Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2003) 17 - 22

УДК 517.98

ПОРЯДКОВАЯ СХОДИМОСТЬ В ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ НЕКОММУТАТИВНЫХ L_p - ПРОСТРАНСТВ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

М. А. Муратов[1], В. И. Чилин[2]

В настоящей работе устанавливается порядковая сходимость средних в индивидуальной эргодической теореме для положительного сжатия некоммутативного L_p-пространства при $p \geq 2$.

In the present paper the order convergence of averages in individual ergodic theorem for positive contraction of non commutative L_p - space,$p \geq 2$, is proved.

Кольца измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана, впервые рассматривались в работе Сигала И. Е. [1] в связи с необходимостью построения теории интегрирования для следов, заданных на некоммутативных алгебрах фон Неймана. В этой же работе были введены некоммутативные аналоги сходимостей почти всюду и по мере последовательностей измеримых операторов. Впоследствии эти сходимости и их различные варианты рассматривались и изучались в работах [2] — [9].

В работе [10] Йедоном Ф. были описаны основные свойства некоммутативных L_p-пространств измеримых операторов, присоединенных к некоммутативной алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$ с точным нормальным полуконечным следом m. Им же в [11] впервые была доказана индивидуальная эргодическая теорема для абсолютных сжатий α пространств $L_1(\mathcal{A}, m)$, причем было показано, что последовательность средних

$$S_n(\alpha)(T) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k(T)$$

сходится почти всюду для любого оператора $T \in L_2(\mathcal{A}, m)$ и двусторонне почти всюду для любого $T \in L_1(\mathcal{A}, m)$. Следует отметить, что сходимость почти всюду и двусторонняя сходимость почти всюду в алгебрах фон Неймана, не имеющих тип I, вообще говоря, не совпадают [7]. В связи с этим, вопрос о сходимости почти всюду последовательности средних $\{S_n(\alpha)(T)\}_{n=1}^{\infty}$ для всех $T \in L_1(\mathcal{A}, m)$ до сих пор остается открытым. Наличие частичного порядка в самосопряженной части кольца измеримых операторов $S(\mathcal{A}, m)$, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$ со следом m, позволяет ввести в этом кольце еще один вид сходимости, а именно (o)-сходимость (сходимость по порядку). Известно, что сходимость почти всюду сильнее (o)-сходимости, которая, в свою очередь, сильнее двусторонней сходимости почти всюду. Для алгебр фон Неймана типа I эти три сходимости совпадают [8], [9]. В общем случае они, вообще говоря, различны.

Наряду с (o)-сходимостью в $S(\mathcal{A}, m)$ последовательности операторов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $S(\mathcal{A}, m)$ можно рассматривать и (o)-сходимость в пространствах $L_p(\mathcal{A}, m)$, когда сама

[1]Таврический Национальный Университет, Симферополь.

[2]Ташкентский Национальный Университет, Ташкент.

последовательность $\{T_n\}$ и сжимающие ее монотонные последовательности лежат в $L_p(\mathcal{A}, m)$ (определения см. ниже). Ясно, что если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_p(\mathcal{A}, m)$ (o)-сходится в $L_p(\mathcal{A}, m)$, то $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ (o)-сходится и в $S(\mathcal{A}, m)$. Обратное, вообще говоря, неверно. Поэтому естественно возникает вопрос об (o)-сходимости последовательности средних $\{S_n(\alpha)(T)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_p(\mathcal{A}, m)$ для всех $T \in L_p(\mathcal{A}, m)$. В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос для случая $p \geq 2$. Используется терминология и обозначения теории алгебр фон Неймана из [12] и теории некоммутативного интегрирования [1], [10], [13].

Пусть $\mathcal{A}$ — полуконечная алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, m — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}_P$ решетка всех ортопроекторов в $\mathcal{A}$.

Замкнутый оператор T, присоединенный к $\mathcal{A}$ и имеющий всюду плотную область определения $D(T)$, называется m-измеримым относительно $\mathcal{A}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in \mathcal{A}_P$, что $P(\mathcal{H}) \subset D(T)$ и $m(P^{\perp}) < \varepsilon$, где $P^{\perp} = I - P$. I — единица алгебры $\mathcal{A}$.

Множество $\mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ всех m-измеримых операторов является $*$-алгеброй относительно сильной суммы, сильного произведения и перехода к сопряженному оператору ([1]).

