Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2003) 169 - 175

УДК 517.95

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И СЛОЕНИЯ, ПОРОЖДАЕМЫЕ НЕЯВНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

А.О. Ремизов
Московский государственный университет,
Москва, Россия

В работе исследуются векторные поля специального вида, возникающие при изучении неявных дифференциальных уравнений (уравнений, не разрешенных относительно производных). Особые точки таких полей не изолированы, а образуют многообразие W^c коразмерности два в фазовом пространстве. При малых возмущениях исходного неявного уравнения многообразие W^c не исчезает и не вырождается, а лишь деформируется. Получены результаты о структуре инвариантных многообразий таких полей, а также гладкие нормальные формы.

Ключевые слова: векторные поля, особые точки, диффеоморфизмы, гладкая эквивалентность, резонансы, первые интегралы, нормальные формы, инвариантные мноообразия, слоения.

1. Введение. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производных, называемые также неявными дифференциальными уравнениями (НДУ), известны давно и возникают во многих прикладных задачах. Проблема исследования особых точек НДУ возникла еще в позапрошлом веке, король Швеции и Норвегии Оскар II включил ее в список из четырех вопросов на премию 1885 года [1]. Однако для достаточно полного решения этой проблемы потребовалось около ста лет. Речь идет, разумеется, об *одном* неявном уравнении с *одной* фазовой переменной $F(t,x,p) = 0$, где $p = dx/dt$.

В 1932 г. итальянский математик Чибрарио (Maria Cinquini-Cibrario) опубликовала работу [13], где была получена нормальная форма $p^2 = t$ уравнения $F(t,x,p) = 0$ в окрестности типичной (*регулярной*) особой точки. Однако этот результат остался в то время, по-видимому, малоизвестным, так как нормальная форма $p^2 = t$ была позже заново найдена Л. Дара (L. Dara) и Ю.А. Бродским. Этот результат (часто называемый теоремой Чибрарио) ныне стал классическим и приводится в [1] - [7].

В 1959 г. в работе А.В. Пхакадзе и А.А. Шестакова [11] было описано типичное поведение интегральных кривых уравнения $F(t,x,p) = 0$ в окрестности *нерегулярной* особой точки. В 1971 г. физики А.Д. Пилия и В.И. Федоров [12] получили аналогичные результаты, рассматривая особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме. С этими же особенностями столкнулся и Ф. Такенс (Floris Takens) при изучении уравнений релаксационного типа [15].

В 1975 г. Л. Дара в [14] показал, что уравнение $F(t,x,p) = 0$ для функции F общего положения может иметь только пять типов *нерегулярных* особых точек: *хорошо сложенное седло*, *хорошо сложенный узел*, *хорошо сложенный фокус*, *эллиптическая сборка*, *гиперболическая сборка*. Первые три особенностей называются *хорошо сложенными*, а две последние - *собранными*. Л. Дара сформулировал гипотезу, что в окрестности хорошо сложенной особой точки уравнение $F(t,x,p) = 0$ топологически эквивалентно нормальной форме $(p^2 + \gamma t^2)/2 = x$, параметр $\gamma < 0$ для седла, $0 < \gamma < 1/4$ для узла, $\gamma > 1/4$ для фокуса; а в окрестности собранной особой точки – уравнению $p^3 - xp = t$ для эллиптической сборки и $p^3 + xp = t$ для гиперболической сборки.

В 1985 г. А.А. Давыдов в работе [6] доказал, что гипотеза Дара верна для хорошо сложенных собых точек, но не верна для собранных. В [6] были найдены нормальные формы НДУ общего положения в окрестности нерегулярной особой точки, для которой дискриминантная кривая гладкая. Так, в окрестности хорошо сложенной особой точки уравнение $F(t,x,p) = 0$ локальным диффеоморфизмом плоскости (t,x) приводится к нормальной форме $(p+kt)^2 = x$, где параметр $k < 0$ для сложенного седла, $0 < k < 1/8$ для сложенного узла, $k > 1/8$ для сложенного фокуса.[4] Топологическая эквивалентность убивает параметр k в каждой из трех нормальных форм. Таким образом, хорошо сложенные особые точки имеют относительно диффеоморфизмов один модуль, а относительно гомеоморфизмов структурно устойчивы. Топологические нормальные формы собранных особых точек содержат функциональные инварианты.

