Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2(2003) 14–18

УДК 517.432

Н.И. Карпенко, П.В. Омельченко

СТРУКТУРА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В КОНЕЧНОМЕРНОМ КВАТЕРНИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Введение

Анализ последних достижений и публикаций свидетельствует об эффективности и целесообразности применения теории линейных операторов, действующих в пространствах над некоммутативными полями, в теории представлений, в нерелятивистской и релятивистской динамике, теории поля и других вопросах квантовой механики [1],[2],[3]. *Целью работы является* исследование структуры линейного оператора, действующего в конечномерном кватернионном векторном пространстве.

Пусть A – линейный оператор, действующий в конечномерном (левом) линейном пространстве $\mathbb{H}^n$ над телом кватернионов, т.е. $A(qx+py) = qAx + pAy$ для любых $p, q \in \mathbb{H}$ и любых векторов $x, y \in \mathbb{H}^n$. Пространство $\mathbb{H}^n$ можно рассматривать над полем комплексных чисел, обозначая его в этом случае $\mathbb{H}^{n,s}$. Оператор A, действующий в $\mathbb{H}^{n,s}$, называют симплектическим образом оператора A и обозначают A^s.

Выберем в пространстве $\mathbb{H}^n$ базис $e = \{e_1, e_2, ...e_n\}$ и обозначим вектор-строку координат вектора x в этом базисе x_e. Можно показать, что в данном базисе каждый линейный оператор A порождает матрицу $\mathcal{A} = \|a_{ij}\|, \quad a_{ij} \in \mathbb{H}$ таким образом, что $(Ax_e) = x_e\mathcal{A}$. Заметим, что в левом линейном пространстве $\mathbb{H}^n$ в общем случае не допускается столбцовая форма интерпретации действия линейного оператора через соответствующую матрицу.

Так же, как и в комплексных линейных пространствах, при выборе другого базиса $e' = \{e'_1, e'_2, ...e'_n\}$ в $\mathbb{H}^n$ линейному оператору будет соответствовать матрица $\mathcal{A}' = \mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}$, где $\mathcal{T}$ – матрица перехода от базиса e к базису e'. Естественно поставить задачу: найти наиболее простой представитель в классе подобных матриц, соответствующих оператору A. Такая задача рассматривалась в работах [1],[2]. А именно, пусть в базисе $e = \{e_1, e_2, ...e_n\}$ оператор A имеет матрицу $\mathcal{A} \in M[n, \mathbb{H}]$. Тогда эта матрица допускает разложение вида $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + j\mathcal{A}_2$, где $\mathcal{A}_i \in M[n, \mathbb{C}], \quad (i = 1, 2)$. Обозначим $\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & -\bar{\mathcal{A}}_2 \\ \mathcal{A}_2 & \bar{\mathcal{A}}_1 \end{bmatrix} \in M[2n, \mathbb{C}]$. Отображение $\varphi(\mathcal{A}) = \tilde{\mathcal{A}}$ есть изоморфное вложение кольца кватернионных матриц $M[n, \mathbb{H}]$ в кольцо комплексных матриц $M[n, \mathbb{C}]$. Используя жорданову форму матрицы $\tilde{\mathcal{A}}$, в работе [1] получена нормальная форма матриц из кольца $M[n, \mathbb{H}]$ с вещественными элементами.

В настоящей работе вопрос о подобии произвольной матрицы из $M[n,\mathbb{H}]$ матрице в жордановой форме с комплексными элементами на главной диагонали решается внутренними средствами соответствующего линейного оператора, причем, решение этой задачи строится на основе разложения пространства $\mathbb{H}^n$ в прямую сумму минимальных A-инвариантных циклических подпространств.

1. Нормальная форма матрицы линейного оператора.

Кватернион q называется собственным значением линейного оператора A, если $Ax = qx$ для некоторого ненулевого вектора x. Отметим, что в этом случае весь класс сопряженных элементов $K(q)$ мультипликативной группы $\mathbb{H}^*$ состоит из собственных значений оператора A. Класс $K(q)$ всегда содержит $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}, Im(\lambda) \geq 0$. Очевидно, что $\{\lambda, \bar{\lambda}\} \subset \sigma(A^s)$. Следовательно, спектр симплектического образа A^s симметричен относительно вещественной оси. Пусть $x \in E_\lambda(A^s)$, где $E_\lambda(A^s)$– комплексно-линейное собственное подпространство оператора A^s, соответствующее собственному значению λ. Тогда $A^s(jx) = jA^sx = j\lambda x = \bar{\lambda}(jx)$, следовательно $jx \in E_{\bar{\lambda}}(A^s)$. Поэтому

$$E_{\bar{\lambda}}(A^s) = JE_\lambda(A^s). \qquad (1)$$

Введём следующее обозначение: $F_\lambda = E_\lambda(A^s) \dotplus E_{\bar{\lambda}}(A^s)$. Заметим, что в случае $\lambda = \bar{\lambda}$, $F_\lambda = E_\lambda(A^s)$.

