Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2003) 23 - 27

УДК 517.98

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВИДЕ СУММЫ ОРТОПРОЕКТОРОВ.

Л.Л. Оридорога
Донецкий национальный университет,
Донецк, Украина

1. Введение. Задача о представлении скалярных операторов λI в гильбертовом пространстве H исследовались различными авторами (см., например, [1]-[3] и список литературы в них)

Так в [2] рассматриваются множества Λ_k — множество λ таких, что λI представляется в виде суммы k проекторов и Σ_k — множество λ таких, что λI представляется в виде суммы k ортопроекторов.

При этом показано, что $\Lambda_k = \Sigma_k$ при $k \leq 4$ и

$$\Lambda_1 = \Sigma_1 = \{0,1\}, \quad \Lambda_2 = \Sigma_2 = \{0,1,2\}, \quad \Lambda_3 = \Sigma_3 = \{0,1,\frac{3}{2},2,3\}.$$

Кроме того, там же показано что $\Lambda_k = \mathbb{C}$ при $k \geq 5$, а при $k \geq 6$ справедливы соотношения

$$\Sigma_k \supset \{0,1,1+\frac{n}{n(k-3)+2},[1+\frac{1}{k-3},k-1-\frac{1}{k-3}],k-1-\frac{n}{n(k-3)+2},k-1,k\}.$$

В [3] показано также, что при $k \geq 6$ справедливо включение

$$\Sigma_k \subset \{0,1,1+\frac{1}{k-1},[1+\frac{1}{k-2},k-1-\frac{1}{k-2}],k-1-\frac{1}{k-1},k-1,k\}.$$

В [1] дано полное описание множеств Σ_k. Там же изучается задача описания, с точностью до унитарной эквивалентности, систем проекторов P_j таких, что $\sum\limits_{j=1}^{k} P_j = \lambda I$

Отметим также работу [5], в которой показано, что оператор $0I$ может быть представлен в виде суммы пяти (но не может быть представлен в виде суммы четырёх!) **ненулевых** проекторов.

В данной заметке для каждой положительноопределённой диагональной матрицы с целым следом, превышающим её размер, в явном виде указываются её представление в виде суммы проекторов. Существование данного представления (без указания точной конструкции) было доказано Филлмором в [7].

Кроме того, показано для каких скалярных операторов их представление в виде суммы проекторов единственно (с точностью до унитарной эквивалентности). А именно показано, что при $n > 1$ представление $\frac{k}{n} I_n$ в виде суммы проекторов единственно, с точностью до унитарной эквивалентности, при $k = n+1$ и не единственно при $k > n+1$. При этом теорема 2 повторяет результат, полученный ранее в [6]. Однако, доказательство, приведённое в данной работе, основано на другой идее и существенно отличается от доказательства имеющегося в [6].

2. Усиление теоремы Филлмора.

Теорема 1. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, такие, что $m = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ — целое число, причём $m \geq n$. Пусть, далее, $0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n < m$ и P_l — ортопроектор на единичный вектор $\vec{x_l}$, где*

$$\vec{x_l} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \sqrt{a_1} e^{\frac{2\pi i k_1}{m} l} \\ \sqrt{a_2} e^{\frac{2\pi i k_2}{m} l} \\ \cdots \\ \sqrt{a_n} e^{\frac{2\pi i k_n}{m} l} \end{pmatrix}, \qquad l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Тогда $\sum\limits_{l=0}^{m-1} P_l = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Доказательство. Обозначим p_{lij} элемент матрицы P_l, т.е.

$$P_l = (p_{lij})_{i,j=1}^n.$$

Поскольку вектор $\vec{x_l}$ нормирован, $\|\vec{x_l}\| = 1$ то

$$P_l = x_l \cdot x_l^*.$$

Поэтому

$$p_{lij} = \frac{1}{n} e^{\frac{2\pi i (k_i - k_j)}{m} l}.$$

Причём $|k_i - k_j| < m$ и кроме того $|k_i - k_j| = 0$ тогда и только тогда, когда $i = j$. Следовательно,

$$\sum_{l=0}^{m-1} p_{lij} = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \left(\sqrt{a_i a_j} e^{\frac{2\pi i (k_i - k_j)}{m}} \right)^l = \sqrt{a_i a_j}\, \delta_i^j.$$

А это и означает, что $\sum\limits_{l=0}^{m-1} P_l = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

В качестве следствия из теоремы 1 легко вытекает следующая теорема Филлмора (см. [7])

Следствие 1. ([7]) *Пусть A — неотрицательная матрица с целым следом, причём её след не меньше её ранга. Тогда матрица A может быть представлена в виде суммы ортопроекторов.*

Замечание 3. Конструкция, предложенная в теореме 1, аналогична конструкции, использованной ранее автором в [4], для представления скалярного конечномерного оператора в виде суммы проекторов.

