Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2003) 5–13

УДК 517.988.6

Д.А. Закора

ОБ ОДНОМ КВАЗИЛИНЕЙНОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ УРАВНЕНИИ

1. Постановка задачи и общие сведения

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dw}{dt} = A(t)w + N_0(t, w, w) + f(t), \quad t \in [\tau, T], \tag{1}$$

$$w(\tau) = w_\tau \tag{2}$$

в действительном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, где $A(t)$ — линейная ограниченная оператор-функция, а оператор-функция $N_0(t, \cdot, \cdot)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) оператор-функция $N_0(t, \cdot, \cdot)$ линейна по второму и третьему аргументу;

б) существует константа C_T такая, что для любых u, $v \in \mathcal{H}$

$$\|N_0(t, u, v)\| \leqslant C_T \|u\| \, \|v\|, \quad t \in [\tau, T];$$

в) для любых z, u, $v \in \mathcal{H}$ $\quad (N_0(t, z, u), v)_{\mathcal{H}} = -(u, N_0(t, z, v))_{\mathcal{H}}$.

Прежде чем исследовать задачу Коши (1), (2), приведем один общий факт из теории линейных уравнений (см. [1]). Рассмотрим задачу Коши для линейного неоднородного уравнения с переменным оператором

$$\frac{dv}{dt} = A(t)v + f(t), \quad t \in [\tau, T], \tag{3}$$

$$v(\tau) = v_\tau \tag{4}$$

в банаховом пространстве $\mathcal{B}$, где $A(t)$ — линейная ограниченная оператор-функция.

Определение 1. Функция $v(t) \in C^1([\tau, T]; \mathcal{B})$ называется решением задачи Коши (3), (4), если она удовлетворяет уравнению (3) при $t \geqslant \tau$ и начальному условию (4) при $t = \tau$.

Теорема 1. *(см. [1]) Пусть выполнены условия:*

1^0 *оператор-функция $A(t)$ сильно непрерывна на отрезке $[\tau, T]$;*

2^0 *функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[\tau, T]$.*

Тогда решение задачи Коши (3), (4) существует, единственно и выражается по формуле

$$v(t) = \mathcal{U}(t, \tau)v_\tau + \int^t \mathcal{U}(t, s)f(s)\, ds, \tag{5}$$

где $\mathcal{U}(t,s)$ — эволюционный оператор для уравнения (3), *порожденный оператор-функцией* $A(t)$.

Вопросам глобальной разрешимости нелинейных и квазилинейных эволюционных уравнений в банаховом либо гильбертовом пространстве посвящено много работ. В монографии [1] приведены некоторые из утверждений о разрешимости в целом. В работе [2] доказаны более тонкие признаки существования и единственности решений нелинейных уравнений, однако уравнение (1) в эти признаки не укладывается.

2. О глобальной разрешимости

Дадим следующее

Определение 2. Функцию $w(t) \in C^1([\tau,T];\mathcal{H})$ назовем решением задачи Коши (1), (2), если она удовлетворяет уравнению (1) при $t \geqslant \tau$ и начальному условию (2) при $t=\tau$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

1^0 *оператор-функция* $A(t)$ *сильно непрерывна на отрезке* $[\tau,T]$;

2^0 *оператор-функция* $N_0(t,\cdot,\cdot)$ *удовлетворяет условиям* **а), б), в)** *и для любых* $u,v\in\mathcal{H}$ *функция* $N_0(t,u,v)$ *непрерывна на отрезке* $[\tau,T]$;

3^0 *функция* $f(t)$ *непрерывна на отрезке* $[\tau,T]$.

Тогда решение задачи Коши (1), (2) *существует и единственно.*

Доказательство. Доказательство проведем в несколько этапов.

