Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2003) 123–131

УДК 517.9:532

А.В. Яковлев

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В статье изучается двумерная начально-краевая задача о малых колебаниях твердого тела с полостью, заполненной вязкоупругой жидкостью.

В качестве модели жидкости, обладающей свойствами вязкоупругости, выбрана модель Олдройта, описанная, например, в книге Эйриха [1].Для этой модели связь между тензором напряжения $\vec{\sigma}'$ и тензором деформации $\vec{\tau}$ имеет дифференциальный характер

$$\left(1+\sum_{j=1}^{m}\eta_j\frac{d^j}{dt^j}\right)\vec{\sigma}'=\left(\varkappa_0+\sum_{j=1}^{m}\varkappa_j\frac{d^j}{dt^j}\right)\vec{\tau}, \tag{1}$$

где $\varkappa_0$, η_m и $\varkappa_m$ — некоторые положительные физические константы.

Из (1) следует, что:

$$\vec{\sigma}'=\mu\hat{I}_0(t)\vec{\tau}, \tag{2}$$

где $\mu=\varkappa_m/\eta_m>0$ и оператор $\hat{I}_0(t)$ действует по закону

$$(\hat{I}_0\vec{\tau})(t):=\vec{\tau}(t)+\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\int\limits_0^t e^{-\gamma_j(t-s)}\vec{\tau}(s)ds. \tag{3}$$

Если $\alpha_j=0$ $(j=\overline{1,m})$, то из (3) получается модель обычной вязкой жидкости.

Отметим, что согласно (2), (3) связь между $\vec{\tau}$ и $\vec{\sigma}'$ дается с помощью интегрального оператора Вольтерра второго рода. Отсюда следует, что для любого момента t оператор $\hat{I}_0(t)$ обратим и обратный к нему оператор $\hat{I}_0^{-1}(t)$ также является интегральным оператором Вольтерра второго рода.

1. Постановка начально-краевой задачи о малых движениях тела с полостью, заполненной вязкоупругой жидкостью

Будем считать, что в плоскости Oy_1y_2 расположено (плоское) твердое тело, закрепленное в точке O. Тело имеет полость Ω, заполненную вязкоупругой жидкостью с моделью вида (1)–(3). Центр масс системы "тело + жидкость"расположен в точке $C\neq O$, $|OC|=l$. На тело действует однородное гравитационное поле $\vec{g}=-g\vec{e}_{2'}$, где $\vec{e}_{2'}$ — орт оси Oy_2, $g>0$ — ускорение силы тяжести. Введем в рассмотрение систему координат Ox_1x_2, жестко связанную с твердым телом, а также угловую скорость $\vec{\omega}$ вращения тела относительно оси Ox_3, направленной перпендикулярно плоскости

Ox_1x_2 так, чтобы орты $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ осей Ox_1, Ox_2 и Ox_3 составляли правую тройку векторов. Тогда $\vec{\omega} = \omega_3\vec{e}_3$, а угловое перемещение тела $\vec{\delta}$, отвечающее угловой скорости $\vec{\omega}$ и связанные с ней соотношением

$$\vec{\delta}(t) = \int\limits_0^t \vec{\omega}(s)ds + \vec{\delta}(0), \tag{4}$$

также имеет вид $\vec{\delta} = \delta_3\vec{e}_3$.

Выпишем линеаризованные уравнения малых движений маятника с полостью, заполненной вязкоупругой жидкостью. Их можно получить рассуждениями, аналогичными выводу таких же уравнений для вязкой жидкости в плоскости либо пространственном случае (см., например, [2], параграфы 3.1, 3.4, 6.2). С учетом модели (1)–(3) вязкоупругой жидкости приходим к начально-краевой задаче

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right) = -\nabla p + \mu\hat{I}_0(t)(\Delta\vec{u}) + \rho\vec{f}(t,x), \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \tag{5}$$

$$J\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \rho\int\limits_\Omega(\vec{r}\times\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t})d\Omega + \alpha\vec{\omega} + mgl\vec{\delta} = \vec{M}(t), \quad \frac{d\vec{\delta}}{dt} - \vec{\omega} = \vec{0}, \tag{6}$$

$$\vec{u} = \vec{0}(\text{ на } S), \quad \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x)(\text{ в } \Omega), \quad \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^0, \quad \vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^0, \tag{7}$$

