Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2003) 153 – 157

УДК 517.95

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С НЕРЕГУЛЯРНЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ

А. Ю. Мальцев
Национальный Технический Университет Украины 'КПИ',
Киев, Украина

1. Цель данной статьи - получить решение задачи Коши для параболического уравнения с нерегулярным эллиптическим оператором, зависящим от времени для функций, заданных на гильбертовом пространстве, а так же исследовать свойства этого решения. Она частично обобщает результаты, полученные автором в [1] для "существенно бесконечномерного"случая. Отметим, что задача Коши для параболического уравнения с нерегулярным оператором, но в стационарном случае рассматривалась в [2].

Пусть H - сепарабельное вещественное гильбертово пространство, а $L(H)$ - пространство ограниченных линейных операторов в H. Обозначим через $Q_{n,c}$ множество всех линейных ограниченных операторов ранг которых не превосходит n, а норма не превосходит c. Множество $M \subseteq L(H)$ назовём почти компактным, если $\forall \varepsilon > 0$ существует компактное множество $K \subseteq L(H)$, и числа $n \in \mathbf{N}$, $c > 0$, такие, что $K + Q_{n,c}$ является ε - сетью для M. Класс таких множеств рассматривался, например, в [3]. Пусть множество $\mathfrak{A} \subseteq C^2(H)$ состоит из таких функций из $C^2(H)$ для которых: 1.) $\forall R > 0$ существует почти компактное множество $M \subseteq L(H)$ такое, что $\forall x \in B_R = \{x \mid \|x\| \leq R\} : u''(x) \in M$; 2.) $u''(\cdot)$ равномерно непрерывна на ограниченных подмножествах в H. В банаховом пространстве $C_{bound}(H)$ ограниченных непрерывных на H функций ($\|\varphi\| = \sup_H |\varphi(\cdot)|$) рассмотрим линейное многообразие $\mathfrak{A}_{bound} = \{\varphi \in \mathfrak{A} \mid \varphi, \varphi', \varphi''$ - ограничены и равномерно непрерывны на $H\}$. $\widetilde{X}$ - замыкание $\mathfrak{A}_{bound}$ в $C_{bound}(H)$. Обозначим через $B_C(H)$ пространство самосопряжённых ограниченных операторов в H. Пусть $j \in (B_C(H))^*$. Функционал j называется положительным, если $(\forall D \geq 0) : j(D) \geq 0$. Обозначим через J конус всех положительных функционалов. В соответствии с [3] назовём функционал j существенно бесконечномерным, если в его ядро входят все операторы конечного ранга. В [2] доказано, что всякий положительный функционал $j \in (B_C(H))^*$ можно представить в виде: $j = j_1 + j_2$, где $j_1(\cdot) = SpD(\cdot)$, где $D \geq 0$ - ядерный, а j_2 - существенно бесконечномерный положительный, причём такое разложение единственно. Функционал $SpD(\cdot) : B_C(H) \longrightarrow \mathbb{R}$ действует по правилу: $SpD(C) = SpDC$. В пространстве $\widetilde{X}$ рассмотрим эллиптический дифференциальный оператор $L = L^j$ с областью определения $\mathfrak{A}_{bound}$: $(L\varphi)(x) = (L^j\varphi)(x) = \frac{1}{2}j(\varphi''(x))$ $(x \in H)$. В [2] доказано, что $\forall \varphi \in \mathfrak{A}_{bound} : L\varphi \in \widetilde{X}$. В соответствии с [2] такой оператор L будем называть нерегулярным, если j не может быть представлен в виде $SpD(\cdot)$. Нерегулярный оператор имеет вид $(L\varphi)(x) = \frac{1}{2}SpD\varphi''(x) + \frac{1}{2}\omega(\varphi''(x))$, где $D \geq 0$ - положительный ядерный оператор, а ω - положительный существенно бесконечномерный функционал. При этом $\|\omega\| = \|j\| - SpD$. В [2] с каждым положительным линейным функционалом $j \in J$ была связана (C_0) - полугруппа сжатия $T = T^j$ в пространстве $\widetilde{X}$. Результатом действия оператора $T^j(t)$ на функцию $\varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$ является решение задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}j(u''_{xx}(t,x))$ в точке t с начальным условием φ в нуле. В

[2] доказано, что такое решение существует, единственно и принадлежит $\widetilde{X}$, а так же, что линейное многообразие $\mathfrak{A}_{bound}$ инвариантно относительно операторов $T^j(t)$. Оператор L допускает замыкание и при этом $\bar{L} = T'(0)$ ($T'(0)$ - генератор полугруппы $T(t)$).