Предложение 1. *F_λ является кватернионно-линейным подпространством в $\mathbb{H}^n$, инвариантным относительно оператора A.*

Доведення. Пусть $z_1, z_2 \in F_\lambda$, $\quad z_i = x_i + jy_i, \quad x_i, y_i \in E_\lambda(A^s), (i = 1,2)$; $q = q_1 + q_2 j, p = p_1 + p_2 j \in \mathbb{H}$. Тогда, очевидно, $qz_1 + pz_2 = (q_1 + q_2 j)(x_1 + jy_1) + +(p_1 + p_2 j)(x_2 + jy_2) = (q_1x_1 - q_2y_1 + p_1x_2 - p_2y_2) + j(\bar{q}_1y_1 + \bar{q}_2x_1 + \bar{p}_1y_2 + \bar{p}_2x_2) \in F_\lambda$. Следовательно, F_λ является линейным подпространством над $\mathbb{H}$. Далее, пусть $z = x + jy \in F_\lambda$, где $x, y \in E_\lambda(A^s)$. Тогда $Az = Ax + jAy = \lambda x + j\lambda y \in F_\lambda$. Полученное включение позволяет сделать вывод об инвариантности подпространства F_λ относительно оператора A. □

Рассмотрим корневое подпространство S_λ оператора A^s. Аналогично можно показать, что $S_{\bar{\lambda}}(A^s) = JS_\lambda(A^s)$. Введем следующее обозначение: $T_\lambda = S_\lambda(A^s) + S_{\bar{\lambda}}(A^s)$.

Предложение 2. *T_λ является кватернионно-линейным подпространством в $\mathbb{H}^n$, инвариантным относительно оператора A.*

Доказательство этого утверждения аналогично приведенному выше.

Как известно, имеет место следующее разложение:
$\mathbb{H}^{n,s} = S_{\lambda_1}(A^s) \dotplus S_{\bar{\lambda}_1}(A^s) \dotplus S_{\lambda_2}(A^s) \dotplus S_{\bar{\lambda}_2}(A^s) \dotplus \ldots \dotplus S_{\lambda_n}(A^s) \dotplus S_{\bar{\lambda}_n}(A^s)$.
На основании предложения 2 приходим к выводу, что:
$\mathbb{H}^{n,s} = T_{\lambda_1} \dotplus T_{\lambda_2} \dotplus \ldots \dotplus T_{\lambda_n}$ и $A = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots \dotplus A_n$, где $A_i = A|T_{\lambda_i}, (i = 1, 2, ..., n)$.

Рассмотрим подробнее структуру подпространства $T_\lambda = S_\lambda + S_{\bar{\lambda}} = S_\lambda + JS_\lambda$. Несложно показать, что если $(x_1), (x_2), \ldots, (x_t)$ есть $(A^s - \lambda I)$-циклический базис в $S_\lambda(A^s)$, то векторы $(jx_1), (jx_2), \ldots, (jx_t)$ образуют $(A^s - \bar{\lambda}I)$ -циклический базис в пространстве $S_{\bar{\lambda}}(A^s)$.

Предложение 3. $\langle(x_k)\rangle_{\mathbb{H}} = \langle(x_k)\rangle_{\mathbb{C}} + \langle(jx_k)\rangle_{\mathbb{C}}$, *где* $\langle(x_k)\rangle_{\mathbb{H}(\mathbb{C})}$ *-линейная оболочка цепочки векторов* $(A-\lambda I)^{m_k-1}x_k$, $(A-\lambda I)^{m_k-2}x_k$, $\ldots$, $(A-\lambda I)x_k$, x_k *над* $\mathbb{H}$ *(или* $\mathbb{C}$ *соответственно),* $\langle(jx_k)\rangle_{\mathbb{C}}$ *-линейная оболочка цепочки векторов* $(A-\bar{\lambda}I)^{m_k-1}jx_k$, $(A-\bar{\lambda}I)^{m_k-2}jx_k$, $\ldots$, $(A-\bar{\lambda}I)jx_k$, jx_k *над* $\mathbb{C}$.