записанной в подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Здесь $\rho > 0$ – плотность жидкости, $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ — радиус-вектор произвольной точки $x = (x_1, x_2) \in \Omega$; $\vec{u}(t,x)$ – относительная скорость жидкости в полости Ω; $\vec{f}(t,x)$ – малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле; $\nabla p(t,x)$ — отклонение градиента давления от равновесного; $J > 0$ – единственный элемент тензора моментов инерции системы "тело + жидкость", который в данном случае является положительным числом; $\alpha > 0$ – коэффициент трения на оси Ox_3 подвеса тела; $m > 0$ – масса всей системы; $\vec{M}(t)$ — главный момент относительно полюса O малых внешних сил, действующих на систему (помимо гравитационных сил); Δ – плоский (двумерный) оператор Лапласа по переменным x_1, x_2. Интегральный оператор $\hat{I}_0(t)$ для любого поля $\vec{v}(t,x)$ действует согласно (3) по закону

$$\hat{I}_0(t)\vec{v} := \vec{v}(t,x) + \sum_{j=1}^m \alpha_j\int\limits_0^t e^{-\gamma_j(t-s)}\vec{v}(s,x)ds. \tag{8}$$

Для данной гидромеханической системы получен закон баланса полной энергии системы.

2. Переход к дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве

Применим к задаче (5)–(7) операторные методы, подробно описанные для ряда аналогичных задач в книге [2], см. в частности, гл. 6. Будем считать, что функция $\vec{u}(t,x)$ является функцией переменной t со значениями в пространстве вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$, где введено скалярное произведение по закону

$$(\vec{u},\vec{v}) := \int_\Omega \vec{u}(x)\cdot\overline{\vec{v}(x)}d\Omega. \tag{9}$$

Воспользуемся далее следующим ортогональным разложением $\vec{L}_2(\Omega)$ (см. [2], с. 101-103):

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{G}(\Omega)\oplus\vec{J}_0(\Omega), \tag{10}$$

$$\vec{G}(\Omega) = \{\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega)\colon \vec{v} = \nabla p, \quad p\in H^1(\Omega)\}, \tag{11}$$

$$\vec{J}_0(\Omega) = \{\vec{u}\in\vec{L}_2(\Omega)\colon \operatorname{div}\vec{u} = 0(\text{ в } \Omega), \quad \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } S = \partial\Omega)\}. \tag{12}$$

Здесь $H^1(\Omega)$ — известное пространство С. Л. Соболева (для скалярных функций), а операции $\operatorname{div}\vec{u}$ и $\vec{u}\cdot\vec{n}$, где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней к области Ω нормали, понимаются в смысле теории обобщенных функций конечного порядка (см. [2], с. 99-102).

Пусть $P_0\colon \vec{L}_2(\Omega)\to\vec{J}_0(\Omega)$ и $P_G\colon \vec{L}_2(\Omega)\to\vec{G}(\Omega)$ — ортопроекторы соответственно на $\vec{J}_0(\Omega)$ и $\vec{G}(\Omega)$. Тогда, проектируя обе части уравнения (5) на эти подпространства и учитывая, что в силу (10)–(12) $\vec{u}\in\vec{J}_0(\Omega)$, $\nabla p\in\vec{G}(\Omega)$, получим для классического решения задачи (5)–(7) соотношения

$$\vec{0} + \rho P_G\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right) = -\nabla p + \mu\hat{I}_0(t)P_G(\Delta\vec{u}) + \rho P_G\vec{f}, \tag{13}$$

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt} + \rho P_0\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right) = \vec{0} - \mu\hat{I}_0(t)(A\vec{u}) + \rho P_0\vec{f}, \tag{14}$$

где оператор A определен по закону

$$A\vec{u} := -P_0\Delta\vec{u} \tag{15}$$

на области определения

$$\mathcal{D}(A) := \{\vec{u}\in\vec{J}_0(\Omega)\colon \ \vec{u}\in\vec{C}^2(\Omega),\ \operatorname{div}\vec{u} = 0(\text{ в } \Omega),\ \vec{u} = \vec{0}(\text{ на } S)\}, \tag{16}$$

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = \vec{J}_0(\Omega), \tag{17}$$

а $\vec{C}^2(\Omega)$ — множество дважды непрерывно дифференцируемых векторных полей.