2. Рассмотрим в пространстве функций $\widetilde{X}$ следующее уравнение

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = L_x^{j(t)} u(t,x), \tag{1}$$

где $L^{j(t)} : \mathfrak{A}_{bound} \longrightarrow \widetilde{X}$; $\forall \varphi \in \mathfrak{A}_{bound} : \ (L^{j(t)}\varphi)(x) = \frac{1}{2} j(t)(\varphi''(x))$, $t \in [0,T]$. Всюду дальше будем считать, что функция $j(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0,T]$:

$$(\exists C \geq 0)\ (\forall t_1, t_2 \in [0,T]: \quad \|j(t_1) - j(t_1)\| \leq C \mid t_1 - t_2 \mid). \tag{2}$$

Пусть $U(t,s) = T^{j(s)}(t-s)$, где $s \leq t$. Если $q = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n = T\}$ - произвольное разбиение отрезка $[0,T]$ и $t, s \in [0,T]$, причём $t_{j-1} < s \leq t_j < t_m \leq t < t_{m+1}$, положим по определению $U_q(t,s) = U(t,t_m)U(t_m,t_{m-1})\ldots U(t_{j+1},t_j)U(t_j,s)$.

Теорема 1. *Задача Коши для уравнения (1) с начальным условием $\varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$ в пространстве $\widetilde{X}$ имеет и при том единственное решение. Соответствующее эволюционное семейство $\widetilde{U}(t,\tau)$ является сильным пределом по направлению, которое образуют разбиения q отрезка $[0,T]$:*

$$\widetilde{U}(t,\tau)\varphi = \lim_q U_q(t,\tau)\varphi. \tag{3}$$

Доказательство. Сначала докажем, что решение, в случае его существования, единственно. Для этого заметим, что в правой части уравнения (1) стоят замыкаемые операторы $L^{j(t)}$ с общей областью определения $\mathfrak{A}_{bound}$. Полугруппы $T^{j(t)}$ являются сжимающими. Согласно теореме Хилле-Иосиды $\forall \lambda > 0 : \ \|R_{\bar{L}^{j(t)}}(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, где $R_{\bar{L}^{j(t)}}(\cdot)$ - резольвента оператора $\bar{L}^{j(t)}$. Доказательство того, что существует не более одного решения задачи Коши для уравнения (1) проводится по аналогии с доказательством теоремы 3.10 главы 2 [4], с тем отличием, что операторы в правой части (1) не являются замкнутыми, а только допускают замыкание.

Доказательство того, что решение в пространстве $\widetilde{X}$ существует и имеет вид (3) проводится на базе теоремы 2.1 и утверждения 2.2 главы 6 [5]. В качестве всюду плотного в $\widetilde{X}$ и инвариантного относительно всех операторов семейства $U_q(t,\tau)$ ($q \in \{q\}$; $t, \tau \in [0,T]$) множества возьмём $\mathfrak{A}_{bound}$. Инвариантность $\mathfrak{A}_{bound}$ относительно операторов семейства $U_q(t,\tau)$ ($q \in \{q\}$; $t, \tau \in [0,T]$) немедленно вытекает из определения $U_q(t,\tau)$, а так же из инвариантности этого множества относительно операторов $T^{j(\cdot)}(\cdot)$. Далее $\forall q \in \{q\}$, $\forall t, \tau \in [0,T] : \|U_q(t,\tau)\| \leq 1$. Проанализировав доказательство леммы1 из [3], приходим к выводу, что имеет место равенство:

$$\forall j_1, j_2 \in J,\ \forall \psi \in \mathfrak{A}_{bound} : \ T^{j_2}(t)\psi - T^{j_1}(t)\psi = t\int_0^1 T^{j_1+\alpha(j_2-j_1)}(t)(L_2 - L_1)\psi d\alpha, \tag{4}$$