1. Преобразуем задачу (1), (2). Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{d\widetilde{w}}{dt}=A(t)\widetilde{w},\quad t\in[\tau,T],\quad \widetilde{w}(\tau)=w_\tau. \tag{6}$$

По теореме 1 задача Коши (6) имеет единственное на отрезке $[\tau,T]$ решение $\widetilde{w}(t)=\mathcal{U}_A(t,\tau)w_\tau$, где $\mathcal{U}_A(t,s)$ — эволюционный оператор для уравнения (6), порожденный оператор-функцией $A(t)$. Осуществим в уравнении (1) замену $w(t)=\mathcal{U}_A(t,\tau)w_\tau+v(t)$ ($v(\tau)=0$ — это следует из свойств эволюционного оператора (см., например, [1], [3], [4])). В результате получим уравнение для функции $v(t)$ с нулевым начальным условием:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}=A(t)v+N_0(t,\mathcal{U}_A(t,\tau)w_\tau,v)+N_0(t,v,\mathcal{U}_A(t,\tau)w_\tau)+\\ +N_0(t,v,v)+N_0(t,\mathcal{U}_A(t,\tau)w_\tau,\mathcal{U}_A(t,\tau)w_\tau)+f(t),\quad v(\tau)=0.\end{aligned} \tag{7}$$

Задачу (7) можно записать более коротко:

$$\frac{dv}{dt}=A_0(t)v+N_0(t,v,v)+f_0(t),\quad v(\tau)=0, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}A_0(t)&:=A(t)+N_0(t,\mathcal{U}_A(t,\tau)w_\tau,\cdot)+N_0(t,\cdot,\mathcal{U}_A(t,\tau)w_\tau),\\ f_0(t)&:=N_0(t,\mathcal{U}_A(t,\tau)w_\tau,\mathcal{U}_A(t,\tau)w_\tau)+f(t).\end{aligned} \tag{9}$$

2. Зафиксируем $x(t) \in C([\tau, T]; \mathcal{H})$, $x(\tau) = 0$ и рассмотрим задачу

$$\frac{dv}{dt} = A_0(t)v + N_0(t, x, v) + f_0(t), \quad v(\tau) = 0. \tag{10}$$

Это задача Коши для линейного уравнения. С использованием (9), свойств оператор-функций $A(t)$ и $N_0(t, \cdot, \cdot)$, из теоремы 1 следует, что задача Коши (10) имеет единственное на отрезке $[\tau, T]$ решение

$$v(t) = \int\limits_{\tau}^{t} \mathcal{U}_{x(t)}(t, s) f_0(s)\, ds, \tag{11}$$

где $\mathcal{U}_{x(t)}(t, s)$ — эволюционный оператор для уравнения из (10), порожденный оператор-функцией $A_0(t) + N_0(t, x(t), \cdot)$. Основываясь на формуле (11), введем отображение

$$(\mathcal{S}x)(t) := \int\limits_{\tau}^{t} \mathcal{U}_{x(t)}(t, s) f_0(s)\, ds. \tag{12}$$

Рассмотрим множество $\mathcal{M} := \{x(t) \in C([\tau, T]; \mathcal{H}),\ x(\tau) = 0\}$. После введения на $\mathcal{M}$ метрики $\rho(x_1, x_2) := \sup_{t \in [\tau, T]} \|x_1(t) - x_2(t)\|$ оно станет полным метрическим пространством, инвариантным относительно отображения $\mathcal{S}$. Наша цель — доказать, что отображение $\mathcal{S}$ (точнее $\mathcal{S}^{n_0}$ при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$) есть строгое сжатие в метрическом пространстве $(\mathcal{M}, \rho)$. Тогда по теореме о сжимающих отображениях (см. [1], [3]) получим, что для $\mathcal{S}$ существует единственный элемент $x_\tau \in \mathcal{M}$ такой, что $\mathcal{S}x_\tau = x_\tau$. Отсюда и из (11) последует, что $v(t) = x_\tau(t)$ будет единственным решением задачи Коши (8). Затем, осуществляя обратную замену, придем к существованию и единственности решения задачи Коши (1), (2).

В следующих двух пунктах выведем вспомогательные утверждения, необходимые для исследования отображения $\mathcal{S}$.

3. Оценка эволюционного оператора $\mathcal{U}_{x(t)}(t, \tau)$. Введем обозначения (см. [1]):

$$\mathrm{Re}B(t) := \frac{1}{2}(B(t) + B^*(t)), \quad \lambda_M[\mathrm{Re}B(t)] := \sup_{\|\varphi\|=1} (\mathrm{Re}B(t)\varphi, \varphi)_{\mathcal{H}}, \tag{13}$$

где $B(t)$ — линейная ограниченная оператор-функция.