В 1994 г. была опубликована монография А.А. Давыдова [7], содержащая все результаты, полученные автором ранее, и некоторые новые. В 1995 и 1996 гг. А.А. Давыдов (с соавторами) опубликовал работы [8] и [9], где были получены новые результаты о нормальных формах уравнения $F(t,x,p) = 0$ в окрестности сложенных особых точек. Таким образом, проблему исследования особых точек уравнения $F(t,x,p) = 0$, предложенную королем Швеции и Норвегии в 1885 году, в настоящее время можно считать решенной. Отметим, что эта проблема исследовалась также и другими авторами, см. библиографию в [6], [7], [9] и [10]. Историю вопроса и краткий обзор результатов можно найти в [6] и [9].

В работах Л. Дара, Ф. Такенса и Р. Тома (René Thom) [14] – [16] был открыт новый, чрезвычайно эффектный подход к исследованию НДУ – *поднятие* многозначного поля направлений НДУ на задаваемую им поверхность в пространстве (t,x,p), где $p = dx/dt$. В результате полученное *поднятое поле* оказывается однозначным и гладким, сложенные особые точки (узлы, седла и фокусы) превращаются при этом в обычные узлы, седла и фокусы. Этот подход (который можно сравнить с введением римановой поверхности многозначной функции комплексного переменного) был затем неоднократно использован в работах В.И. Арнольда, А.А. Давыдова и других. Обобщение этого метода на случай системы НДУ произвольной размерности будет использовано и в настоящей работе.

Данная статья содержит изложение некоторых результатов, полученных автором в [18] – [22]. Отметим также работу [17] на близкую тему.

2. Построение поднятого поля. Рассмотрим систему НДУ

$$\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{p} = d\boldsymbol{x}/dt, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n)$, $\boldsymbol{p} = (p_1,\dots,p_n)$, $\boldsymbol{F} = (F_1,\dots,F_n)$ – n-мерные векторы. Функция $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ C^{k+1}-гладкая, $k \geq 1$. В общем случае уравнение (1) определяет в $(2n+1)$-мерном пространстве с координатами $(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ гладкое многообразие размерности $n+1$, а на нем задает так называемое *поднятое* векторное поле (поле направлений). Это поле определяется как пересечение касательного пространства к многообразию $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ и *контактного* пространства, задаваемого соотношением $\boldsymbol{p} = d\boldsymbol{x}/dt$.

Касательное пространство определяется как пересечение ядер 1-форм

$$\frac{\partial F^i}{\partial t}dt + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F^i}{\partial x^j}dx^j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F^i}{\partial p^j}dp^j = 0, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

[4] Нормальная форма Давыдова приводится к нормальной форме Дара при помощи замены $\tilde{x} = 2(x + kt^2/2)$, при этом $\gamma = 2k$.

а контактное пространство – как пересечение ядер 1-форм $dx^i - p^i dt = 0$, $i = \overline{1,n}$. Подставляя последние соотношения в (2), получаем линейную систему

$$\left(\frac{\partial F^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F^i}{\partial x^j} p^j\right) dt + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F^i}{\partial p^j} dp^j = 0, \qquad i = \overline{1,n} \tag{3}$$

относительно неизвестных $dt, dp^1, \ldots, dp^n$. Обозначим через A матрицу (3). Если $rangA = n$, то касательное и контактное пространства трансверсальны, и их пересечение определяет поле направлений (в противном случае поле направлений не определено).

Особыми точками уравнения (1) называются такие точки многообразия $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$, в которых матрица $\partial \boldsymbol{F}/\partial \boldsymbol{p}$ вырождена. Очевидно, что из условия $rangA < n$ следует $\det(\partial \boldsymbol{F}/\partial \boldsymbol{p}) = 0$. Поэтому поле направлений может быть не определено только в особых точках уравнения (1). Обратное, разумеется, не верно. Особая точка уравнения (1) называется *правильной*, если в ней $rangA = n$ и, следовательно, поле направлений определено. Особая точка называется *неправильной*, если в ней $rangA < n$.