Доведення. Действительно, если $q \in \mathbb{H}$, $q = q_1 + q_2 j$; $q_1, q_2 \in \mathbb{C}$, то
$q(A-\lambda I)^l x_k = q_1(A-\lambda I)^l x_k + q_2(A-\bar{\lambda}I)^l jx_k \in \langle(x_k)\rangle_{\mathbb{C}} + \langle(jx_k)\rangle_{\mathbb{C}}$. □

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что векторы $(x_1), (x_2), \ldots, (x_t)$, образуют $(A-\lambda I)$ - циклический базис в кватернионном пространстве T_λ:

$$T_\lambda = \langle(x_1)\rangle_{\mathbb{H}} \dot{+} \langle(x_2)\rangle_{\mathbb{H}} \dot{+} \ldots \dot{+} \langle(x_t)\rangle_{\mathbb{H}},$$

причем, каждое из подпространств $\langle(x_k)\rangle_{\mathbb{H}}$ является A-инвариантным и неразложимым. Матрица оператора на этом подпространстве имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Следовательно, при специальным образом выбранном базисе матрица линейного оператора A, действующего в кватернионном конечномерном пространстве, имеет блочно-диагональный вид, на диагонали которой стоят клетки Жордана, соответствующие комплексным собственным значениям оператора A из верхней полуплоскости.

2. Спектральное разложение нормального оператора в конечномерном пространстве

Пусть в пространстве $\mathbb{H}^n$ введено скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Это отображение индуцирует скалярное произведение $(\cdot,\cdot) = Com\langle\cdot,\cdot\rangle$ в комплексном пространстве $\mathbb{H}^{n,s}$.

Определение 1. Линейный оператор А, действующий в $\mathbb{H}^n$, называется нормальным, если $AA^* = A^*A$.

Заметим, что симплектический образ также является нормальным оператором в $\mathbb{H}^{n,s}$, причем имеет место ортогональность собственных подпространств $E_\lambda(A^s)$ и $E_\mu(A^s)$ в $\mathbb{H}^{n,s}$ при $\lambda \neq \mu$, а также разложение

$$\mathbb{H}^{n,s} = E_{\lambda_1}(A^s) \oplus E_{\bar{\lambda}_1}(A^s) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_s}(A^s) \oplus E_{\bar{\lambda}_s}(A^s), \quad \lambda_k \in \mathbb{C}, Im(\lambda_k) \geq 0 \qquad (2)$$

Предложение 4. *Подпространства* F_λ *и* F_μ *пространства* $\mathbb{H}^n$ *ортогональны при* $\lambda \neq \mu, \lambda \neq \bar{\mu}$

Доведення. Пусть $x \in E_\lambda(A^s), y \in E_\mu(A^s)$.

Тогда $\lambda\langle x,y\rangle = \langle\lambda x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle x, \bar{\mu}y\rangle = \langle x,y\rangle\mu$.

Если $\langle x,y\rangle = \xi_1 + \xi_2 j$, $\xi_i \in \mathbb{C}, (i=1,2)$, то получаем: $\lambda\xi_1 + \lambda\xi_2 j = \xi_1\mu + \xi_2\bar{\mu}j$, откуда $\lambda\xi_1 = \xi_1\mu$, $\lambda\xi_2 = \xi_2\bar{\mu}$, т.к. $\lambda \neq \mu, \lambda \neq \bar{\mu}$, то $\xi_1 = \xi_2 = 0$, т.е. $\langle x,y\rangle = 0$. Следовательно, комплексно-линейное подпространства $E_\lambda(A^s)$ и $E_\mu(A^s)$ ортогональны в

$\mathbb{H}^n$. Аналогично можно показать ортогональность $E_\lambda(A^s)$ и $E_{\bar{\mu}}(A^s)$. Отсюда следует утверждение предложения 4. □

Таким образом имеет место следующее разложение:

$$\mathbb{H}^n = F_{\lambda_1} \oplus F_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus F_{\lambda_s} \qquad (3)$$

Определение 2. Оператор R, действующий в кватернионном пространстве $\mathbb{H}$ называется мнимым, если существует базис e_k в $\mathbb{H}$, такой, что $Re_k = ie_k$ или $Re_k = 0, \quad k = (\overline{1,r})$.