Используя свойство **в)** для оператор-функции $N_0(t, \cdot, \cdot)$, для произвольного элемента $\varphi \in \mathcal{H}$ оценим производную

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\mathcal{U}_{x(t)}(t, \tau)\varphi\|^2 &= \frac{d}{dt}(\mathcal{U}_{x(t)}(t, \tau)\varphi, \mathcal{U}_{x(t)}(t, \tau)\varphi)_{\mathcal{H}} = \\
&= ([A_0(t) + N_0(t, x, \cdot)]\mathcal{U}_{x(t)}(t, \tau)\varphi, \mathcal{U}_{x(t)}(t, \tau)\varphi)_{\mathcal{H}} + \\
&+ (\mathcal{U}_{x(t)}(t, \tau)\varphi, [A_0(t) + N_0(t, x, \cdot)]\mathcal{U}_{x(t)}(t, \tau)\varphi)_{\mathcal{H}} = \\
&= 2(\mathrm{Re}A_0(t) \cdot \mathcal{U}_{x(t)}(t, \tau)\varphi, \mathcal{U}_{x(t)}(t, \tau)\varphi)_{\mathcal{H}} \leqslant 2\lambda_M[\mathrm{Re}A_0(t)]\|\mathcal{U}_{x(t)}(t, \tau)\varphi\|^2.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\|\mathcal{U}_{x(t)}(t, \tau)\varphi\|^2 \leqslant 2\gamma(t)\|\mathcal{U}_{x(t)}(t, \tau)\varphi\|^2, \quad \gamma(t) := \lambda_M[\mathrm{Re}A_0(t)]. \tag{14}$$

Применяя к проинтегрированному по отрезку $[\tau, T]$ неравенству (14) аналог неравенства Гронуолла (см. [1]), получим:

$$\|\mathcal{U}_{x(t)}(t,\tau)\varphi\| \leqslant C(t,\tau)\|\varphi\|, \quad C(t,\tau) := \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} \gamma(s)\,ds\right). \tag{15}$$

Скалярная функция $C(t,\tau)$ не зависит от $x(t)$ и для нее выполнено свойство:

$$C(t,\xi)C(\xi,\tau) = C(t,\tau). \tag{16}$$

4. Выведем теперь формулу для разности двух эволюционных операторов. А именно, докажем, что для любых элементов x_1, $x_2 \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned}&\left[\mathcal{U}_{x_1(t)}(t,s) - \mathcal{U}_{x_2(t)}(t,s)\right] f_0(s) = \\ &\qquad = \int\limits_{s}^{t} \mathcal{U}_{x_1(t)}(t,\xi) N_0\left[\xi, x_1(\xi) - x_2(\xi), \mathcal{U}_{x_2(\xi)}(\xi,s) f_0(s)\right] d\xi.\end{aligned} \tag{17}$$

Для этого рассмотрим две задачи Коши:

$$\frac{dv_k}{dt} = A_0(t)v_k + N_0(t, x_k, v_k), \quad v_k(s) = f_0(s) \quad (k = 1, 2). \tag{18}$$

Вычитая из первого уравнения второе и используя билинейность оператор-функции $N_0(t,\cdot,\cdot)$ (см. условие **a)**), получим, что

$$\frac{d}{dt}(v_1 - v_2) = A_0(t)(v_1 - v_2) + N_0(t, x_1, v_1 - v_2) + N_0(t, x_1 - x_2, v_2). \tag{19}$$

Обозначим $z(t) := v_1(t) - v_2(t)$, тогда из (18), (19) получим задачу Коши для функции $z(t)$ с нулевым начальным условием:

$$\frac{dz}{dt} = A_0(t)z + N_0(t, x_1, z) + N_0(t, x_1 - x_2, v_2), \quad z(s) = 0. \tag{20}$$

Из (20) следует, что

$$z(t) = \int\limits_{s}^{t} \mathcal{U}_{x_1(t)}(t,\xi) N_0\left[\xi, x_1(\xi) - x_2(\xi), \mathcal{U}_{x_2(\xi)}(\xi,s) f_0(s)\right] d\xi. \tag{21}$$

Здесь использовано представление $v_2(t) = \mathcal{U}_{x_2(t)}(t,s)f_0(s)$ для решения второй задачи из (18).

С другой стороны, используя определение $z(t)$, из (18) получаем:

$$z(t) = v_1(t) - v_2(t) = \mathcal{U}_{x_1(t)}(t,s)f_0(s) - \mathcal{U}_{x_2(t)}(t,s)f_0(s). \tag{22}$$

Из (21), (22) следует (17).

