Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2003) 176 - 181

УДК 517.95

ПОЛНОТА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. С. Рыхлов
Саратовский государственный университет,
Саратов, Россия

Исследуется вопрос о полноте в пространстве $L_2[0,1]$ собственных и присоединенных функций простейшего обыкновенного дифференциального оператора n-го порядка, порожденного дифференциальным выражением $y^{(n)}$ и двухточечными двучленными граничными условиями $\alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0)+\beta_\nu y^{(\nu-1)}(1)=0$, $\nu=\overline{1,n}$.

Ключевые слова: полнота, собственные и присоединенные функции, обыкновенный дифференциальный оператор, нерегулярные граничные условия

1. Постановка задачи

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y):=y^{(n)}(x),\quad x\in[0,1],$$

и двухточечными двучленными граничными условиями

$$U_\nu(y):=\alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0)+\beta_\nu y^{(\nu-1)}(1)=0,\quad \nu=\overline{1,n},\tag{1}$$

где $\alpha_\nu,\beta_\nu\in\mathbb{C}$ и $|\alpha_\nu|+|\beta_\nu|>0$, $\nu=\overline{1,n}$.

Требуется выяснить, при каких значениях параметров α_ν,β_ν система собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) оператора L полна в пространстве $L_2[0,1]$. Некоторым результатам, полученным при решении этой задачи, и посвящена данная публикация. Краткую историю вопроса можно найти, например, в [1].

2. Вспомогательные результаты

Пусть $\omega_j=\exp((2j-1)\pi i/n)$, $j=\overline{1,n}$ - корни n-й степени из -1, $\lambda=-\rho^n$. Тогда, очевидно, функции $y_j(x,\rho)=\exp(\rho\omega_j x)$, $j=\overline{1,n}$, образуют фундаментальную систему решений уравнения $l(y)-\lambda y=0$.

Положим $u_{\nu j}:=U_\nu(y_j)=\rho^{n-1}(v_{\nu j}+e^{\rho\omega_j}w_{\nu j})$, где $v_{\nu j}=\alpha_\nu\omega_j^{\nu-1}$, $w_{\nu j}=\beta_\nu\omega_j^{\nu-1}$, и обозначим

$$V_j:=(v_{1j},v_{2j},\dots,v_{nj})^T,\quad W_j:=(w_{1j},w_{2j},\dots,w_{nj})^T,$$

$$\Delta_0:=\det(V_1V_2\dots V_n)=:|V_1V_2\dots V_n|,\ \Delta_1:=|W_1V_2\dots V_n|,\ \dots,\ \Delta_n:=|V_1\dots V_{n-1}W_n|,$$

$$\Delta_{12}:=|W_1W_2V_3\dots V_n|,\ \Delta_{23}:=|V_1W_2W_3V_4\dots V_n|,\ \dots,\ \Delta_{1n}:=|W_1V_2\dots V_{n-1}W_n|,$$

$$\dots,\ \Delta_{12\dots n}:=|W_1W_2\dots W_n|.$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Обозначим столбцы Ω через Y_j, а столбцы Ω^T через Z_j, т. е.

$$\Omega = (Y_1 Y_2 \dots Y_n), \qquad \Omega^T = (Z_1 Z_2 \dots Z_n).$$

Очевидно, $\theta = \det \Omega = \det \Omega^T \neq 0$.

Положим $\alpha := (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)^T$, $\beta := (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)^T$ и разложим эти векторы по базису $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, т. е. представим их в виде

$$\alpha = \Omega^T \hat{\alpha}, \qquad \beta = \Omega^T \hat{\beta}, \tag{3}$$

где $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_n)^T = \left(\Omega^T\right)^{-1} \alpha$, $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 \dots \hat{\beta}_n)^T = \left(\Omega^T\right)^{-1} \beta$.

Векторы V_j и W_j, $j = \overline{1,n}$, разложим по другому базису, а именно, по базису $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, и пусть компоненты векторов $\hat{V}_j$ и $\hat{W}_j$ соответственно есть коэффициенты разложения, т. е.

$$V_j = \Omega \hat{V}_j, \qquad W_j = \Omega \hat{W}_j.$$

Оказывается, что векторы $\hat{V}_j$ $(\hat{W}_j)$, $j = \overline{1,n}$, получаются друг из друга в результате циклического сдвига.