Для каждого подмножества $\mathcal{M}$ из $\mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ через $\mathcal{M}_h$ (соответвенно $\mathcal{M}_+$) обозначим множество всех самосопряженных (соответственно положительных самосопряженных) операторов из $\mathcal{M}$. Частичный порядок в $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$, порожденный собственным конусом $\mathcal{S}_+(\mathcal{A}, m)$, будем обозначать через $\leq$.

Каждый оператор $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ имеет полярное разложение $T = U|T|$, где $|T| = (T^*T)^{1/2}$ — модуль этого оператора, а U - соответствующая частичная изометрия из $\mathcal{A}$.

Рассмотрим в $\mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ топологию τ сходимости по мере, порожденную следом m, т.е. отделимую векторную топологию, базу окрестностей нуля которой образуют множества

$$U_{\varepsilon,\delta} = \{T \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, m) : \exists P \in \mathcal{A}_P \text{ такой, что } m(P^{\perp}) < \delta,\ TP \in \mathcal{A},\ \|TP\| < \varepsilon\},$$

где ε, $\delta > 0$, $\|\cdot\|$ — C^*-норма в $\mathcal{A}$.

Известно, что $(\mathcal{S}(\mathcal{A}, m), \tau)$ является полной метризуемой топологической $*$-алгеброй (см., например, [14]).

Если последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ сходится в топологии τ к оператору T, то обычно говорят, что $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к T по мере m и пишут $T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T$.

Заметим, что множества $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$ и $\mathcal{S}_+(\mathcal{A}, m)$ замкнуты в топологии τ.

Пусть $T \in S_+(\mathcal{A}, m)$ и $T = \int\limits_0^{+\infty} \lambda\, dE_\lambda$, где $\{E_\lambda\} \subset \mathcal{A}$ соответствующее спектральное семейство проекторов оператора T.

Положим

$$m(T) = \sup_{n \geq 1} m\left(\int\limits_0^n \lambda\, dE_\lambda\right) = \int\limits_0^{+\infty} \lambda\, dm(E_\lambda)$$

Для каждого $p \in [1, +\infty)$ следующим образом определяются пространства $L_p(\mathcal{A}, m)$:
$L_p = L_p(\mathcal{A}, m) = \{T \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, m) : \|T\|_p = (m(|T|^p))^{\frac{1}{p}} < \infty\}$.

Известно, что пространство $(L_p(\mathcal{A}, m), \|\cdot\|_p)$ банахово и, если след m конечен, то при $1 \leq p_2 \leq p_1$ имеют место вложения: $\mathcal{A} \subseteq L_{p_1} \subseteq L_{p_2}$ [10].

Нам понадобится следующая

Лемма 1. Если последовательность операторов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит $L_p(\mathcal{A}, m)$, $\sup_{n\geq 1}\|T_n\|_p < \infty$ и $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к оператору $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ в топологии τ, то $T \in L_p(\mathcal{A}, m)$.

Доказательство леммы следует из утверждения леммы 3.4 из [13].

Напомним теперь определения сходимостей почти всюду, двусторонней почти всюду и (o)-сходимости в $\mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$.

Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, $T \subset \mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$.

Говорят, что последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к оператору T

— почти всюду, ($T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой проектор $P \in \mathcal{A}_P$, что $m(P^{\perp}) < \varepsilon$, $(T_n - T)P \in \mathcal{A}$ и $\lim_{n\to\infty} \|(T_n - T)P\| = 0$;

— двусторонне почти всюду, ($T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой проектор $P \in \mathcal{A}_P$, что $m(P^{\perp}) < \varepsilon$, $P(T_n - T)P \in \mathcal{A}$ и $\lim_{n\to\infty} \|P(T_n - T)P\| = 0$.

Говорят, что последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$ возрастает (убывает) к оператору $T \in \mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$ (обозначение $T_n \uparrow T$ (соответственно $T_n \downarrow T$)), если $T_n \leq T_{n+1}$ (соответственно $T_n \geq T_{n+1}$) для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $T = \sup_n T_n$ (соответственно $T = \inf_n T_n$).

Последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$ (o)-сходится к оператору T из $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$ ($T_n \xrightarrow{(o)} T$), если существуют такие последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$, что

1) $A_n \leq T_n \leq B_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$;
2) $A_n \uparrow T$;
3) $B_n \downarrow T$.

В [8] показано, что если m — точный нормальный конечный след на $\mathcal{A}$, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, $T \subset \mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$ и $T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$, то $T_n \xrightarrow{(o)} T$ в $\mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$.

Ясно, что если $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$, то $T = ReT + ImT$, где $ReT = \frac{T+T^*}{2} \in \mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$ и $ImT = \frac{T-T^*}{2i} \in \mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$.