Построенное поле направлений локально может быть нормировано и заменено векторным полем $\boldsymbol{v}$, которое обращается в нуль в точках касания касательного и контактного пространств – неправильных особых точках уравнения (1). Это векторное поле называется *поднятым*, оно имеет вид

$$\boldsymbol{v} = v_t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_{x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n} v_{p^i} \frac{\partial}{\partial p^i},$$

компоненты v_t, v_{x^i}, v_{p^i} выражаются через миноры матрицы A следующим образом:

$$v_t = \Delta_1, \quad v_{p^i} = (-1)^i \Delta_{i+1}, \quad v_{x^i} = p^i v_t, \quad i = \overline{1,n},$$

где Δ_i – определитель матрицы, полученной из A при отбрасывании i-го столбца.

Для уравнения (1) общего положения в случае $n > 1$ множество особых точек W^c – стратифицированное многообразие со стратами $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$, где $\mathfrak{S}_k$ определяется условием $rangA = n - k$ и имеет коразмерность $k(k+1)$.[5] Типичные особые точки поля $\boldsymbol{v}$ – это точки, принадлежащие страту $\mathfrak{S}_1$ ($rangA = n - 1$) коразмерности 2. Особые точки, в которых $rangA < n - 1$, соответствуют вырождению гораздо более высокой коразмерности. Согласно общей идеологии теории особенностей, при исследовании уравнения (1) общего положения или семейства таких уравнений, зависящего от малого числа параметров, случай $rangA < n - 1$ не встречается: уже для вырождения $rangA = n - 2$ коразмерность равна 6.

Если для исходного уравнения (1) размерность $n = 1$, то построенное векторное поле $\boldsymbol{v}$, определенное на двумерной поверхности $F = 0$, в общем случае имеет лишь изолированные невырожденные особые точки: узел, седло или фокус.

Если же размерность $n > 1$, то компоненты v_t, v_{x^i}, v_{p^i} поднятого поля оказываются функционально зависимыми. Точнее, в общем случае в особой точке $rangA = n - 1$, и среди функций v_t, v_{x^i}, v_{p^i} имеются *две независимые* (обозначим их v и w), а остальные – их линейные комбинации, т.е. принадлежат идеалу, порожденному v и w в кольце гладких функций. Таким образом, векторное поле $\boldsymbol{v}$ имеет вид

$$\dot{x} = v, \quad \dot{y} = w, \quad \dot{z}^i = \alpha^i v + \beta^i w, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где функции $v = v(x,y,z)$, $w = w(x,y,z)$, $\alpha^i = \alpha^i(x,y,z)$, $\beta^i = \beta^i(x,y,z)$ C^k-гладкие по совокупности переменных, $z = (z^1, \ldots, z^{n-1})$. Доказательство см. в [19].

[5] Последнее утверждение следует из леммы о стратификации пространства линейных операторов или из более общей теоремы – так называемой "формулы произведения корангов"[25].

В окрестности типичной особой точки (страта $\mathfrak{S}_1$) особые точки поля $\boldsymbol{v}$ образуют на $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ многообразие W^c коразмерности 2 – пересечение нулевых уровней функций $v(x, y, \boldsymbol{z})$ и $w(x, y, \boldsymbol{z})$. Спектр линеаризации поля $\boldsymbol{v}$ в особой точке состоит из собственных значений $(\lambda_1, \lambda_2, 0, \dots, 0)$, где число нулей равно $n-1$. Если оба собственных значения λ_1, λ_2 ненулевые, то уравнения $v(x, y, \boldsymbol{z}) = 0$, $w(x, y, \boldsymbol{z}) = 0$ независимы и W^c представляет собой $(n-1)$-мерное многообразие. Нулевому собственному значению соответствует набор $n-1$ независимых собственных векторов, касательных к многообразию W^c в особой точке. При каких бы то ни было малых возмущениях исходного уравнения (1) общий вид поля (4) остается неизменным, изменяются только функции v, w, α_i, β_i. Многообразие W^c не исчезает и не вырождается, а лишь слегка деформируется.