Лемма 1. *Обозначим* $a_k := \hat{\alpha}_k \omega^{k-1}$, $b_k := \hat{\beta}_k \omega^{k-1}$, $k = \overline{1,n}$, *где* $\omega = \omega_1$. *Тогда имеют место формулы*

$$\hat{V}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \hat{V}_2 = \begin{pmatrix} a_n \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \hat{V}_n = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \\ a_1 \end{pmatrix};$$

$$\hat{W}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \hat{W}_2 = \begin{pmatrix} b_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \hat{W}_n = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

Будем обозначать далее через $\hat{\Delta}_{jk\dots l}$ определители, аналогичные определителям $\hat{\Delta}_{jk\dots l}$, в которых вместо столбцов V_j, W_j используются столбцы $\hat{V}_j$, $\hat{W}_j$. Очевидно, $\Delta_{jk\dots l} = \theta \hat{\Delta}_{jk\dots l}$, т. е. определители $\Delta_{jk\dots l}$ и $\hat{\Delta}_{jk\dots l}$ обращаются в нуль или отличны от нуля одновременно.

Отметим на плоскости точки 0, ω_j, $\omega_j + \omega_k$ $(j \neq k)$, $\omega_j + \omega_k + \omega_l$ $(j \neq k \neq l \neq j)$, $\dots$, $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n (= 0)$. Пусть M_0 есть выпуклая оболочка этих точек.

Так как рассмотрение случаев четного и нечетного n существенно отличается, то далее будем рассматривать только случай $n = 2m + 1$, i,.e $m \in \mathbb{N}$ и $m \geq 2$.

Легко установить, что M_0 является правильным $2n$-угольником с центром в начале координат и с вершинами в точках

$$\sigma_{01}^0 = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m, \quad \sigma_{02}^0 = \omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_{m+1}, \quad \dots, \quad \sigma_{0n}^0 = \omega_n + \omega_1 + \dots + \omega_{m-1},$$
$$\sigma_{01}^1 = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{m+1}, \quad \sigma_{02}^1 = \omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_{m+2}, \quad \dots, \quad \sigma_{0n}^1 = \omega_n + \omega_1 + \dots + \omega_m.$$

Обозначим через M_0^0 и M_0^1 выпуклые оболочки точек σ_{0j}^0, $j = \overline{1,n}$ и σ_{0j}^1, $j = \overline{1,n}$ соответственно. Очевидно, M_0^0 и M_0^1 есть правильные n-угольники с центром в начале координат и с вершинами в точках σ_{0j}^0, $j = \overline{1,n}$ и σ_{0j}^1, $j = \overline{1,n}$ соответственно, которые перемежаются друг с другом.

Если удалить вершины многоугольника M_0 и обозначить через M_1 выпуклую оболочку оставшихся точек, то легко заметить, что многоугольник M_1 будет также, как и M_0, правильным $2n$-угольником с центром в начале координат и с вершинами в точках

$$\begin{array}{llll} \sigma_{11}^0 = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{m-1}, & \sigma_{12}^0 = \omega_2 + \omega_3 + \cdots + \omega_m, & \ldots, & \sigma_{1n}^0 = \omega_n + \omega_1 + \cdots + \omega_{m-2}, \\ \sigma_{11}^1 = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{m+2}, & \sigma_{12}^1 = \omega_2 + \omega_3 + \cdots + \omega_{m+3}; & \ldots, & \sigma_{1n}^1 = \omega_n + \omega_1 + \cdots + \omega_{m+1}, \end{array}$$

которые лежат на тех же самых лучах, исходящих из начала координат, что и вершины многоугольника M_0.

Обозначим через M_1^0 и M_1^1 выпуклые оболочки точек σ_{1j}^0, $j = \overline{1,n}$ и σ_{1j}^1, $j = \overline{1,n}$ соответственно. Очевидно, M_1^0 и M_1^1 есть правильные n-угольники с центром в начале координат и с вершинами в точках σ_{1j}^0, $j = \overline{1,n}$ и σ_{1j}^1, $j = \overline{1,n}$ соответственно, которые также перемежаются друг с другом.

Нетрудно показать, что многоугольник M_1 лежит строго внутри многоугольников M_0, M_0^0 и M_0^1.