Будем говорить, что последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ (o)- сходится в $\mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ к оператору $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ и писать $T_n \xrightarrow{(o)} T$, если $ReT_n \xrightarrow{(o)} ReT$ и $ImT_n \xrightarrow{(o)} ImT$.

Если в определении (o)-сходимости последовательности операторов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_p(\mathcal{A}, m)$ к оператору $T \in L_p(\mathcal{A}, m)$ сжимающие последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ лежат в $L_p(\mathcal{A}, m)$, то говорят, что $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ (o)-сходится к T в $L_p(\mathcal{A}, m)$.

Ясно, что любая (o)-сходящаяся в $L_p(\mathcal{A}, m)$ последовательность будет (o)-сходящейся в $\mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно даже для коммутативных алгебр фон Неймана.

Положительное линейное отображение

$$\alpha : \mathcal{A} \cap L_1(\mathcal{A}, m) \longmapsto \mathcal{A} \cap L_1(\mathcal{A}, m)$$

для которого $\alpha(I) \leq I$ и $\|\alpha(T)\|_1 \leq \|T\|_1$ для всех таких операторов $T \in \mathcal{A} \cap L_1(\mathcal{A}, m)$, что $0 \leq T \leq I$, называется абсолютным сжатием в $\mathcal{A} \cap L_1(\mathcal{A}, m)$.

Каждое абсолютное сжатие α имеет единственное непрерывное продолжение, отображающее $L_p(\mathcal{A}, m)$ в $L_p(\mathcal{A}, m)$, $p \geq 1$ [11], которое мы тоже будем обозначать через α. При этом $\|\alpha(T)\|_p \leq \|T\|_p$ для всех $T = T^* \in L_p(\mathcal{A}, m)$.

Для каждого оператора $T \in L_p(\mathcal{A}, m)$ рассмотрим последовательность средних

$$S_n(\alpha)(T) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k(T).$$

$n = 1, 2 \ldots.$

Как уже отмечалось выше, в [11] показано, что $\{S_n(\alpha)(T)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится почти всюду для каждого $T \in L_2(\mathcal{A}, m)$ и двусторонне почти всюду для каждого $T \in L_1(\mathcal{A}, m)$. Отсюда, согласно [9] и лемме 1, следует, что если m — точный нормальный конечный след на $\mathcal{A}$.

$T \in L_p(\mathcal{A}, m)$, $p \geq 2$, то $\{S_n(\alpha)(T)\}_{n=1}^{\infty}$ (o)-сходится в $S(\mathcal{A}, m)$ к некоторому оператору из $L_p(\mathcal{A}, m)$.

Следующая теорема устанавливает (o)-сходимость этой последовательности в $L_p(\mathcal{A}, m)$.

Теорема 1. Пусть m — точный нормальный конечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$ и

$$\alpha : L_p(\mathcal{A}, m) \longmapsto L_p(\mathcal{A}, m), \ p \geq 2$$

абсолютное сжатие. Тогда для каждого $T \in L_p(\mathcal{A}, m)$ последовательность $\{S_n(\alpha)(T)\}_{n=1}^{\infty}$ (o)-сходится в $L_p(\mathcal{A}, m)$.

Доказательство.

Если $T \in L_p(\mathcal{A}, m)$, то

$$T = (ReT)_+ - (ReT)_- + i(ImT)_+ - i(ImT)_-,$$

где

$$(ReT)_+, (ReT)_-, (ImT)_+, (ImT)_- \in (L_p(\mathcal{A}, m))_+.$$

Поскольку $S_n(\alpha)(T)$ линейные операторы в $L_p(\mathcal{A}, m)$, $n = 1, 2...$, а операции сложения и умножения на скаляр непрерывны относительно (o)-сходимости [8], то утверждение теоремы достаточно доказать для $T \in (L_p(\mathcal{A}, m))_+$.

Далее нам понадобится следующая лемма:

Лемма 2. Если $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $Y \subset S(\mathcal{A}, m)$, A, $B \in \mathcal{A}$ и $Y_n \xrightarrow{\text{п.в.}} Y$, то
$BT_nA \xrightarrow{\text{п.в.}} BTA$

Доказательство леммы 2.

Обозначим через $r(Z)$ и $l(Z)$ соответственно правый и левый носители оператора $Z \in \mathcal{A}$ [12]. Так как эти проекторы эквивалентны, то $m(r(Z)) = m(l(Z))$. Следовательно, если $E \in \mathcal{A}_P$, $Z \in \mathcal{A}$, $Q = I - r((I - E)Z)$, то

$$m(I - Q) = m(r((I - E)Z)) = m(l((I - E)Z)) \leq m(I - E).$$

При этом, $ZQ = EZQ + (I - E)ZQ = EZQ$.