Свойства оператора A хорошо изучены (см. [2], с. 111-112).

Лемма 1. *Оператор A является симметричным и положительно определенным на $\mathcal{D}(A)$. Его расширение по Фридриху $\tilde{A}$, называемое оператором Стокса, является самосопряженным положительно определенным оператором, заданным на области определения $\mathcal{D}(\tilde{A})$,*

$$\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(\tilde{A})\subset\vec{J}_0^1(\Omega), \tag{18}$$

где $\vec{J}_0^1(\Omega)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\vec{u},\vec{v})_{1,\Omega} := \int_\Omega \mathrm{rot}\vec{u}\cdot\overline{\mathrm{rot}\vec{v}}\,d\Omega, \tag{19}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \quad (\text{ в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{ на } S = \partial\Omega). \tag{20}$$

Если граница $\partial\Omega$ области Ω достаточно гладкая (например, дважды непрерывно дифференцируема), то

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \vec{H}^2(\Omega)\cap\vec{J}_0^1(\Omega), \quad \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}) = \vec{J}_0^1(\Omega), \tag{21}$$

где $\vec{H}^2(\Omega)$ — пространство Соболева для вектор-функций.

Обратный оператор $\tilde{A}^{-1}$ является компактным и положительным оператором и потому оператор $\tilde{A}$ имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных положительных собственных значений $\{\lambda_k(\tilde{A})\}_{k=1}^{\infty}$ с предельной точкой на $+\infty$ и с асимптотическим поведением

$$\lambda_k(\tilde{A}) = c_{\tilde{A}}k\,[1+o(1)] \quad (k\to\infty), \quad c_{\tilde{A}} = \left(\frac{mes(\Omega)}{\pi}\right)^{-1} > 0. \tag{22}$$

Далее будем считать, что в уравнении (14) стоит именно расширение оператора A по Фридриху, о котором говорится в лемме 1, и для простоты обозначений снова будем использовать для этого расширения символ A.

Вернемся к уравнениям (13), (14), (6), (7). Будем считать, что задача (14), (6), (7) уже решена и ее решение $\vec{u}\in\mathcal{D}(A)$ в любой момент t. Тогда $\Delta\vec{u}\in\vec{L}_2(\Omega)$ (см. (21)). $P_G\Delta\vec{u}\in\vec{G}(\Omega)$. В этом случае из (13) по известным $\vec{u}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{f}$ можно найти $\nabla p\in\vec{G}(\Omega)$. В то же время давление p не входит в формулировку задачи (14), (6), (7), которую, таким образом, далее и следует изучать подробно.

Целью дальнейших построений является переход от задачи (14), (6), (7), содержащей интегральный оператор Вольтерра $\hat{I}_0(t)$ (см. (8)), к дифференциальному уравнению первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств; коэффициентами этого дифференциального уравнения будут операторные матрицы с неограниченными операторными компонентами. Исследования проводятся по схеме, примененной в статье [3], где в качестве примера рассматривается случай движения вязкоупругой жидкости в неподвижном сосуде. Предварительно дадим следующее

Определение 1. Набор функций $\vec{u}(t,x)$, $\vec{\omega}(t)$, $\vec{\delta}(t)$ и $\nabla p(t,x)$ называется сильным решением задачи (13), (14), (6), (7) на отрезке $[0,T]$, если $\vec{u}(t,x)$, рассматриваемая как функция переменной t со значениями в $\vec{J}_0(\Omega)$, сильно непрерывно дифференцируема в $\vec{J}_0(\Omega)$, $\vec{u}(t,x)\in C^1([0;T];\vec{J}_0(\Omega))$, $\vec{u}(t,x)\in\mathcal{D}(A)$ и $A\vec{u}(t,x)\in C([0,T];\vec{J}_0(\Omega))$, функции $\vec{\omega}(t)$ и $\vec{\delta}(t)$ принадлежат $C([0,T];\mathbb{C})$ и выполнены уравнения (13), (14), (6), (13).

