphi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, невещественная точка $q_0 \in D(\varphi)$. Тогда согласно предложения 2 для любого $q \in D(\varphi)$ $\quad q = u + v\varepsilon \quad (u, v \in F(q_0))$, и $\varphi(q) = \varphi_1(u, v) + \varphi_2(u, v)\varepsilon$. Обозначим $\psi_1(u) = \varphi_1(u, 0)$; $\psi_2(u) = \varphi_2(u, 0)$; $\overline{\psi}_i(u) = J(\psi_i(u))$ (здесь J–инволюция, построенная в предложении 2).

Лемма 1. *Предел* $L_1 = \lim\limits_{h\to 0\cdot F(q_0)} [\psi_2(q_0 + h) - \psi_2(q_0)] \cdot h|h|^{-2}$ *существует тогда и только тогда, когда существует предел* $L_2 = \lim\limits_{h\to 0\cdot F(q_0)} [\overline{\psi_2}(q_0 + h) - \overline{\psi_2}(q_0)] \cdot h^{-1}$. *При этом* $L_1 = \overline{L}_2$

Доведення. Пусть существует предел L_1. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $h \in F(q_0)$ из условия $|h| < \delta$ следует $|[\psi_2(q_0 + h) - \psi_2(q_0)] \cdot h|h|^{-2} - L_1| < \varepsilon$ Используя соотношения $\varepsilon h^{-1} = J(h^{-1})\varepsilon$ и $h^{-1} = J(h)|h|^{-2}$, полученные в предложении 2, последнее неравенство можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&|[\psi_2(q_0 + h) - \psi_2(q_0)] \cdot h|h|^{-2} - L_1| = |[(\psi_2(q_0 + h) - \psi_2(q_0)) \cdot h|h|^{-2} - L_1]\varepsilon| = \\
&= |[\psi_2(q_0 + h) - \psi_2(q_0)] \cdot \varepsilon J(h|h|^{-2}) - \varepsilon\overline{L}_1| = |\varepsilon[\overline{\psi}_2(q_0 + h) - \overline{\psi_2}(q_0)] \cdot h^{-1} - \varepsilon\overline{L}_1| = \\
&= |\varepsilon[(\overline{\psi}_2(q_0 + h) - \overline{\psi_2}(q_0)) \cdot h^{-1} - \overline{L}_1]| = |[\overline{\psi}_2(q_0 + h) - \overline{\psi_2}(q_0)] \cdot h^{-1} - \overline{L}_1| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

откуда и следует существование предела L_2.

Достаточное утверждение доказывается аналогично. □

Теорема 3. *Предел* $L = \lim_{h\to 0\cdot F(q_0)}[\varphi(q_0 + h) - \varphi(q_0)] \cdot h^{-1}$ *существует тогда и только тогда, когда существуют пределы* $\lim_{h\to 0\cdot F(q_0)}[\psi_1(q_0 + h) - \psi_1(q_0)] \cdot h^{-1}$ *и* $\lim_{h\to 0\cdot F(q_0)}[\overline{\psi}_2(q_0 + h) - \overline{\psi_2}(q_0)] \cdot h^{-1}$.

Доведення. Как показывают вычисления, $[\varphi(q_0 + h) - \varphi(q_0)] \cdot h^{-1} =$

$$\begin{aligned}
&= [(\varphi_1(q_0 + h, 0) + \varphi_2(q_0 + h, 0)\varepsilon) - (\varphi_1(q_0, 0) + \varphi_2(q_0, 0)\varepsilon)] \cdot h^{-1} = \\
&= [(\psi_1(q_0 + h) + \psi_2(q_0 + h)\varepsilon) - (\psi_1(q_0) + \psi_2(q_0)\varepsilon)] \cdot h^{-1} = \\
&= [(\psi_1(q_0 + h) - \psi_1(q_0)) + (\psi_2(q_0 + h) - \psi_2(q_0))\varepsilon] \cdot h^{-1}.
\end{aligned}$$

Используя соотношения $\varepsilon h^{-1} = J(h^{-1})\varepsilon$ и $h^{-1} = J(h)|h|^{-2}$, имеем: $\varepsilon h^{-1} = J(J(h)|h|^{-2})\varepsilon = h|h|^{-2}\varepsilon$.

Таким образом, $[\varphi(q_0 + h) - \varphi(q_0)] \cdot h^{-1} =$

$$= [(\psi_1(q_0 + h) - \psi_1(q_0)) \cdot h^{-1} + (\psi_2(q_0 + h) - \psi_2(q_0)) \cdot h|h|^{-2}\varepsilon] =$$
$$= [(\psi_1(q_0 + h) - \psi_1(q_0)] \cdot h^{-1}) + [(\psi_2(q_0 + h) - \psi_2(q_0)] \cdot h|h|^{-2})\varepsilon.$$

С учетом леммы 1, из полученного равенства следует справедливость утверждения. □

Замечание. Поле $F(q_0)$ изометрически изоморфно полю комплексных чисел. Поэтому понятие дифференцируемости функции в данном поле вводится аналогично этому понятию для функции комплексного переменного. Это позволяет сформулировать теорему 3 в терминах дифференцируемости.

Следствие 1. *Функция $\varphi(q)$ дифференцируема в невещественной точке q_0 тогда и только тогда, когда функции $\psi_1(q)$ и $\overline{\psi_2}(q)$ дифференцируемы в этой точке.*

Теорема 3 и следствие из нее позволяют думать, что на функции, дифференцируемые в смысле определения 1, можно перенести ряд результатов из теории контурного интегрирования функций комплексного переменного. В нашем случае контуры будут лежать в полях, порождаемых соответствующими точками дифференцируемости. Этим вопросам предполагается посвятить отдельную работу.

Заключение. В настоящей работе введено понятие дифференцируемости функции кватернионного переменного по направлению, охватывающее достаточно широкий класс функций. Получены различные критерии дифференцируемости функций.

Список литературы

[1] Ludkovsky S.V. Unbounded operators on Banach spaces over the quaternion field // arXiv:math.OA/0404444 v1. - 24 Apr. 2004.

[2] De Leo S.,Scolarici G.,Solombino L. Quaternionic eigenvalue problem // J.Math. Phys. Bd.43. - 2002. - Vol.11. - P.5815-5829.

[3] Ludkovsky S.V., Oystaeyen F van. Differentiable functions of quaternion variables // Bull. des Sciences Math. (France). - 2003. - Vol.127. - P.755-796.

[4] Березин А.В., Курочкин Ю.А., Толкачев Е.А. Кватернионы в релятивистской физике // М.:Едиториал УРСС. - 2003. - 200 с.

[5] Abdel-Khalek Kh. Quaternion analysis // arXiv:hep-th/19607152v2. - 1996. - P.1-8.

[6] Sudbery A. Quaternionic analysis // Math.Proc.Camb.Phil.Soc. - 1979. Vol.85. - P.199-225.

[7] Фукс Б.А. Теория аналитических функций многих комплексных переменных // М.:ОГИЗ. - 1948. - 472 с.

E-mail: `ltyshk@crimea.edu`