Так как $Y_n \xrightarrow{\text{п.в.}} Y$, то для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой проектор $P_\varepsilon \in \mathcal{A}_P$, что $m(P_\varepsilon^\perp) < \varepsilon$, $(Y_n - Y)P_\varepsilon \in \mathcal{A}$ и $\lim_{n\to\infty} \|(Y_n - Y)P_\varepsilon\| = 0$.

Положим $Q_\varepsilon = I - r((I - P_\varepsilon)A)$.

Тогда $m(I - Q_\varepsilon) \leq m(I - P_\varepsilon) < \varepsilon$ и $AQ_\varepsilon = P_\varepsilon AQ_\varepsilon$.

Поэтому $\|(Y_n - Y)AQ_\varepsilon\| = \|(Y_n - Y)P_\varepsilon AQ_\varepsilon\| \leq \|(Y_n - Y)P_\varepsilon\|\|AQ_\varepsilon\| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $Y_nA \xrightarrow{\text{п.в.}} YA$.

С другой стороны, $\|B(Y_n - Y)P_\varepsilon\| \leq \|B\|\|(Y_n - Y)P_\varepsilon\| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $BY_n \xrightarrow{\text{п.в.}} BY$ и потому, с учетом доказанного выше , $BY_nA \xrightarrow{\text{п.в.}} BYA$.

Лемма 2 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы.

Пусть $T \in (L_p(\mathcal{A}, m))_+$ и $Y_n = S_n(\alpha)(T)$. Ясно, что $Y_n \in (L_p(\mathcal{A}, m))_+$, и, поскольку $p \geq 2$, то последовательность $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится почти всюду к некоторому оператору $Y \in L_p(\mathcal{A}, m)$ [11].

Так как конус положительных элементов $S_+(\mathcal{A}, m)$ замкнут в $(S(\mathcal{A}, m), \tau)$, и из сходимости почти всюду следует сходимость в топологии τ (по мере), то $Y \in (L_p(\mathcal{A}, m))_+$. Опять используя неравенство $p \geq 2$ и результат о существовании мажоранты для средних из [15], получим, что существует такой оператор $A \in (L_p(\mathcal{A}, m))_+$, для которого $0 \leq Y_n \leq A$ при всех $n = 1, 2....$

Положим $Z_n = (I + A)^{-\frac{1}{2}}Y_n(I + A)^{-\frac{1}{2}}$.

Заметим, что в силу включения $A \in \mathcal{S}_+(\mathcal{A}, m)$, оператор $(I+A)^{-1}$ определен, причем $0 \le (I+A)^{-1} \le I$, в частности, $(I+A)^{-1}$ принадлежит $\mathcal{A}$.

Отображение $T \longmapsto (I+A)^{-\frac{1}{2}}T(I+A)^{-\frac{1}{2}}$, где $T \in \mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$, сохраняет частичный порядок в $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$, поэтому

$$0 \le Z_n \le A(I+A)^{-1} \le I.$$

Таким образом $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ и $\sup_{n\ge 1}\|Z_n\| \le 1$.

Так как $Y_n \xrightarrow{\text{п.в.}} Y$, то согласно лемме 2, получим, что

$$Z_n = (I+A)^{-\frac{1}{2}}Y_n(I+A)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{п.в.}} (I+A)^{-\frac{1}{2}}Y(I+A)^{-\frac{1}{2}} = Z.$$

Из замкнутости конуса $\mathcal{S}_+(\mathcal{A}, m)$ в $(\mathcal{S}(\mathcal{A}, m), \tau)$ вытекает, что $Y \le A$, и потому $0 \le Z \le I$. Следовательно, в силу теоремы 2 из [9], $Z_n \xrightarrow{(o)} Z$ в $\mathcal{A}_h$, т.е. существуют такие последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из $\mathcal{A}_h$, что

$A_n \le Z_n \le B_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \uparrow Z$ и $B_n \downarrow Z$.

Положим $C_n = (I+A)^{\frac{1}{2}}A_n(I+A)^{\frac{1}{2}}$ и $D_n = (I+A)^{\frac{1}{2}}B_n(I+A)^{\frac{1}{2}}$.