где операторы $L_1 = L^{j_1}$ и $L_2 = L^{j_2}$ таковы, что $\overline{L}_1$ и $\overline{L}_2$ - генераторы полугрупп T^{j_1} и T^{j_2} в пространстве $\widetilde{X}$. С использованием (4), совершенно аналогично тому как это сделано в теореме1 [1], доказывается, что $\forall \varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$ и любых $0 \leq s \leq \theta \leq t \leq T$ верна такая оценка: $\|U(t,s)\varphi - U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi\| \leq C \cdot \sup_{x \in H} \|\varphi''(x)\|(t-\theta)(\theta - s)$, где C - константа из (2). В [2] доказано, что $\forall \varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$ и для любых векторов $h_1, h_2 \in H$ $(\varphi''(\cdot)h_1, h_2) \in \widetilde{X}$, и при этом $\forall j \in J : \ ((T^j(t)\varphi)(\cdot)h_1, h_2) = T^j(t)(\varphi''(\cdot)h_1, h_2)$. Отсюда нетрудно получить, что $\forall j \in J, \forall t \in [0,T] \quad \sup_{x \in H} \|(T^j(t)\varphi)''(x)\| \leq \sup_{x \in H} \|\varphi''(x)\|$. Последовательное применение этого утверждения приводит к тому, что

$$\sup_{q,t,s}\sup_{x\in H}\|(U_q(t,s)\varphi)''(x)\| \le \sup_{x\in H}\|\varphi''(x)\| < +\infty, \tag{5}$$

поскольку $\varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$. Дальнейшее доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы1 из [1].

3. Теперь перейдём к изучению некоторых сойств решения задачи Коши для уравнения (1). Под задачей Коши в треугольнике $T_\Delta = \{(t,s) \mid 0 \le s \le t \le T\}$ для уравнения (1) понимаем задачу про нахождение решения уравнения (1) на отрезке $[s,T]$ при каждом фиксированном $s \in [0,T)$ с начальным условием $\varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$ в точке s. Согласно теореме1 такое решение существует и единственно. Поэтому корректно определён линейный оператор $\widetilde{U}(t,s) : \varphi \mapsto$ решение (1) на отрезке $[s,T]$ с начальным условием φ в точке s.

Теорема 2. *Решение задачи Коши в треугольнике T_Δ для уравнения (1) является непрерывной функцией по совокупности переменных $(t,s) \in T_\Delta$. Решение непрерывно зависит от начальных данных в том смысле, что из равномерной сходимости $\varphi_m \in \mathfrak{A}_{bound}$ к нулю вытекает равномерная по $(t,s) \in T_\Delta$ сходимость к нулю соответствующих решений $\widetilde{U}(t,\tau)\varphi_m$.*

Доказательство. Из доказательства теоремы 2.1 главы 6 [5] следует, что $\forall\varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$ сходимость $\widetilde{U}(t,\tau)\varphi = \lim_q U_q(t,\tau)\varphi$ является равномерной по $(t,\tau) \in T_\Delta$. Поэтому для доказательства непрерывности $\widetilde{U}(t,\tau)\varphi$ по $(t,\tau) \in T_\Delta$ достаточно доказать непрерывность $U_q(t,\tau)\varphi$ при каждом фиксированном разбиении q. Итак, пусть $q = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_n = T\}$ - произвольное разбиение отрезка $[0,T]$, причём $t_{j-1} < \tau < t_j < t_{j+1} < \dots < t_m < t < t_{m+1}$. Тогда $U_q(t,\tau)\varphi = U(t,t_m)U(t_m,t_{m-1})\dots U(t_{j+1},t_j)U(t_j,\tau)\varphi$, и при достаточно малых Δt и $\Delta\tau$ имеет место равенство $U_q(t+\Delta t,\tau+\Delta\tau)\varphi = U(t+\Delta t,t_m)U(t_m,t_{m-1})\dots U(t_{j+1},t_j)U(t_j,\tau+\Delta\tau)\varphi$. Пусть $\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) = U(t_m,t_{m-1})\dots U(t_{j+1},t_j)U(t_j,\tau+\Delta\tau)\varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$; $\widetilde{\psi}_2(\Delta\tau) = U(t_m,t_{m-1})\dots U(t_{j+1},t_j)U(t_j,\tau)\varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\|U_q(t+\Delta t,\tau+\Delta\tau)\varphi - U_q(t,\tau)\varphi\| = \|U(t+\Delta t,t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t,t_m)\widetilde{\psi}_2\| \le \\
&\le \|U(t+\Delta t,t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t,t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau)\| + \|U(t,t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t,t_m)\widetilde{\psi}_2\| \le \\
&\le \|U(t+\Delta t,t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t,t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau)\| + \|U(t_j,\tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j,\tau)\varphi\|.
\end{aligned} \tag{6}$$