Будем считать, что задача (13), (14), (6), (7) имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$. Введем новые искомые функции $\vec{v}_k(t)$, $k=\overline{1,m}$, согласно формулам

$$\vec{v}_k(t) := \mu^{1/2}\alpha_k^{1/2}\int\limits_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}A^{1/2}\vec{u}(s)ds, \quad k=\overline{1,m}. \tag{23}$$

Так как $\vec{u}(t)$ – непрерывно дифференцируемая по t функция и при каждом $t\in[0,T]$ принадлежит $\mathcal{D}(A)$, то функции $\vec{v}_k(t)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt} = \mu^{1/2}\alpha_k^{1/2}A^{1/2}\vec{u}(t) - \gamma_k\vec{v}_k(t), \quad k=\overline{1,m}. \tag{24}$$

С учетом введенных обозначений исходную задачу можно записать в виде одного дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_0\oplus\hat{\mathcal{H}}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}, \quad \mathcal{H}_0 := \vec{J}_0(\Omega), \quad \hat{\mathcal{H}} := (\vec{J}_0(\Omega))^m, \tag{25}$$

элементами которого являются вектор-столбцы

$$y = (\vec{u};\hat{v};\vec{\omega};\vec{\eta})^t, \quad \hat{v} := (\vec{v}_1;\ldots;\vec{v}_m), \tag{26}$$

а скалярное произведение в $\mathcal{H}$ определено формулой

$$(y_1,y_2)_{\mathcal{H}} = (\vec{u}_1,\vec{u}_2) + (\hat{v}_1,\hat{v}_2)_{\hat{\mathcal{H}}} + \vec{\omega}_1\cdot\overline{\vec{\omega}_2} + \vec{\eta}_1\cdot\overline{\vec{\eta}_2}, \tag{27}$$

$$(\hat{v}_1,\hat{v}_2)_{\hat{\mathcal{H}}} = \sum_{k=1}^m(\vec{v}_{1k},\vec{v}_{2k}), \tag{28}$$

для любых элементов

$$y_j = (\vec{u}_j;\hat{v}_j;\vec{\omega}_j;\vec{\eta}_j)^t, \quad \hat{v}_j = (\vec{v}_{j1};\ldots;\vec{v}_{jm}), \quad j=1,2. \tag{29}$$

Введем в рассмотрение операторную матрицу $\mathcal{B}$, отвечающую слагаемым с производными по t, операторную матрицу $\mathcal{A}$, отвечающую слагаемым, не содержащим производные по t, а также столбец правых частей

$$f := (\rho P_0\vec{f};\hat{0};\vec{M}(t);\vec{0})^t \tag{30}$$

и начальных условий

$$y^0 := (\vec{u}^0;\hat{0};\vec{\omega}^0;\beta\vec{\delta}^0)^t\in\mathcal{H}. \tag{31}$$

Тогда матрица $\mathcal{B}$ имеет следующий блочный вид

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \rho I & \hat{0} & B_{13} & 0\\ \hat{0}^t & \hat{I} & 0 & 0\\ B_{31} & \hat{0} & J & 0\\ 0 & \hat{0} & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{32}$$

$$B_{13}\vec{\omega} := \rho P_0(\vec{\omega}\times\vec{r}), B_{31}\vec{u} := \rho\int\limits_\Omega(\vec{r}\times\vec{u})d\Omega, \tag{33}$$

$$\hat{0} := (\underbrace{0;\ldots;0}_m), \hat{0}^t = (\underbrace{0;\ldots;0}_m)^t, \tag{34}$$

где $\hat{I}$ — единичный оператор в $\hat{\mathcal{H}}$, а матрица $\mathcal{A}$ имеет представление

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \hat{A}_{12} & 0 & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{0} & \alpha & \beta \\ 0 & \hat{0} & -\beta & 0 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

$$A_{11} := \mu A, \quad \hat{A}_{22} := \operatorname{diag}(\gamma_k I)_{k=1}^{m}, \ \hat{A}_{12} := \mu^{1/2}(\alpha_1^{1/2}A^{1/2}; \ldots ; \alpha_m^{1/2}A^{1/2}), \quad \hat{A}_{21} = -\hat{A}_{12}^{*}, \tag{36}$$

и задана на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \mathcal{D}(A) \oplus (\mathcal{D}(A^{1/2}))^m \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}. \tag{37}$$

Как видно из (32), (34), операторная матрица $\mathcal{B}$ задана на всем пространстве $\mathcal{H}$, т. е. $\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{H}$.