3. Характеристический определитель

Характеристический определитель оператора L имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(\rho) &= \det(u_{\nu j})_{\nu,j=1}^n = \\ &= \rho^{1+2+\cdots+n-1} \left| V_1 + e^{\rho\omega_1} W_1, V_2 + e^{\rho\omega_2} W_2, \ldots, V_n + e^{\rho\omega_n} W_n \right| = \\ &= \rho^{\frac{n(n-1)}{2}} \{ \Delta_0 + [\Delta_1 e^{\rho\omega_1} + \Delta_2 e^{\rho\omega_2} + \cdots + \Delta_n e^{\rho\omega_n}] + \\ &+ [\Delta_{12} e^{\rho(\omega_1+\omega_2)} + \Delta_{23} e^{\rho(\omega_2+\omega_3)} + \cdots + \Delta_{1n} e^{\rho(\omega_n+\omega_1)}] + \\ &+ [\Delta_{13} e^{\rho(\omega_1+\omega_3)} + \Delta_{24} e^{\rho(\omega_2+\omega_4)} + \cdots + \Delta_{2n} e^{\rho(\omega_n+\omega_2)}] + \cdots + \\ &+ [\Delta_{123} e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3)} + \Delta_{234} e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + \cdots + \Delta_{12n} e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_n)}] + \cdots + \\ &+ [\Delta_{12\ldots n-1} e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_{n-1})} + \Delta_{23\ldots n} e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\cdots+\omega_n)} + \cdots + \\ &+ \Delta_{12\ldots n-2n} e^{\rho(\omega_n+\omega_1+\cdots+\omega_{n-2})}] + \Delta_{12\ldots n} \}. \end{aligned} \tag{4}$$

Оказывается, что коэффициенты при экспонентах внутри квадратных скобок в (4) совпадают.

Лемма 2. *Справедливы следующие равенства*

$$\begin{array}{lllllllllll} \Delta_1 & = & \Delta_2 & = & \ldots & = & \Delta_{n-2} & = & \Delta_{n-1} & = & \Delta_n, \\ \Delta_{12} & = & \Delta_{23} & = & \ldots & = & \Delta_{n-2n-1} & = & \Delta_{n-1n} & = & \Delta_{1n}, \\ \Delta_{13} & = & \Delta_{24} & = & \ldots & = & \Delta_{n-2n} & = & \Delta_{1n-1} & = & \Delta_{2n}, \\ \ldots & & & & & & & & & & \\ \Delta_{123} & = & \Delta_{234} & = & \ldots & = & \Delta_{n-2n-1n} & = & \Delta_{1n-1n} & = & \Delta_{12n}, \\ \ldots & & & & & & & & & & \\ \Delta_{12\ldots n-1} & = & \Delta_{23\ldots n} & = & \ldots & = & \Delta_{12\ldots n-4n-2n-1n} & = & \Delta_{12\ldots n-3n-1n} & = & \Delta_{12\ldots n-2n}. \end{array}$$

На основании этой леммы для $\Delta(\rho)$ можно получить следующее представление, в котором слагаемые расположены группами по росту в порядке его невозрастания при $|\rho| \to \infty$ (для дальнейшего изложения достаточно выписать подробно несколько первых групп слагаемых):

$$\begin{aligned}\Delta(\rho) = \rho^{\frac{n(n-1)}{2}} \{\Delta_{12\ldots m} \left[e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_m)} + \cdots + e^{\rho(\omega_n+\omega_1+\cdots+\omega_{m-1})}\right] + \\ +\Delta_{12\ldots m+1} \left[e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_{m+1})} + \cdots + e^{\rho(\omega_n+\omega_1+\cdots+\omega_m)}\right] + \\ +\Delta_{12\ldots m-1} \left[e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_{m-1})} + \cdots + e^{\rho(\omega_n+\omega_1+\cdots+\omega_{m-2})}\right] + \\ +\Delta_{12\ldots m+2} \left[e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_{m+2})} + \cdots + e^{\rho(\omega_n+\omega_1+\cdots+\omega_{m+1})}\right] + \\ + \cdots + \Delta_0 + \Delta_{12\ldots n}\}.\end{aligned} \tag{5}$$

4. Начальная геометрическая классификация дифференциальных операторов

Некоторые коэффициенты, стоящие перед квадратными скобками в (5), могут равняться нулю. Отметим на плоскости точки ω_j, $\omega_j + \omega_k$, $\omega_j + \omega_k + \omega_l$, $\ldots$, соответствующие коэффициентам при ρ в показателях тех экспонент, которые реально содержаться в $\Delta(\rho)$. Пусть M_Δ есть выпуклая оболочка отмеченных точек. Очевидно, M_Δ является многоугольником, симметричным относительно начала координат и инвариантным относительно поворота на угол $2\pi/n$. Вид этого многоугольника характеризует степень вырожденности характеристического определителя.

Выделим первые четыре случая в порядке усиления вырожденности:

(I) $\Delta_{12\ldots m} \neq 0 \wedge \Delta_{12\ldots m+1} \neq 0$. Здесь $M_\Delta = M_0$ и в этом случае оператор L регулярен по Биркгофу [2], с. 66-67. Множество таких операторов будем обозначать через NR_0.