Зададим оператор R на $\mathbb{H}^n$ следующим образом: пусть $x \in \mathbb{H}^n, x = \sum_{k=1}^s x_k$, где $x_k \in F_{\lambda_k}$ и $x_k = y_k + jz_k$; $\quad y_k, z_k \in E_{\lambda_k}(A)$. Тогда $Rx = \sum_{k=1}^s i(y_k - jz_k)$. С учетом равенств (1) и (3) нетрудно показать, что объединение базисов комплексных пространств $E_{\lambda_k}(A), (k = \overline{1,s})$ дает базис кватернионного пространства $\mathbb{H}^n$. Причем на этих векторах действие оператора R сводится к умножению на i. Следовательно, построенный оператор R является мнимым.

Обозначим через P_k оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{H}^n$ на F_{λ_k}. Очевидно, что семейство операторов P_k обладает следующими свойствами:

$$1) \sum_{k=1}^n P_k = I;$$

$$2) P_i P_j = 0 \qquad (i \neq j).$$

Это дает основание назвать такую совокупность операторов *разложением единицы*, соответствующим данному нормальному оператору.

Рассмотрим действие нормального оператора A на вектор $x \in \mathbb{H}^n$:
$Ax = \sum_{k=1}^s Ax_k = \sum_{k=1}^s A(y_k + jz_k) = \sum_{k=1}^s(\lambda_k y_k + \bar{\lambda} j z_k) = \sum_{k=1}^s(\operatorname{Re}\lambda_k)(y_k + jz_k) +$
$+(\operatorname{Im}\lambda_k)i(y_k - jz_k) = \sum_{k=1}^s(\operatorname{Re}\lambda_k)x_k + (\operatorname{Im}\lambda_k)Rx_k = \sum_{k=1}^s((\operatorname{Re}\lambda_k) + (\operatorname{Im}\lambda_k)R)P_k x.$
Следовательно,

$$A = \sum_{k=1}^s((\operatorname{Re}\lambda_k) + (\operatorname{Im}\lambda_k)R)P_k; \quad \text{где}\lambda_k \in \sigma(A) \cap \mathbb{C}, \quad \operatorname{Im}(\lambda_k) \geq 0 \qquad (5)$$

Это разложение является аналогом спектрального разложения нормального оператора, действующего в унитарном пространстве. Имеет место и обратное утверждение: если оператор A определяется равенством (5) для некоторого разложения единицы $\{P_k\}_{k=1}^n$ и мнимого оператора R, то этот оператор является нормальным.

Заключение

Таким образом, настоящая работа решает вопрос о разложении линейного над телом $\mathbb{H}$ оператора в прямую сумму неразложимых операторов. Для таких операторов получен аналог разложения комплексного линейного пространства в прямую сумму корневых подпространств линейного оператора, а также указан метод построения минимальных инвариантных циклических подпространств. Показано, что при соответствующем выборе базиса матрица такого оператора имеет жорданову нормальную форму. Эти же методы позволяют построить ортогональное разложение единицы для нормального оператора и его спектральное разложение.

Аналогичные вопросы могут быть рассмотрены для комплексно-линейных и вещественно-линейных операторов, действующих в конечномерном кватернионном пространстве.

Список литературы

[1] De Leo S.,Scolarici G.Right eigenvalue equation in quaternionic quantum mechanics // Journal Phisics. A33. - 2000. - P.2971-2995.

[2] De Leo S.,Scolarici G.,Solombino L. Quaternionic eigenvalue problem // Journal of math. phisics. Bd.43. - 2002. - Vol.11. - P.5815-5829.

[3] De Leo S. Quaternionic Lorentz group and Dirac equation // Foundations of Phisics Letters. - 2001. - Vol.14,№1. - P.37-50.

[4] Huang L. On two questions about quaternion matrices // Linear Algebra and its Appl. 318. - 2000. - P.79-86.

[5] Huang L.,So W. On left eigenvalues of a quaternion matrix // Linear Algebra and its Appl. 323. - 2001. - P.105-116.

[6] Viswanath K. Normal operators on quaternionic Hilbert spaces // Trans. Amer. Math. - 1971. - Vol.162. - P.337-350.