5. Исследуем теперь отображение $\mathcal{S}$ на сжатие. Используя (15), (16), (17), покажем, что существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $\mathcal{S}^{n_0}$ есть строгое сжатие в $(\mathcal{M}, \rho)$. Для произвольных x_1, $x_2 \in \mathcal{M}$ из (12), (17) получим

$$(\mathcal{S}x_1)(t) - (\mathcal{S}x_2)(t) = \int\limits_{\tau}^{t} \left[\mathcal{U}_{x_1(t)}(t,s) - \mathcal{U}_{x_2(t)}(t,s)\right] f_0(s)\,ds =$$

$$= \int_\tau^t \int_s^t \mathcal{U}_{x_1(t)}(t,\xi) N_0 \left[\xi, x_1(\xi) - x_2(\xi), \mathcal{U}_{x_2(\xi)}(\xi, s) f_0(s)\right] \, d\xi \, ds. \quad (23)$$

Используя (15), (16) и условие **б)** для оператор-функции $N_0(t,\cdot,\cdot)$, оценим норму разности в (23):

$$\|(\mathcal{S}x_1)(t) - (\mathcal{S}x_2)(t)\| \leqslant \int_\tau^t \int_s^t C(t,\xi) C_T \|x_1(\xi) - x_2(\xi)\| C(\xi,s) \|f_0(s)\| \, d\xi \, ds \leqslant$$

$$\leqslant C_T \sup_{t\in[\tau,T]} \|f_0(t)\| \cdot C(t,\tau) \int_\tau^t \int_s^t \|x_1(\xi) - x_2(\xi)\| \, d\xi \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} K_T C(t,\tau)(t-\tau)^2 \cdot \rho(x_1,x_2), \quad \text{где} \quad K_T := C_T \sup_{t\in[\tau,T]} \|f_0(t)\|. \quad (24)$$

Из (24) методом математической индукции выводится общая формула:

$$\|(\mathcal{S}^n x_1)(t) - (\mathcal{S}^n x_2)(t)\| \leqslant \left[\frac{1}{2} K_T C(t,\tau)(t-\tau)^2\right]^n \frac{1}{n!} \cdot \rho(x_1,x_2), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (25)$$

Переходя к супремуму по t из отрезка $[\tau,T]$ в правой, а затем и в левой части неравенства (25), получим:

$$\rho(\mathcal{S}^n x_1, \mathcal{S}^n x_2) \leqslant \frac{K^n}{n!} \cdot \rho(x_1,x_2), \quad K := \frac{1}{2} K_T \sup_{t\in[\tau,T]} \{C(t,\tau)(t-\tau)^2\}. \quad (26)$$

Из (26) следует, что существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что отображение $\mathcal{S}^{n_0}$ есть строгое сжатие в $(\mathcal{M},\rho)$. Теперь остается только повторить концовку второго пункта и теорема полностью доказана.

В теореме 2 установлено существование и единственность решения задачи Коши (1), (2) на конечном отрезке $[\tau,T]$. Однако, если все определенные составляющие в уравнении (1) непрерывны на луче $\{t \geqslant \tau\}$, то, очевидно, мы можем построить решение задачи (1), (2) для как угодно большого T. При этом норма решения может расти при $t \to \infty$.

3. Об ограниченности решений

Здесь приведем условия, достаточные для ограниченности решения задачи Коши (1). (2).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*

1^0 *оператор-функция $A(t)$ сильно непрерывна и ограничена на луче $[\tau,\infty)$;*

2^0 *оператор-функция $N_0(t,\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условиям* **а), б), в)** *(с заменой T на ∞) и для любых u, $v \in \mathcal{H}$ функция $N_0(t,u,v)$ непрерывна на луче $[\tau,\infty)$;*

3^0 *функция $f(t)$ непрерывна и ограничена на луче $[\tau,\infty)$;*

4^0 *существуют $\gamma > 0$ и $t_\gamma \geqslant \tau$ такие, что $\lambda_M[ReA(t)] \leqslant -\gamma$ при $t \geqslant t_\gamma$.*

Тогда решение задачи Коши (1), (2) ограниченно, а при $f(t) \equiv 0$ — экспоненциально убывает к нулю.