Тогда задача имеет вид

$$\mathcal{B}\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y = f(t), \quad y(0) = y^0. \tag{38}$$

Теорема 1. *Классические решения начально-краевой задачи* (5)-(7) *удовлетворяют равенству* (13) *и являются решениями (с учетом обозначений* (23)-(26),(30)-(37)*) задачи Коши* (38) *в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$.

3. Свойства операторных матриц задачи Коши

Свойства операторных матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ задачи Коши (38)описываются следующими утверждениями.

Лемма 2. *Операторы* $B_{13}\colon \mathbb{C} \to \vec{J}_0(\Omega) = \mathcal{H}_0$ *и* $B_{31}\colon \vec{J}_0(\Omega) \to \mathbb{C}$ *(см.* (32)*) ограничены и взаимно сопряжены.*

Лемма 3. *Операторная матрица* $\mathcal{B}$ *из* (32) *является ограниченным положительно определенным оператором, действующим в пространстве* $\mathcal{H}$.

Доказательство данных фактов проводится непосредственной проверкой.

Лемма 4. *Операторная матрица* $\mathcal{A}$ *является максимальным аккретивным оператором, заданным на области определения* $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$ *из* (37).

Свойство аккретивности доказывается простым вычислением, а максимальность основана на факторизационной формуле ($Q := \hat{A}_{22}^{-1/2}\hat{A}_{12}^{*}A_{11}^{-1/2} = (\gamma_1^{-1/2}\alpha_1^{1/2}I; \ldots ; \gamma_m^{-1/2}\alpha_m^{1/2}I)^t$)

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} A_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & \hat{A}_{22}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Q^* \\ -Q & \hat{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & \hat{A}_{22}^{1/2} \end{pmatrix}, \tag{39}$$

в которой крайние множители имеют ограниченные обратные операторы, а средний сомножитель, как показывают определения (35) блоков $\hat{A}_{ij}$ и A_{11}, является ограниченным оператором. Кроме того, очевидна формула

$$\operatorname{Re}\left\{\begin{pmatrix} I & Q^* \\ -Q & \hat{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}\right\} = \|\vec{u}\|^2 + \|\hat{v}\|^2_{\hat{\mathcal{H}}}, \tag{40}$$

откуда следует, что эта операторная матрица также имеет ограниченную обратную матрицу.

Значит, матричный оператор $\hat{\mathcal{A}}$ имеет ограниченный обратный оператор, заданный на всем $\mathcal{H}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}$, т. е. оператор $\tilde{\mathcal{A}}$ является максимальным аккретивным оператором. Можно проверить также, что область определения оператора $\tilde{\mathcal{A}}$ имеет вид $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A) \oplus (\mathcal{D}(A^{1/2})^m$, что согласуется с $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ из (37).

4. Теорема о сильной разрешимости исходной начально-краевой задачи

Доказательству разрешимости этой основной эволюционной проблемы предпошлем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5. *Пусть в задаче Коши* (38) *выполнены условия*

$$y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H}). \tag{41}$$

Тогда она имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$, *т. е. такую функцию* $y(t)$ *со значениями в* $\mathcal{H}$, *для которой* $y(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ *при любом* $t \in [0,T]$, $\mathcal{A}y(t) \in C([0,T];\mathcal{H})$, $dy/dt \in C([0,T];\mathcal{H})$ *и выполнено уравнение* (38).

Доказательство. Так как согласно лемме 2 оператор $\mathcal{B}$ ограничен и имеет ограниченный обратный оператор $\mathcal{B}^{-1}$, то задача (38) равносильна задаче

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}y = \mathcal{B}^{-1}f(t), \quad y(0) = y^0. \tag{42}$$

Введем в $\mathcal{H}$ новое скалярное произведение

$$\langle y, z\rangle := (\mathcal{B}y, z)_{\mathcal{H}}, \tag{43}$$

порождающее норму, эквивалентную (в силу ограниченности и положительной определенности $\mathcal{B}$) исходной норме $\mathcal{H}$. Соответствующее энергетическое пространство для этой нормы обозначим через $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$.