Если $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} \neq 0$, то W^c является центральным многообразием, причем ограничение поля $\boldsymbol{v}$ на W^c тождественно равно нулю. Из теоремы сведения Шошитайшвили [5] следует, что при $k \geq 2$ в окрестности особой точки система (4) *топологически* эквивалентна произведению стандартного седла $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$ (если $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}$ разных знаков) или узла $\dot{x} = x$, $\dot{y} = y$ (если $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}$ одного знака) и тривиальной системы $\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{0}$. Таким образом, если $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} \neq 0$, то фазовый портрет (4) получается при гомеоморфном преобразовании из фазового портрета произведения стандартного двумерного узла или стандартного двумерного седла на тривиальную систему $\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{0}$ размерности $n-1$.

Вопрос о гладкой эквивалентности более сложен. Ниже будет показано, что при выполнении дополнительных условий система (4) *конечно-гладко* эквивалентна прямому произведению $\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{0}$ и некоторой двумерной системы со спектром (λ_1, λ_2).

3. Нерезонансный случай. Набор собственных значений (λ_1, λ_2) будем называть *резонансным первого рода*, если существует соотношение $p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 = 0$, где $p_i \geq 0$ – целые, $p_1 + p_2 \geq 1$. Число $p_1 + p_2$ будем называть *порядком резонанса первого рода*.

Набор собственных значений (λ_1, λ_2) будем называть *резонансным второго рода*, если для $j = 1$ или 2 существует соотношение $q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 = \lambda_j$, где $q_i \geq 0$ – целые, $q_1 + q_2 \geq 2$. Число $q_1 + q_2$ будем называть *порядком резонанса второго рода*.

Пусть $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} \neq 0$, обозначим $\lambda_* = \min\{|\operatorname{Re}\lambda_1|, |\operatorname{Re}\lambda_2|\}$ и $\lambda^* = \max\{|\operatorname{Re}\lambda_1|, |\operatorname{Re}\lambda_2|\}$. Следуя [23], для каждого целого $\nu \geq 1$ определим число $N(\nu) = 2\left[(2\nu+1)\frac{\lambda^*}{\lambda_*}\right] + 2$, где $[a]$ означает целую часть числа a.

Теорема 1. *Пусть для некоторого $\nu \geq 1$ набор (λ_1, λ_2) не имеет резонансов первого рода до порядка $N(\nu)$ включительно и $k \geq N(\nu)$. Тогда в окрестности особой точки система (4) C^ν-гладко эквивалентна системе*

$$\dot{X} = V(X, Y, Z), \quad \dot{Y} = W(X, Y, Z), \quad \dot{Z}^i = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

где $Z = (Z^1, \dots, Z^{n-1})$, функции $V(X, Y, Z)$, $W(X, Y, Z)$ принадлежат классу C^k.

Доказательство теоремы см. в [19] или [21].

Система (5) распадается на тривиальную $(n-1)$-мерную систему $\dot{Z} = \boldsymbol{0}$ и двумерную систему

$$\dot{X} = V(X, Y, Z), \quad \dot{Y} = W(X, Y, Z), \tag{6}$$

в которой Z играет роль параметра, не зависящего от времени. Таким образом, система (5) определяет $(n-1)$-параметрическое семейство векторных полей (6), конечно-гладкие нормальные формы которых исследованы в [24]. Например, если набор (λ_1, λ_2) не имеет резонансов второго рода, то семейство (6) конечно-гладко эквивалентно линейному семейству $\dot{X} = A_{11}(Z)X + A_{12}(Z)Y$, $\dot{Y} = A_{21}(Z)X + A_{22}(Z)Y$, где все $A_{ij}(Z)$ – функции, гладко зависящие от Z (теор. 1 из [24]). Если же набор (λ_1, λ_2) не имеет резонансов первого рода до порядка $N(\nu)$, а все резонансные соотношения второго рода являются следствием одного равенства $p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 = 0$, $p_1 + p_2 > N(\nu)$, то семейство (6) конечно-гладко эквивалентно семейству $\dot{X} = Xg_1(\rho(X,Y),Z)$, $\dot{Y} = Yg_2(\rho(X,Y),Z)$, где g_i - полиномы от скалярной переменной ρ с коэффициентами, гладко зависящими от Z, а $\rho(X,Y)$ - резонансный моном (теор. 3 из [24]).