Доказательство. Зафиксируем $T > \tau$. Из теоремы 2 следует, что решение задачи (1), (2) на отрезке $[\tau, T]$ представимо в виде

$$w(t) = \mathcal{U}_A(t,\tau)w_\tau + v(t), \quad \text{где} \quad v(t) = \int_\tau^t \mathcal{U}_{v(t)}(t,s)f_0(s)\,ds. \tag{27}$$

Нужно доказать, что решение $w(t)$ лежит в некотором шаре из фазового пространства $\mathcal{H}$, радиус которого не зависит от T. Для этого в следующих двух пунктах получим оценки для эволюционных операторов из (27).

1. Оценим норму эволюционного оператора $\mathcal{U}_A(t,\tau)$. Из (15) (при $x(t) \equiv 0$) и условия 4^0, для $t \geqslant t_\gamma$, получим:

$$\|\mathcal{U}_A(t,\tau)\| \leqslant \exp\left(\int_\tau^t \lambda_M[\mathrm{Re}A(s)]\,ds\right) \leqslant \exp\left(\int_\tau^{t_\gamma} \lambda_M[\mathrm{Re}A(s)]\,ds\right) e^{-\gamma(t-t_\gamma)} =$$

$$= \exp\left(\int_\tau^{t_\gamma} \lambda_M[\mathrm{Re}A(s)]\,ds\right) e^{\gamma(t_\gamma-\tau)}e^{-\gamma(t-\tau)} = M_1 e^{-\gamma(t-\tau)}.$$

Увеличив если нужно M_1, полученная оценка продолжается до τ :

$$\|\mathcal{U}_A(t,\tau)\| \leqslant M_A e^{-\gamma(t-\tau)}, \quad t \geqslant \tau. \tag{28}$$

В (28) константа M_A не зависит от T.

2. Оценим норму эволюционного оператора $\mathcal{U}_{v(t)}(t,\tau)$. Из условия 2^0 настоящей теоремы и (28) получим:

$$\|N_0(t,\cdot,\mathcal{U}_A(t,\tau)w_\tau)\| \leqslant C_\infty\|\mathcal{U}_A(t,\tau)w_\tau\| \leqslant C_\infty M_A e^{-\gamma(t-\tau)}\|w_\tau\| \to 0 \ \ (t \to +\infty). \tag{29}$$

Зафиксируем $0 < \varepsilon < \gamma$. Из (29) следует, что существует $t_\varepsilon > \tau$ такое, что

$$\lambda_M[\mathrm{Re}N_0(t,\cdot,\mathcal{U}_A(t,\tau)w_\tau)] \leqslant \varepsilon, \quad t \geqslant t_\varepsilon. \tag{30}$$

Из (15), (28), (30), для $t \geqslant t_\varepsilon$, получим:

$$\|\mathcal{U}_{v(t)}(t,\tau)\| \leqslant \exp\left(\int_\tau^t \lambda_M[\mathrm{Re}(A(s) + N_0(s,\cdot,\mathcal{U}_A(s,\tau)w_\tau))]\,ds\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(\int_\tau^t \lambda_M[\mathrm{Re}A(s)]\,ds\right) \exp\left(\int_\tau^t \lambda_M[\mathrm{Re}N_0(s,\cdot,\mathcal{U}_A(s,\tau)w_\tau)]\,ds\right) \leqslant$$

$$\leqslant M_A e^{-\gamma(t-\tau)} \exp\left(\int_\tau^{t_\varepsilon} \lambda_M[\mathrm{Re}N_0(s,\cdot,\mathcal{U}_A(s,\tau)w_\tau)]\,ds\right) e^{\varepsilon(t-t_\varepsilon)} = M_2 e^{-(\gamma-\varepsilon)(t-\tau)}.$$

Увеличив если нужно M_2, полученная оценка продолжается до τ :

$$\|\mathcal{U}_{v(t)}(t,\tau)\| \leqslant M_0 e^{-(\gamma-\varepsilon)(t-\tau)}, \quad t \geqslant \tau. \tag{31}$$

В (31) константа M_0 не зависит от $v(t)$ и T.