Оценим каждое слагаемое в (6). Начнём со второго. Пусть $\Delta\tau < 0$ (случай $\Delta\tau \ge 0$ рассматривается абсолютно аналогично). Вспоминая как определяются операторы $U(\cdot,\cdot)$, нетрудно получить, что

$$\begin{aligned}
&\|U(t_j,\tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j,\tau)\varphi\| \le \|T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi - T^{j(\tau+\Delta\tau)}(0)\varphi\| + \\
&+ \|T^{j(\tau+\Delta\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau} - T^{j(\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau}\|,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\psi_{\Delta\tau} = T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi$. Оценим первое слагаемое в (7).

$$T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi - T^{j(\tau+\Delta\tau)}(0)\varphi = \int_0^{-\Delta\tau}\frac{d}{ds}T^{j(\tau+\Delta\tau)}(s)\varphi ds = \int_0^{-\Delta\tau}T^{j(\tau+\Delta\tau)}(s)L^{j(\tau+\Delta\tau)}\varphi ds. \tag{8}$$

Из (8) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\|T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi - T^{j(\tau+\Delta\tau)}(0)\varphi\| \le \int\limits_0^{-\Delta\tau} \|L^{j(\tau+\Delta\tau)}\varphi\| ds \le \\ &\le \frac{1}{2} \mid \Delta\tau \mid \|j(\tau+\Delta\tau)\| \cdot \sup_{x\in H} \|\varphi''(x)\| \to 0, \quad \text{при } \Delta\tau \to 0-, \end{aligned} \tag{9}$$

поскольку $\|j(\tau+\Delta\tau)\| \to \|j(\tau)\|$, $\Delta\tau \to 0-$. Последнее имеет место, поскольку $j(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0,T]$, а потому непрерывна. Сделаем теперь оценку второго слагаемого в (7). Используя (4) будем иметь:

$$\|T^{j(\tau+\Delta\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau} - T^{j(\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau}\| \le\mid t_j-\tau \mid \cdot \|(L^{j(\tau+\Delta\tau)} - L^{j(\tau)})\psi_{\Delta\tau}\|. \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\mid ((L^{j(\tau+\Delta\tau)} - L^{j(\tau)})\psi_{\Delta\tau})(x) \mid = \frac{1}{2} \mid (j(\tau+\Delta\tau) - j(\tau))(\psi''_{\Delta\tau}(x)) \mid \le \\ &\le \frac{1}{2}\|j(\tau+\Delta\tau) - j(\tau)\| \cdot \|\psi''_{\Delta\tau}(x)\| \le \frac{1}{2}C \mid \Delta\tau \mid \cdot \sup_{x\in H} \|\psi''_{\Delta\tau}(x)\|. \end{aligned} \tag{11}$$

Так как $\psi_{\Delta\tau} = T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi$, можем написать, используя (11) и равенство, при помощи которого получили (5):

$$\|(L^{j(\tau+\Delta\tau)} - L^{j(\tau)})\psi_{\Delta\tau}\| \le \frac{1}{2}C \mid \Delta\tau \mid \cdot \sup_{x\in H} \|\varphi''(x)\|.$$

Из этого неравенства, а так же из (10) следует, что $\|T^{j(\tau+\Delta\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau} - T^{j(\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau}\| \le const \cdot |\Delta\tau| \cdot \sup_{x\in H} \|\varphi''(x)\|$, откуда

$$\|T^{j(\tau+\Delta\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau} - T^{j(\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau}\| \to 0 \quad \text{при } \Delta\tau \to 0-. \tag{12}$$

Из (7), (9), (12) делаем вывод, что $\|U(t_j,\tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j,\tau)\varphi\| \to 0$ при $\Delta\tau \to 0-$. Абсолютно аналогично доказывается, что $\|U(t_j,\tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j,\tau)\varphi\| \to 0$ при $\Delta\tau \to 0+$. Стало быть, окончательно

$$\|U(t_j,\tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j,\tau)\varphi\| \to 0 \quad \text{при } \Delta\tau \to 0. \tag{13}$$

Снова вернёмся к неравенству (6) и сделаем оценку первого слагаемого, стоящего в правой части.

$$\begin{aligned} &\|U(t+\Delta t,t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t,t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau)\| = \|T^{j(t_m)}(t+\Delta t-t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) - \\ &- T^{j(t_m)}(t-t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau)\|. \end{aligned} \tag{14}$$

Поскольку полугруппа $T^{j(t_m)}$ является сильно непрерывной. Значит,

$$s - \lim_{(\Delta t,\Delta\tau)\to(0,0)} T^{j(t_m)}(t+\Delta t-t_m) = T^{j(t_m)}(t-t_m). \tag{15}$$