4. Резонансный случай. Дальнейшая часть статьи посвящена случаю, когда собственные значения вещественные и ненулевые, но имеется резонанс $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Линейные замены переменных переводят системы вида (4) в системы такого же вида (две компонены независимы, а все остальные - их линейные комбинации). Сделав подходящее аффинное преобразование фазового пространства, можно добиться того, чтобы рассматриваемая особая точка совпадала с началом координат, а линейная часть поля v имела жорданову форму $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \dots, 0)$.

Векторное поле (4) удовлетворяет *условию общности положения квадратичной части* (условию Q), если в той системе координат, в которой линейная часть поля имеет жорданову форму, хотя бы для одного номера $s \in \{1, \dots, n-1\}$ в особой точке выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial \alpha^s}{\partial y} - \frac{\partial \beta^s}{\partial x} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z^s} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z^s} \neq 0. \tag{7}$$

Рассмотрим сначала случай $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ при $n = 2$.

Теорема 2. *Пусть для векторного поля* (4) *при $n = 2$ выполнено условие Q. Тогда в окрестности особой точки поле порождает слоение фазового пространства семейством инвариантных поверхностей, которое конечно-гладким диффеоморфизом может быть приведено к каноническому виду $xy - z^2 = c$, $c = \mathrm{const}$.*

Доказательство теоремы см. в [21].

Например, векторное поле $\dot{x} = x - xz$, $\dot{y} = -y - yz + xy^2$, $\dot{z} = y(x - xz)$ вида (4) удовлетворяет условию Q и имеет первый интеграл $U = xy + z^2 - xyz$, который порождает слоение фазового пространства семейством инвариантных поверхностей $xy + z^2 - xyz = c$. По лемме Морса, вблизи начала координат это слоение может быть приведено к каноническому виду при помощи диффеоморфизма. Использование леммы Морса не случайно: доказательство теоремы 2 опирается на лемму Морса и теорему 1 из [23] о гладкой эквивалентности систем в окрестности частично гиперболической особой точки.

Теперь перейдем к случаю $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ при $n > 2$.

Теорема 3. *Пусть для векторного поля* (4) *при $n > 2$ выполнено условие Q. Тогда в окрестности особой точки имеют место следующие утверждения.*

1) Конечно-гладким диффеоморфизом фазового пространства поле может быть приведено к виду

$$\dot{X} = V(X,Y,Z,\Xi), \quad \dot{Y} = W(X,Y,Z,\Xi), \quad \dot{Z} = Q(X,Y,Z,\Xi), \quad \dot{\Xi} = \mathbf{0},$$

где $\Xi = (\Xi^1, \dots, \Xi^{n-2})$ играет роль $(n-2)$-мерного параметра, не зависящего от времени. Векторное поле порождает слоение фазового пространства семейством трехмерных инвариантных многообразий $\Xi = \Xi_0$.

2) В случае общего положения для любого сколь угодно большого числа N существует такая окрестность особой точки $\mathcal{O}_N$, в которой все особые точки поля не имеют резонансов первого рода до порядка N, за исключением подмногообразия $\mathcal{R} \subset W^c$ размерности $n-2$, все точки которого имеют резонанс $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

3) В окрестности каждой особой точки $\boldsymbol{P} \in \mathcal{O}_N \setminus \mathcal{R}$ векторное поле конечно-гладким диффеоморфизом может быть приведено к виду

$$\dot{X} = V(X,Y,Z,\Xi), \quad \dot{Y} = W(X,Y,Z,\Xi), \quad \dot{Z} = 0, \quad \dot{\Xi} = \mathbf{0}.$$

4) Пересечение каждого слоя $\Xi = \Xi_0$ с центральным многообразием W^c - гладкая кривая, а (в случае общего положения) с резонансным подмногообразием $\mathcal{R}$ - точка

$R(\Xi_0)$. *В окрестности* $R(\Xi_0)$ *векторное поле порождает на трехмерном инвариантном многообразии* $\Xi = \Xi_0$ *слоение семейством инвариантных поверхностей, которое диффеоморфно каноническому слоению* $XY - Z^2 = C$, $C = \mathrm{const}$.