3. Опираясь на (28) и (31) оценим теперь норму решения (27):

$$\|w(t)\| \leqslant \|\mathcal{U}_A(t,\tau)w_\tau\| + \|\int\limits_\tau^t \mathcal{U}_{v(t)}(t,s)f_0(s)\,ds\| \leqslant$$

$$\leqslant M_A e^{-\gamma(t-\tau)}\|w_\tau\| + \int\limits_\tau^t M_0 e^{-(\gamma-\varepsilon)(t-s)}\|f_0(s)\|\,ds \leqslant M_A e^{-\gamma(t-\tau)}\|w_\tau\| +$$

$$+\frac{M_0}{\gamma-\varepsilon}\left(1-e^{-(t-\tau)(\gamma-\varepsilon)}\right)\sup_{t\geqslant\tau}\|f_0(t)\| \leqslant M, \quad t\geqslant\tau. \tag{32}$$

Участвующий в (32) супремум конечен. Это следует из определения $f_0(t)$ (см. (9)), свойств оператор-функции $N_0(t,\cdot,\cdot)$, оценки (28) и ограниченности $f(t)$. Из (32) получаем, что решение $w(t)$ ограниченно.

Оценим норму решения задачи Коши (1), (2) при $f(t)\equiv 0$. Из (27), используя свойства оператор-функции $N_0(t,\cdot,\cdot)$, оценки (28) и (31), получим:

$$\|w(t)\| \leqslant \|\mathcal{U}_A(t,\tau)w_\tau\| + \|\int\limits_\tau^t \mathcal{U}_{v(t)}(t,s)N_0[s,\mathcal{U}_A(s,\tau)w_\tau,\mathcal{U}_A(s,\tau)w_\tau]\,ds\| \leqslant$$

$$\leqslant M_A e^{-\gamma(t-\tau)}\|w_\tau\| + \int\limits_\tau^t M_0 e^{-(\gamma-\varepsilon)(t-s)}C_\infty\left(M_A e^{-\gamma(s-\tau)}\|w_\tau\|\right)^2 ds =$$

$$= M_A e^{-\gamma(t-\tau)}\|w_\tau\| + M_0C_\infty\left(M_A e^{\gamma\tau}\|w_\tau\|\right)^2\int\limits_\tau^t e^{-(\gamma+\varepsilon)s}\,ds\cdot e^{-(\gamma-\varepsilon)t}\to 0$$

при $t\to+\infty$. Теорема полностью доказана.

Покажем теперь, что ограниченность решений может иметь место и при значительном ослаблении условия 4^0 из теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1^0, 2^0, 3^0 *теоремы 3 и еще одно:*

4^0 *существуют* $\xi(t)\in C^1([\tau,+\infty);\mathcal{H})$, $\gamma>0$, $t_\gamma\geqslant\tau$ *такие, что* $\xi(t)$, $\xi'(t)$ — *ограниченны на луче* $[\tau,+\infty)$ *и* $\lambda_M[Re(A(t)+N_0(t,\cdot,\xi))]\leqslant-\gamma$ *при* $t\geqslant t_\gamma$.

Тогда решение задачи Коши (1), (2) *ограниченно.*

Доказательство. Оно основано на сведении этой ситуации к теореме 3. А именно, представим решение в виде $w(t)=\xi(t)+\widetilde{w}(t)$. Для функции $\widetilde{w}(t)$ получим следующую задачу Коши:

$$\frac{d\widetilde{w}}{dt}=[A(t)+N_0(t,\cdot,\xi)]\widetilde{w}+N_0(t,\xi,\widetilde{w})+N_0(t,\widetilde{w},\widetilde{w})+$$

$$+A(t)\xi-\xi'+N_0(t,\xi,\xi)+f(t), \quad \widetilde{w}(\tau)=w_\tau-\xi(\tau). \tag{33}$$

Задачу (33) запишем более коротко:

$$\frac{d\widetilde{w}}{dt}=\widetilde{A}(t)\widetilde{w}+N_0(t,\widetilde{w},\widetilde{w})+\widetilde{f}(t), \quad \widetilde{w}(\tau)=w_\tau-\xi(\tau), \tag{34}$$

$$\widetilde{A}(t) := A(t) + N_0(t,\cdot,\xi) + N_0(t,\xi,\cdot),\ \widetilde{f}(t) := A(t)\xi - \xi' + N_0(t,\xi,\xi) + f(t). \tag{35}$$

Из (35) и свойства **в)** для оператор-функции $N_0(t,\cdot,\cdot)$, получим, что

$$\lambda_M[\mathrm{Re}\widetilde{A}(t)] = \lambda_M[\mathrm{Re}(A(t) + N_0(t,\cdot,\xi))] \leqslant -\gamma, \quad t \geqslant t_\gamma, \tag{36}$$

согласно условию 4^0 настоящей теоремы. Таким образом для задачи Коши (34) мы находимся в условиях теоремы 3. Из теоремы 3 и условий на $\xi(t)$ следует ограниченность решения задачи Коши (1),(2). Теорема доказана.