Далее можем написать, что

$$\lim_{(\Delta t,\Delta\tau)\to(0,0)} \widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) = U(t_m,t_{m-1})U(t_{m-1},t_{m-2})\dots U(t_j,\tau)\varphi. \tag{16}$$

Действительно, согласно определению $\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau)$ и согласно свойствам операторов $U(\cdot,\cdot)$ имеем

$$\begin{aligned} &\|\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t_m,t_{m-1})U(t_{m-1},t_{m-2})\dots U(t_j,\tau)\varphi\| = \\ &= \|U(t_m,t_{m-1})U(t_{m-1},t_{m-2})\dots U(t_j,\tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_m,t_{m-1})U(t_{m-1},t_{m-2})\dots U(t_j,\tau)\varphi\| \le \\ &\le \|U(t_j,\tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j,\tau)\varphi\|, \end{aligned}$$

откуда, используя (13) и получим (16). Из равентства (14), учитывая (15) и (16) заключаем, что

$$\|U(t+\Delta t, t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t, t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau)\| \to 0 \quad \text{при } (\Delta t, \Delta\tau) \to 0. \tag{17}$$

Из неравенства (6), учитывая (17) и (13), делаем окончательный вывод $\|U_q(t+\Delta t, \tau+\Delta\tau)\varphi - U_q(t,\tau)\varphi\| \to 0$ при $(\Delta t, \Delta\tau) \to (0,0)$. Итак, доказана непрерывность $U_q(t,\tau)\varphi$ по $(t,\tau) \in T_\Delta$ при каждом фиксированном разбиении q, а поэтому и непрерывность по $(t,\tau) \in T_\Delta$ функции $\widetilde{U}(t,\tau)\varphi$. Перейдём ко второй части теоремы. Пусть $\varphi_m \in \mathfrak{A}_{bound}$ и $\|\varphi_m\| \to 0$. Нам нужно доказать, что $\|\widetilde{U}(t,\tau)\varphi_m\| \to 0$ при $m \to \infty$ равномерно по $(t,\tau) \in T_\Delta$. Отметим, что $\forall q \in \{q\}, \forall (t,\tau) \in T_\Delta : \|U_q(t,\tau)\| \le 1$, то есть семейство операторов $U_q(t,\tau)$ является равномерным в терминологии [5]. Из предложения 2.1 главы 6 [5] следует, что семейство $\widetilde{U}(t,\tau)$, $((t,\tau) \in T_\Delta)$ так же является равномерным. Поэтому $(\exists C_1 > 0)(\forall (t,\tau) \in T_\Delta, \forall m \in \mathbb{N}) : \|\widetilde{U}(t,\tau)\varphi_m\| \le C_1 \cdot \|\varphi_m\|$. Отсюда сразу же получаем требуемый результат.

Сделаем в конце одно важное замечание. В этой статье для построения эволюционных семейств, дающих решение задачи Коши, используется техника, предложенная в [5]. Существует однако другой подход к построению эволюционных семейств, когда в правой части соответствующего дифференциального уравнения находятся замкнутые операторы, которые имеют общую всюду плотную область определения и являются генераторами некоторых (C_0) - полугрупп сжатия. Этот подход рассматривается в [4]. Он оказывается неприемлемым в случае построения решений задачи Коши для уравнения (1). Это объясняется тем, что в правой части (1) стоят операторы с общей, всюду плотной областью определения и только допускают замыкание (не являются замкнутыми). Если же мы рассмотрим замыкания этих операторов, то они уже не будут иметь общей области определения.

Список литературы

[1] Мальцев А.Ю. *Задача Коши для уравнения с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором, зависящим от времени*//Учёные записки таврического национального университета им. Вернадского.—2002.–т15(54), №1.–с.107-111.

[2] Богданский Ю.В. *Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярным эллиптическим оператором*//Укр. мат. журн.—1989.–т41, №5.–с.584-590.

[3] Богданский Ю.В. *Задача Коши для существенно бесконечномерного параболического уравнения с переменными коэффициентами*//Укр. мат. журн.—1994.–т46, №6.–с.663-670.

[4] Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве* М.:Наука, 1967.—464 с.

[5] Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах* М.:Наука, 1983.—384 с.

А. Ю. Мальцев, Национальный Технический Университет Украины 'КПИ', Киев, Украина