(II) $\Delta_{12\ldots m} \neq 0 \wedge \Delta_{12\ldots m+1} = 0$ или $\Delta_{12\ldots m} = 0 \wedge \Delta_{12\ldots m+1} \neq 0$. Здесь или $M_\Delta = M_0^0$ (в первом подслучае), или $M_\Delta = M_0^1$ (во втором подслучае). При этих условиях оператор L является слабо нерегулярным или нормальным по терминологии [3]. Множества таких операторов будем обозначать через NR_0^0 и NR_0^1 соответственно. При $n = 3$ операторы из множества NR_0^0 изучались в [4].

(III) $\Delta_{12\ldots m} = \Delta_{12\ldots m+1} = 0$ и $\Delta_{12\ldots m-1} \neq 0 \wedge \Delta_{12\ldots m+2} \neq 0$. Этот случай и последующие возможны только при $n \geq 5$ $(m \geq 2)$. Здесь $M_\Delta = M_1$ и оператор L является сильно нерегулярным. Множество таких операторов будем обобзначать через NR_1. При $n = 5$ операторы из этого множества изучались в [1].

(IV) $\Delta_{12\ldots m} = \Delta_{12\ldots m+1} = 0$ и либо $\Delta_{12\ldots m-1} \neq 0 \wedge \Delta_{12\ldots m+2} = 0$, либо $\Delta_{12\ldots m-1} = 0 \wedge \Delta_{12\ldots m+2} \neq 0$. Здесь или $M_\Delta = M_1^0$ (в первом подслучае), или $M_\Delta = M_1^1$ (во втором подслучае). Множества таких операторов будем обозначать через NR_1^0 и NR_1^1 соответственно. При $n = 5$ операторы из этого множества также изучались в [1].

5. Аналитическое описание некоторых классов нерегулярных операторов. Теорема полноты

Далее будем рассматривать только случай $\beta_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1,n}$. В этом случае, не нарушая общности, можно считать $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 1$. С учетом (2) и (3) отсюда следует, что $\hat\beta_1 = 1$, $\hat\beta_2 = \hat\beta_3 = \cdots = \hat\beta_n = 0$, т. е. $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = \cdots = b_n = 0$. Следовательно, векторы $\hat W_1, \hat W_2, \ldots, \hat W_n$ на основании Леммы 1 образуют единичную матрицу. Отсюда, в частности, следует, что

$$\hat\Delta_{12\ldots k} := \begin{vmatrix} a_1 & a_n & \cdots & a_{k+3} & a_{k+2} \\ a_2 & a_1 & \cdots & a_{k+4} & a_{k+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-k-1} & a_{n-k-2} & \cdots & a_1 & a_n \\ a_{n-k} & a_{n-k-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{6}$$

Таким образом, для выяснения того, является ли оператор L регулярным или нерегулярным и какого типа нерегулярность (см. случаи **(II)**–**(IV)**) можно обойтись вычислением определителей $\hat{\Delta}_{12\ldots m}$, $\hat{\Delta}_{12\ldots m+1}$, $\hat{\Delta}_{12\ldots m-1}$, $\hat{\Delta}_{12\ldots m+2}$ типа (6), которые имеют значительно меньшие порядки, чем исходные определители $\Delta_{12\ldots m}$, $\Delta_{12\ldots m+1}$, $\Delta_{12\ldots m-1}$, $\Delta_{12\ldots m+2}$. Более того, специфическая структура определителей типа (6) позволяет дать достаточно простое аналитическое описание операторов из множеств NR_0^1, NR_1, NR_1^1.

Обозначим для краткости

$$\begin{array}{lcllllll}
\theta_1(s_1,\ldots,s_k) & = & a_1 & - \; s_1 a_n & - \; s_2 a_{n-1} & - \; \ldots & - \; s_k a_{2m+2-k}, \\
\theta_2(s_1,\ldots,s_k) & = & a_2 & - \; s_1 a_1 & - \; s_2 a_n & - \; \ldots & - \; s_k a_{2m+3-k}, \\
\ldots & & & & & & \\
\theta_n(s_1,\ldots,s_k) & = & a_n & - \; s_1 a_{n-1} & - \; s_2 a_{n-2} & - \; \ldots & - \; s_k a_{n-k},
\end{array}$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n-1}$.