Здесь следует отметить, что в условиях теоремы 4 решение задачи Коши (1),(2) без нелинейного слагаемого $N_0(t,\cdot,\cdot)$ может расти при $t \to +\infty$. Нелинейное слагаемое в этом случае стабилизирует решение задачи Коши в том смысле, что оно (решение) с течением времени остается в некотором шаре фазового пространства $\mathcal{H}$. При этом возможно, что решение может вести себя довольно сложно. Ниже приведен пример — система Лоренца. Хоть это конечномерная и хорошо изученная система, тем не менее она может послужить иллюстрацией к доказанным утверждениям.

4. Система Лоренца

В 1963 г. Э.Н. Лоренц [5] предложил простую модель тепловой конвекции в атмосфере, описываемую тремя уравнениями. В безразмерном виде уравнения Лоренца записываются следующим образом (см. так же [6]):

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y - x), \\ y' &= \rho x - y - xz, \\ z' &= xy - \beta z. \end{aligned} \tag{37}$$

Параметры σ и ρ связаны соответственно с числами Прандтля и Рэлея, а параметр $\beta > 1$ описывает геометрию системы.

Систему (37) можно записать в следующем виде в $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{dw}{dt} = Aw + (w, e_1)Cw, \quad \text{где} \tag{38}$$

$$A := \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix},\ C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ w := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Если в уравнении (1) положить $A(t) := A$, $N_0(t,u,v) := (u,e_1)Cv$, $f(t) \equiv 0$, то оно примет вид (38).

Очевидно, что для уравнения (38) выполнены все условия теоремы 2. Таким образом, решение уравнения (38) для каждого начального значения единственно и существует как угодно долго. Можно проверить, что условие 4^0 теоремы 3, достаточное для ограниченности решения, не выполнено.

Попробуем отыскать для уравнения (38) элемент $\xi = (\xi_1;\xi_2;\xi_3)^t$, удовлетворяющий условию 4^0 теоремы 4. Непосредственно проверяется, что

$$\mathrm{Re}\widetilde{A}(t) := \mathrm{Re}(A(t) + N_0(t,\cdot,\xi)) = \begin{pmatrix} -\sigma & \frac{1}{2}(\sigma+\rho-\xi_3) & \frac{1}{2}\xi_2 \\ \frac{1}{2}(\sigma+\rho-\xi_3) & -1 & 0 \\ \frac{1}{2}\xi_2 & 0 & -\beta \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Из этой формулы видно, что если положить $\xi := (0; 0; \sigma + \rho)^t$, то (см. (13)) $\lambda_M[\mathrm{Re}\widetilde{A}(t)] = -\min\{\sigma, 1, \beta\} < 0$. Отсюда и из вида выбранного элемента ξ получаем, что для уравнения (38) выполнены все условия теоремы 4. Следовательно, решение уравнения (38) глобально ограниченно для любого начального значения. Этот факт хорошо известен. Численные экспереметы показывают, что система (37) допускает сложные хаотические решения, блуждающие между тремя равновесными точками.

Список литературы

[1] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве* – М.: Наука, 1970. – 536 С.

[2] Красносельский М.А., Крейн С.Г. *К теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах* // Труды семинара по функц. анализу, Воронеж, 1956. Т. 2.

[3] Голдстейн Дж. *Полугруппы линейных операторов и их приложения* – К.: Выща шк., 1989. – 347 С.

[4] Хенри Д. *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений* – М.: Мир, 1985. – 376 С.

[5] Lorenz E.N. *Deterministic Non-Periodic Flow* // J. Atmos. Sci. 1963. T. 20. P. 130 – 141.

[6] Мун Ф. *Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров* Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 312 С.

E-mail: dmitry@mail.strace.net