Покажем, что оператор $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$ является максимальным аккретивным оператором в $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ и задан на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{B}}. \tag{44}$$

Действительно, оператор $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$ замкнут и область его значений есть все пространство, так как $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^{-1}$ ограничены, а оператор $\mathcal{A}$ обладает этими свойствами (лемма 4). Поэтому достаточно проверить лишь свойство аккретивности $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$. При $y \in \mathcal{D}(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A})$ имеем $\operatorname{Re}\langle\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}y, y\rangle = \operatorname{Re}(\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}} = \operatorname{Re}(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}} \geqslant 0$, откуда и следует свойство максимальной аккретивности $\mathcal{B}^{-1}A$ в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$.

Значит, оператор $-\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$ является максимальным диссипативным оператором в $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ и потому порождает (см. [4], с. 110) сжимающую полугруппу $U(t)$ операторов, действующих в $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$.Так как в силу (41) функция $\mathcal{B}^{-1}f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H})$, а $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, то задача Коши (42) при условиях (41) имеет сильное решение, выражаемое через полугруппу $U(t)$ формулой

$$y(t) = U(t)y^0 + \int_0^t U(t-s)\mathcal{B}^{-1}f(s)ds, \tag{45}$$

причем генератором полугруппы является оператор $-\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$.

Так как нормы в пространствах $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ эквивалентны, то общие свойства решений $y(t)$ в $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ совпадают, т. е. для $y(t)$ выполнены свойства, сформулированные во второй части леммы. □

Следствием леммы 5 является

Теорема 2. *Пусть в задаче* (5)-(7) *выполнены условия*

$$\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad \vec{f} \in C^1([0,T];\vec{L}_2(\Omega)), \quad \vec{M} \in C^1([0,T];\mathbb{C}), \quad \vec{\omega}^0 \in \mathbb{C}, \quad \vec{\delta}^0 \in \mathbb{C}, \tag{46}$$

причем граница $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ принадлежит классу C^2, т. е. дважды непрерывно дифференцируема. Тогда эта задача имеет на отрезке $[0,T]$ единственное сильное решение, т. е. такой набор функций $\vec{u}(t,x)$, $p(t,x)$, $\vec{\delta}(t)$, $\vec{\omega}(t)$, для которых $\vec{u} \in C^1([0,T];\vec{J}_0(\Omega))$, $\vec{u} \in \mathcal{D}(A)$ при любом $t \in [0,T]$ и $A\vec{u} \in C([0,T];\vec{J}_0(\Omega))$; $\nabla p \in C([0,T];\vec{G}(\Omega))$; $\vec{\omega} \in C^1([0,T],\mathbb{C})$, $\vec{\delta} \in C^2([0,T];\mathbb{C})$; при любом $t \in [0,T]$ выполнены уравнения (5), (6), *причем каждое слагаемое в первом уравнении* (5) *является функцией переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega)$, а в уравнениях* (6) — *функцией из $C([0,T];\mathbb{C})$.*

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши (38). Если выполнены условия (46), то согласно (30) функция $f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H})$, а начальный элемент y^0 вида (31) в силу определения (37) принадлежит области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ операторной матрицы $\mathcal{A}$ из (35). Поэтому по лемме 5 задача Коши (38) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Это означает, что исходная начально-краевая задача имеет на отрезке $[0,T]$ единственное сильное решение. При этом функция $\vec{u} \in \mathcal{D}(A)$ при любом $t \in [0,T]$, $\vec{v}_k \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $k = \overline{1,m}$, а все слагаемые в уравнениях непрерывны по t при $t \in [0,T]$ и являются функциями переменной t со значениями в соответствующих пространствах. Используя начальные условия для $\vec{v}_k(t)$, приходим к формулам (23), в которых $\vec{v}_k \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ и

$$A^{1/2}\vec{v}_k(t) = \mu^{1/2}\alpha_k^{1/2}\int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}A\vec{u}(s)ds \in C([0,T];\vec{J}_0(\Omega)), \quad k = \overline{1,m}, \tag{47}$$

так как согласно предыдущему $A\vec{u}(t) \in C([0,T];\vec{J}_0(\Omega))$. Подставляя функции (47) в первое уравнение, получаем, что выполнено уравнение (14), причем все слагаемые в этом уравнении являются непрерывными функциями t со значениями в $\vec{J}_0(\Omega)$, $t \in [0,T]$.