Теорема 1. $L \in NR_0^1$ *тогда и только тогда, когда* $\hat{\Delta}_{12\ldots m+1} \neq 0$ *и при некоторых значениях* $s_1, s_2, \ldots, s_m$, *где* $s_m \neq 0$, *выполняется условие*

(i) $\theta_1(s_1,\ldots,s_m) = \theta_2(s_1,\ldots,s_m) = \cdots = \theta_{m+1}(s_1,\ldots,s_m) = 0.$

Теорема 2. $L \in NR_1$ *тогда и только тогда, когда* $\hat{\Delta}_{12\ldots m+2} \neq 0$ *и при некоторых значениях* $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$, *где* $s_{m-1} \neq 0$, *выполняется какое-либо одно из следующих условий:*

(i) $\theta_1(s_1,\ldots,s_{m-1}) = \theta_2(s_1,\ldots,s_{m-1}) = \cdots = \theta_{m+1}(s_1,\ldots,s_{m-1}) = 0,$
$\theta_{m+2}(s_1,\ldots,s_{m-1}) \neq 0,\ \theta_n(s_1,\ldots,s_{m-1}) \neq 0;$

(ii) $\theta_n(s_1,\ldots,s_{m-1}) = \theta_1(s_1,\ldots,s_{m-1}) = \cdots = \theta_m(s_1,\ldots,s_{m-1}) = 0,$
$\theta_{m+1}(s_1,\ldots,s_{m-1}) \neq 0,\ \theta_{n-1}(s_1,\ldots,s_{m-1}) \neq 0.$

Теорема 3. $L \in NR_1^1$ *тогда и только тогда, когда* $\hat{\Delta}_{12\ldots m+2} \neq 0$ *и при некоторых значениях* $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$, *где* $s_{m-1} \neq 0$, *выполняется какое-либо одно из следующих условий:*

(i) $\theta_1(s_1,\ldots,s_{m-1}) = \theta_2(s_1,\ldots,s_{m-1}) = \cdots = \theta_{m+2}(s_1,\ldots,s_{m-1}) = 0,$

(ii) $\theta_n(s_1,\ldots,s_{m-1}) = \theta_1(s_1,\ldots,s_{m-1}) = \cdots = \theta_{m+1}(s_1,\ldots,s_{m-1}) = 0,$

(iii) $\theta_{n-1}(s_1,\ldots,s_{m-1}) = \theta_n(s_1,\ldots,s_{m-1}) = \cdots = \theta_m(s_1,\ldots,s_{m-1}) = 0.$

Для операторов из множества NR_0 полнота системы с.п.ф. в пространстве $L_2[0,1]$ хорошо известна. Из [3] следует, что этот факт имеет место и для операторов из множеств NR_0^0 и NR_0^1. Оказывается полноту системы с.п.ф. в пространстве $L_2[0,1]$ можно установить также и для операторов из множеств NR_1, NR_1^0, NR_1^1.

Теорема 4. *Если* $L \in NR_1 \cup NR_1^0 \cup NR_1^1$, *то система с.п.ф. оператора* L *полна в пространстве* $L_2[0,1]$.

Доказательство этой теоремы достаточно громоздкое и выходит за рамки данной публикации. Отметим лишь, что при доказательстве применяется метод порождающих функций [5] и схема, использованная в [1].

Список литературы

[1] Рыхлов В. С. *Кратная полнота собственных функций простейшего пучка 5-го порядка* // Spectral and evolution problems: Proceedings of the Twelfth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH-XII), Sept. 18-29, 2001, Sevastopol, Laspi. Vol.12. – Simferopol: Taurida National V.Vernadsky University, Black Sea Branch of Moscow State University, Crimean Scientific Center of Ukrainian NAS, Crimean Academy of Sciences, Crimean Mathematical Foundation, 2002, c. 42–51.

[2] Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1968. – 528 с.

[3] Шкаликов А. А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Труды семинара имени И.Г. Петровского. Вып. 9. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983, с. 190–229.

[4] Хромов А. П. *Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка* // В сб.: Исследования по теории операторов. – Уфа, 1988, с. 182–193.

[5] Rykhlov V. S. *On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators* // Spectral and Evolutional Problems: Proceedings of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 7. – Simferopol: Simferopol State University, 1997, p. 70–73.

В.С. Рыхлов, Механико-математический факультет, Саратовский государственный университет, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410026, Россия

*E-mail:*RykhlovVS@info.sgu.ru

V. S. Rykhlov *Completeness of the eigenfunctions of some classes of nonregular differential operators*

In the paper we investigate a question of the eigen- and associated functions completeness in the space $L_2[0,1]$ for the simliest ordinary differential operator of the n-th order generated by the differential expression $y^{(n)}$ and the boundary conditions $\alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \beta_\nu y^{(\nu-1)}(1) = 0$, $\nu = \overline{1,n}$.