3. Пример. Ниже приведён пример набора ортопроекторов, описанных в теореме 1.

Пример. Пусть $A = \operatorname{diag}\{\frac{16}{9}, \frac{16}{9}, \frac{4}{9}\}$ Пусть также $k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_3 = 2$.

Тогда

$$\vec{x_0} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x_3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2i \\ -1 \end{pmatrix}$$

При этом

$$P_0 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4i & -2 \\ 4i & 4 & -2i \\ -2 & 2i & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4i & -2 \\ -4i & 4 & 2i \\ -2 & -2i & 1 \end{pmatrix}.$$

4. О единственности представления скалярного оператора суммой ортопроекторов. Случай $k = n+1$. Здесь мы рассмотрим единственность представления скалярного оператора, с точностью до унитарной эквивалентности.

Определение. Системы $\{P_j\}_{j=1}^k$ и $\{Q_j\}_{j=1}^k$ операторов P_j и Q_j, определенные на гильбертовом пространстве H называются унитарно эквивалентными, если существует такой унитарный оператор U в H, что

$$P_j = U^* Q_j U, \qquad j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Следующая теорема получена недавно в [6]. Мы приведем иное доказательство, основанное на совершенно другой идее.

Теорема 2. *Пусть $k = n + 1$. Тогда оператор $\frac{k}{n} I$ в n-мерном комплексном пространстве может быть представлен единственным, с точностью до унитарной эквивалентности, образом в виде суммы ортопроекторов.*

Доказательство. Пусть

$$\sum_{j=1}^{k} P_j = \frac{k}{n} I.$$

Предположим вначале, что все P_j — одномерные.

В таком случае P_j может быть записан в виде

$$P_j = x_j \cdot x_j^*,$$

где вектор x_j определён однозначно, с точностью до множителя, равного по модулю единице.

Выберем вектор x_1 произвольно, а остальные x_j таким образом, что $(x_1, x_j) \le 0$. Обозначим X матрицу составленную из вектор-столбцов x_j. Обозначим G матрицу Грама системы векторов x_j. Поскольку $G = X^* X$ и $XX^* = \frac{k}{n} I$, то n собственных чисел матрицы G равны $\frac{k}{n}$ и одно равно 0. Следовательно матрица $\tilde{G} = \frac{k}{n} I - G$ имеет ранг 1. Кроме того, поскольку при всех j $G_{jj} = 1$, то все числа стоящие на диагонали матрицы $\tilde{G}$ равны $\frac{1}{n}$. Кроме того, из условия нормировки векторов x_j следует, что все числа в первой строке матрицы $\tilde{G}$ неотрицательны. Но в таком случае все элементы матрицы $\tilde{G}$ равны $\frac{1}{n}$. Следовательно, при данной нормировке векторов x_j

$$(x_j, x_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k \\ -\frac{1}{n} & \text{при } j \neq k \end{cases}$$

Следовательно, при данной нормировке, вектора x_j определяются однозначно, с точностью до унитарной эквивалентности.

Заметим теперь, что если бы среди P_j содержался проектор на подпространство размерности выше единицы, то его можно было бы представить в виде суммы проекторов на ортогональные одномерные подпространства. В таком случае мы бы получили представление оператора $\frac{k}{n} I$ в виде суммы одномерных проекторов, отличное от приведённого выше, что невозможно.

5. Неединственность представления в случае $k > n+1$.

Исследуем теперь случай $k > n+1$. Оказывается, что в этом случае единственность искомого представления нарушается.

Теорема 3. *В том случае, когда $n > 1$ и $k > n+1$ оператор $\frac{k}{n}I$ в n-мерном пространстве может быть представлен в виде суммы ортопроекторов на одномерные подпространства бесконечным числом различных, с точностью до унитарной эквивалентности, способов.*

Доказательство. Пусть x_j и y_j — два набора из k векторов, такие, что

$$\sum_{j=1}^{k} P_j = \sum_{j=1}^{k} Q_j = \frac{k}{n} I,$$

где $P_j = x_j \cdot x_j^*$ и $Q_j = y_j \cdot y_j^*$.