Тогда $C_n \uparrow (I+A)^{\frac{1}{2}}Z(I+A)^{\frac{1}{2}} = Y$ и $D_n \downarrow (I+A)^{\frac{1}{2}}Z(I+A)^{\frac{1}{2}} = Y$. Кроме того,

$$C_n \le (I+A)^{\frac{1}{2}}Z_n(I+A)^{\frac{1}{2}} = Y_n \le D_n.$$

Покажем, что последовательности $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежат $L_p(\mathcal{A}, m)$.

Из неравенств $0 \le A_n - A_1 \le B_n - A_1 \le B_1 - A_1$ следует, что

$$\|A_n\| \le \|A_n - A_1\| + \|A_1\| \le \|B_1 - A_1\| + \|A_1\|$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$

Таким образом, $\sup_{n\ge 1}\|A_n\| = a < \infty$, и так как $-\|A_n\|I \le A_n \le \|A_n\|I$, то $-aI \le A_n \le aI$.

Поэтому $-a(I+A) \le C_n = (I+A)^{\frac{1}{2}}A_n(I+A)^{\frac{1}{2}} \le a(I+A)$, откуда

$$0 \le C_n + a(I+A) \le 2a(I+A).$$

Так как $A \in L_p(\mathcal{A}, m)$, то $2a(I+A) \in L_p(\mathcal{A}, m)$, и, следовательно, $C_n \in L_p(\mathcal{A}, m), n = 1, 2, \ldots$

Аналогично доказывается, что $D_n \in L_p(\mathcal{A}, m), n = 1, 2, \ldots$ Это означает, что $S_n(\alpha)(T) = Y_n \xrightarrow{(o)} Y$ в $L_p(\mathcal{A}, m)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказательства теоремы вытекает, что если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (L_p(\mathcal{A}, m))_h$, $p \ge 1$, $T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$, и существует такой оператор $A \in (L_p(\mathcal{A}, m))_+$, для которого $-A \le T_n \le A$, $n = 1, 2 \ldots$, то $T_n \xrightarrow{(o)} T$ в $L_p(\mathcal{A}, m)$.

Замечание 2. Оператор $Y \in L_p(\mathcal{A}, m)$, к которому (о)-сходится последовательность средних $\{S_n(\alpha)(T)\}_{n=1}^{\infty}$, является неподвижной точкой абсолютного сжатия α, т.е. $\alpha(Y) = Y$.

Список литературы

[1] Segal I. E. A non-commutative extension of abstract integration, *Ann. Math.*, No. 57, 401–457 (1953).

[2] Stinespring W. E. Integration theorems for gages and duality for unimodular groups, *Tranc. Amer. Math. Soc.*, No. 90, 15–56 (1959).

[3] Sankaran S. The $*$-algebra of unbounded operators, *J. London Math. Soc.*, No. 34, 337–344 (1959).

[4] Padmanabhan A. R. Convergence in measure and related results in finite rings of operators, *Tranc. Amer. Math. Soc.*, No. 128, 359–388 (1967).

[5] Yeadon F. J. Convergence of measurable operators, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, No. 74. 257–268 (1973).

[6] Paszkiewicz A. Convergences in W^*-algebras, *J. Funct. Anal.*, **69**, 143–154 (1986).

[7] Муратов М. А. Некоторые вопросы сходимости последовательностей неограниченных операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана // *Функ. Анализ* - Труды Украинского Математич. Конгресса - 2001.- Киев: Инст. матем. НАНУ. 161–175 (2002).

[8] M. A. Muratov Order properties of convergent sequences of unbounded measurable operators affiliated to a finite von Neumann algebra // Methods Funct. Anal. Topology -2002.-. **8**, № 3.- P. 50-60.

[9] Муратов М. А., Чилин В. И. Сходимость почти всюду и (o)-сходимость в кольцах измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана. *Укр. Мат. Журнал.*, No. 9, - (2003) T. 55, c. 1196–1205 .

[10] Yeadon F. J. Non-commutative L^P-spaces, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, No. 77, 91–102 (1975).

[11] Yeadon F. J. Ergodic theorems for semi-finite fon Neumann algebras I, *J. London Math. Soc.*, No. 16, 326–332 (1977).

[12] Stratila S.. Zsido L. Lectures on von Neumann algebras, England Abacus Press, 1975. 478 p.

[13] Fack T., Kosaki H. Generalized s-numbers of τ-mesaurable operators // Pacific J. Math.- 1986.- V. 123.- P. 269–300.

[14] Nelson E. Notes on non commutative integration // J. Funct. Anal.- 1974.- No. 15.- P. 103–116.

[15] Marius Junge, Quanhua Xu Theoremes ergodiques maximaux dans les espaces L_p non commutatifs // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I - No. 334.- P. 773–778, (2002).