Доказательство теоремы см. в [21].

Список литературы

[1] Арнольд В.И. *Теория катастроф.* М.: Наука, 1990.

[2] Арнольд В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978.

[3] Арнольд В.И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 2000.

[4] Арнольд В.И. *Контактная структура, релаксационные колебания и особые точки неявных дифференциальных уравнений.* Избранное – 60. М.: ФАЗИС, 1997.

[5] Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Итоги Науки и Техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 1, с. 7–149.

[6] Давыдов А.А. *Нормальная форма уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки.* Функц. анализ и его приложения, 1985, т. 19, вып. 2, с. 1 – 10.

[7] Davydov A.A. *Qualitative Theory of Control Systems.* Mathematical Monographs, Vol. 141. AMS, Providence, Rhode Islans, 1994.

[8] Давыдов А.А., Ортиз-Бобадилья Л. *Нормальные формы сложенных элементарных особых точек.* Успехи матем. наук, 1995. – Том 50, вып. 6 (306), с. 175 – 177.

[9] Давыдов А.А., Росалес-Гонсалес Э. *Полная классификация типичных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными на плоскости.* ДАН, 1996. – Том 350, N 2, с. 151 – 154.

[10] Кузьмин А.Г. *О поведении характеристик уравнения смешанного типа вблизи линии вырождения.* Дифференц. уравнения, 1981. – Том 17, N 11, с. 2052 – 2063.

[11] Пхакадзе А.В., Шестаков А.А. *О классификации особых точек дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.* Мат. сборник, 1959, т. 49, вып. 1, с. 3 – 12.

[12] Пилия А.Д., Федоров В.И. *Особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью.* ЖЭТФ, 1971, т. 60, вып. 1, с. 389 – 399.

[13] Cibrario M. *Sulla reduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivative parzialy di secondo ordine di tipo misto.* Rend. Lombardo 65 (1932), 889 – 906 p.

[14] Dara L. *Singularities generiques des equations differentielles multiformes.* Bol. Soc. Bras. Math., 1975, v. 6, N 2, p. 95 – 129.

[15] Takens F. *Constrained equations; a study of implicit differential equations and their discontinuous solutions.* Lect. Notes Math. 1976. **525**, p. 143 – 234.

[16] Thom R. *Sur les equations differentielles multiforms et leur integrales singulieres.* Th. R. Bol. Soc. Bras. Math., 1971, v. 3, N 1, p. 1 – 11.

[17] Пазий Н.Д. *Локальная аналитическая классификация уравнений соболевского типа.* Дисс. ... кандид. физ.- мат. наук. Челяб. гос. ун-т. Челябинск, 1999.

[18] Ремизов А.О. *О правильных особых точках обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных.* Дифференц. уравнения, 2002, т. 38, N 5, с. 622 – 630.

[19] Ремизов А.О. *О неправильных особых точках коранга 1 систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных.* Дифференц. уравнения, 2002. Т. 38, N 8, с. 1053 – 1062.

[20] Ремизов А.О. *Векторные поля с неизолированными особыми точками.* ДАН, 2002. Т. 384, N 6, с. 735 – 737.

[21] Ремизов А.О. *Неявные дифференциальные уравнения и векторные поля с неизолированными особыми точками.* Мат. сборник, 2002, N 11 (в печати).

[22] Ремизов А.О. *Неявные дифференциальные уравнения и порождаемые ими векторные поля.* Труды междунар. конференции по дифф. уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 1 – 6 июля, 2002.

[23] Самовол В.С. *Эквивалентность систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки.* Труды Моск. мат. общества, 1982. – Том 44, с. 213–234.

[24] Ильяшенко Ю.С., Яковенко С.Ю. *Конечно-гладкие нормальные формы локальных семейств диффеоморфизмов и векторных полей.* Успехи матем. наук, 1991. – Том 46, вып. 1 (277), с. 3–39.

[25] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. *Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов.* М.: Наука, 1982.

*E-mail:*remizov@caravan.ru