Тогда для того, чтобы системы проекторов P_j и Q_j были унитарно эквивалентными, необходимо, чтобы существовала такая перестановка векторов x_j, при которой

$$|(x_{j_1}, x_{j_2})| = |(y_{j_1}, y_{j_2})|,$$

при любых j_1 и j_2.

Рассмотрим сначала случай $k \geq 2n$.

В этом случае можно рассмотреть системы векторов x_j и y_j составленные таким образом, что

$$\sum_{j=1}^{k-n} P_j = \sum_{j=1}^{k-n} Q_j = \frac{k-n}{n} I,$$

и кроме того подсистемы $(x_j)_{j=k-n+1}^{k}$ и $(y_j)_{j=k-n+1}^{k}$ образуют ортогональные базисы в пространстве $\mathbb{C}^n$. При этом базис $(x_j)_{j=k-n+1}^{k}$ выбирается произвольно, после чего вектор y_{k-n+1} берётся таким, что при любых j_1 и j_2 $|(y_1, y_{k-n+1})| \neq |(x_{j_1}, x_{j_2})|$.

Пусть теперь $k < 2n$.

Рассмотрим в $(k-n)$-мерном пространстве системы векторов x_j и y_j, построенные как указано выше. Пусть G_x и G_y их матрицы Грама. Тогда $k-n$ собственных чисел этих матриц равны $\frac{k}{k-n}$, а остальные n собственных чисел равны 0. Кроме того все числа на диагонали равны 1.

Рассмотрим матрицы $\tilde{G}_x = \frac{k}{n} I - \frac{k-n}{n} G_x$ и $\tilde{G}_y = \frac{k}{n} I - \frac{k-n}{n} G_y$. У этих матриц n собственных чисел равны $\frac{k}{n}$, а остальные $k-n$ собственных чисел равны 0. Кроме того все числа на диагонали равны 1. Таким образом каждая из матриц $\tilde{G}_x$ и $\tilde{G}_y$ является матрицей Грама некоторой системы единичных векторов ($\tilde{x}_j$ и $\tilde{y}_j$ соответственно) лежащих в n-мерном пространстве.

При этом суммы проекторов на вектора каждой из этих систем равны $\frac{k}{n} I$. А поскольку при любых j_1 и j_2 $|(\tilde{y}_1, \tilde{y}_{k-n+1})| \neq |(\tilde{x}_{j_1}, \tilde{x}_{j_2})|$, то эти системы проекторов не являются унитарно эквивалентными.

Благодарность. Я искренне признателен М.М. Маламуду за постановку задачи и полезные советы.

Список литературы

[1] *С.А. Кругляк, В.И. Рабанович, Ю.С. Самойленко* О суммах проекторов // Функциональный анализ и приложения — 2002. — 36, №3 — p.20–35

[2] *В.И. Рабанович, Ю.С. Самойленко* Когда сумма идемпотентов или проекторов кратна единице // Функциональный анализ и приложения — 2000. — 34, №4 — p.91–93

[3] *В.И. Рабанович, Ю.С. Самойленко* Скалярные операторы представимые суммой проекторов // Укр. мат. журнал — 2001. — т.53, №7 — p.939–952

[4] *Л.Л. Оридорога* Скалярные операторы в конечномерных пространствах, представимые в виде суммы проекторов // Учёные записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского — 2002. — т.15(54), №1: Математика. Механика. Информатика и кибернетика. — p.15–18

[5] *Bart H., Ehrhart T., Silbermann B.* // Integral Equations Operator Theory — 1994. — 19 — p.123–134

[6] *E.R. Djeldubaev, S.A. Kruglyak* On representation of the *-algebra $\mathcal{P}_{N,1+\frac{1}{N-1}}$ // Methods of Functional Analysis and Topology — 2001. — v.7 — №2 — p.35–41

[7] *P.A. Fillmore* On Sums of Projections // Journal of Functional Analysis — 1969. — №4 — p.146–152

Л.Л. Оридорога, кафедра математического анализа и теории функций, математический факультет, Донецкий национальный университет, ул. Университетская, 24, г. Донецк

*E-mail:*oridoroga@skif.net