Так как согласно условию теоремы $\partial\Omega \in C^2$, то область определения оператора A есть множество $\vec{H}^2(\Omega)\cap\vec{J}_0^1(\Omega)$ (см. лемму 1 и (21)) Поэтому $\Delta\vec{u} \in C([0,T];\vec{L}_2(\Omega))$, $\hat{I}_0(t)P_G(\Delta\vec{u}) \in C([0,T];\vec{G}(\Omega))$. Из этих фактов и из (13) получаем, что ∇p, определяемый однозначно по $\vec{u}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{f}$, является функцией переменной t со значениями в $C([0,T];\vec{G}(\Omega))$. Согласно определению 1, установленные свойства решений означают, что набор функций $\vec{u}(t,x)$, $\vec{\omega}(t)$, $\vec{\delta}(t)$ и $\nabla p(t,x)$ является сильным решением задачи (13), (14), (6), (7) на отрезке $[0,T]$.

Возвращаясь от (13), (14) к уравнениям (5), приходим к выводу, что задача (5)-(7) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$, в частности, это решение обладает свойствами, приведенными в формулировке теоремы.

Замечание 15. Если граница $\partial\Omega$ области Ω не является достаточно гладкой, то сильное решение обладает свойством $\vec{u} \in \mathcal{D}(A) \subset \vec{J}_0^1(\Omega)$, $A\vec{u} \in C([0,T]; \vec{J}_0(\Omega))$, а ∇p является, вообще говоря, обобщенной функцией (распределением).

Замечание 16. Полученный в теореме 2 результат можно усилить, ослабив в (46) требование на $\vec{f}$ и $\vec{M}(t)$. Именно, применив взамен теоремы Като ([5], с.166, теорема 6.5) другой абстрактный результат – теорему С.Я. Якубова ([6], с.336 – 338, теорема 6.2.2/1, замечание 6.2.2/2), легко проверить, что утверждения теоремы 2 справедливы, если взамен (46) выполнены условия

$$\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A),\ \vec{f} \in W_2^1((0,T); \vec{L}_2(\Omega)),\ \vec{M} \in W_2^1(0,T),\ \vec{\omega}^0 \in \mathbb{C},\ \vec{\delta}^0 \in \mathbb{C}. \square \tag{48}$$

Однако и этот результат допускает усиление, если привести задачу Коши (38) к абстрактному параболическому уравнению и воспользоваться результатами монографий [5], с.183, теорема 7.2, а также [7], с.130, теорема 2.1.4. На основе этих рассуждений доказывается итоговая теорема о разрешимости начально-краевой задачи (5) - (7).

Теорема 3. *Пусть в задаче* (5) - (7) *выполнены условия*

$$\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A), \quad \vec{f} \in C^\alpha([0,T]; \vec{L}_2(\Omega)),\ \alpha > 0, \tag{49}$$

$$\vec{M} \in C^\alpha[0,T],\ \vec{\omega}^0 \in \mathbb{C},\ \vec{\delta}^0 \in \mathbb{C},\ \partial\Omega \in C^2. \tag{50}$$

Тогда эта задача имеет на отрезке $[0,T]$ единственное сильное решение, для которого справедливы все утверждения теоремы 2).

Автор благодарит Н.Д. Копачевского за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

Список литературы

[1] Eirich F.R. (ed.) *Reology: theory and applications*, vol. 1, Academic Press, New York, 1956.

[2] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан, *Операторные методы в линейной гидродинамике*, М., "Наука", 1989, 416 с.

[3] Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д., *Эволюционные и спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости*, Труды Санкт-Петерб. матем. об-ва, 1998, 3-33.

[4] Крейн С.Г., *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, М.: Наука, 1967. - 464 с.

[5] Крейн С.Г., *Функциональный анализ. Серия "Справочная математическая библиотека."* - М.:Наука, 1972. - 544 с.

[6] Yakubov S., Yakubov Ya., *Differential-Operator Equations. Ordinary and Partial Differential Equations*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2000.

[7] Голдстейн Дж., *Полугруппы линейных операторов и их приложения*, Киев: Выща школа, 1989. - 348 с.