Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2003) 12 - 16

УДК 517.98

О ПОДОБИИ НОРМАЛЬНОМУ ОПЕРАТОРУ ОПЕРАТОРОВ ТИПА $\operatorname{sgn} x\,(D^2 + aD + bI + c\delta)$

А. С. Костенко
Донецкий национальный университет,
Донецк, Украина

В $L^2(\mathbb{R})$ изучается оператор $\operatorname{sgn} x(D^2 + aD + bI)$, порождаемый граничными условиями типа склейки в точке 0. Описывается класс граничных условий, для которых оператор подобен нормальному или самосопряженному. В частности, получен критерий подобия нормальному для операторов $\operatorname{sgn} x(D^2 + aD + bI + c\delta)$ и $\operatorname{sgn} x(D^2 + bI + c\delta')$. Оказывается, эти операторы подобны нормальному для почти всех $c \in \mathbb{C}$.

Ключевые слова: симметрический оператор, граничная тройка, функция Вейля, резольвента, спектр

1. Спектральные задачи вида

$$(Ly)(x) = \lambda r(x) y(x),$$

где L - самосопряжённый дифференциальный оператор, а функция $r(x)$ принимает значения разных знаков, исследуются давно в связи с некоторыми задачами механики и физики (см. библиографию в [13]). В работах Р. Билса [13] и С. Г. Пяткова [10] был рассмотрен вопрос о базисности Рисса собственных функций для такой спектральной задачи. В последнее время активно исследуются аналогичные вопросы для операторов с непрерывным спектром. Именно, вместо базисности Рисса для операторов с непрерывным спектром изучается подобие их нормальным операторам. Так в работе Б. Кургуса и Б. Наймана [14], с помощью теории М. Крейна - Г. Лангера дефинизируемых операторов в пространстве Крейна, было показано, что оператор

$$\tilde{A} = \operatorname{sgn} x D^2, \quad D := \frac{1}{i}\frac{d}{dx}, \quad \operatorname{dom}(\tilde{A}) = W_2^2(\mathbb{R}) \tag{1}$$

подобен самосопряжённому оператору. И. М. Карабаш в [16] предложил простое доказательство этого факта, базирующееся на резольвентном критерии подобия [7, 9]. Еще одно доказательство предложено в работе [4]. Этот результат обобщался в работах [15], [17] и [5]. В работе [11] (см., также, библиографию в [11]) получены достаточные условия подобия самосопряженному операторов вида

$$L = \frac{\operatorname{sgn} x}{|x|^{\alpha} p(x)} D^2, \quad \alpha > -1, \ 0 < c < p(x) < C < +\infty, \tag{2}$$

с естественной областью определения $\operatorname{dom}(L) = W_2^2(p(x)|x|^{\alpha}, \mathbb{R})$.

Отметим, что известные достаточные условия подобия самосопряженным, выражаемые как в терминах характеристической функции оператора, так и близких к ней объектов (см. [8] и имеющуюся там библиографию), для данных операторов не выполняются.

2. Рассмотрим в $L^2(\mathbb{R})$ симметрический оператор

$$A = \operatorname{sgn} x p(D), \quad p(z) = z^2 + az + b, \quad (a, b \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

с областью определения

$$\mathrm{dom}(A) = \{y \in W_2^2(\mathbb{R}) \ : y(0) = y'(0) = 0\}. \tag{4}$$

В заметке изучаются квазиэрмитовы (см. [1]) расширения оператора A, соответствующие различным граничным условиям в точке 0. Наша цель – дать описание тех граничных условий, при которых соответствующий дифференциальный оператор подобен нормальному (самосопряженному) оператору (случай $p(z) = z^2$ полностью рассмотрен в работе [5]).

Заметим, что в рассматриваемом семействе расширений оператора A содержатся операторы, порождаемые в $L^2(\mathbb{R})$ дифференциальными выражениями

$$L_c := \mathrm{sgn}\, x\,(p(D) + c\delta(x))\,, \quad c \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

$$L_c := \mathrm{sgn}\, x\,\left(D^2 + bI + c\delta'(x)\right)\,, \quad c \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

где $\delta(x)$–это δ-функция Дирака (см. примеры 1 и 2).

3. В последнее время для изучения собственных расширений симметрических операторов используется концепция граничных троек и соответствующих им функций Вейля. Приведем основные определения и обозначения следуя работе [3].

Пусть A – симметрический оператор с плотной областью определения $\mathrm{dom}(A)$ в гильбертовом пространстве H и равными индексами дефекта $n_+(A) = n_-(A)$ $(n_\pm(A) = \dim(H \ominus ran(A \pm iI))$

Определение 1 ([2]). Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H}$–сепарабельное гильбертово пространство, а Γ_0, Γ_1–линейные отображения из $\mathrm{dom}(A^*)$ в $\mathcal{H}$, называется граничной тройкой для A^*, если отображение $\Gamma : f \to \{\Gamma_1 f, \Gamma_0 f\}$ из $\mathrm{dom}(A^*)$ в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ сюрьективно и справедлива формула Грина

$$(A^* f, g) - (f, A^* g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \mathrm{dom}(A^*). \tag{7}$$

С каждой граничной тройкой $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ естественно связаны два самосопряженных расширения $\tilde{A}_i = \tilde{A}_i^{\,*} : \mathrm{dom}(\tilde{A}_i) = \ker \Gamma_i, \quad i = 0, 1.$

Определение 2 ([3]). Оператор-функция $M(\lambda)$, определенная равенством

$$M(\lambda)\Gamma_0 f_\lambda = \Gamma_1 f_\lambda, \ (f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda, \ \lambda \in \rho(\tilde{A}_0)) \tag{8}$$

называется функцией Вейля, соответствующей граничной тройки $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$. Здесь $\mathfrak{N}_\lambda := \ker(A^* - \lambda I)$.

4. Оператор A, определяемый равенствами (3), (4), замкнут и имеет индексы дефекта $(2, 2)$. Нетрудно видеть, что

$$A^* = \mathrm{sgn}\, x p(D), \quad \mathrm{dom}(A^*) = \tilde{W}_2^2(\mathbb{R}) := W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+). \tag{9}$$

Далее, совокупность $\Pi_1 = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2, \quad \Gamma_1 f = (f'(+0) + i\frac{a}{2}f(+0), \ -f(-0)), \quad \Gamma_0 f = (f(+0), \ f'(-0) + i\frac{a}{2}f(-0)), \tag{10}$$

будет граничной тройкой для оператора A^*. Пусть $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ($\mathbb{C}^{m\times m}$ - множество $m \times m$ матриц с элементами из $\mathbb{C}$). Определим A_B как сужение оператора A^* на область определения

$$\mathrm{dom}(A_B) = \{f \in \tilde{W}_2^2(\mathbb{R}) : \{f'(+0) + i\frac{a}{2}f(+0), \ -f(-0)\}^t = B\{f(+0), \ f'(-0) + i\frac{a}{2}f(-0)\}^t\}. \tag{11}$$

Другими словами. A_B – это оператор, задаваемый выражением (3) и граничными условиями

$$\begin{cases} f'(+0) + \frac{ia}{2}f(+0) = b_{11}f(+0) + b_{12}(f'(-0) + \frac{ia}{2}f(-0)) \\ -f(-0) = b_{21}f(+0) + b_{22}(f'(-0) + \frac{ia}{2}f(-0)). \end{cases} \tag{12}$$

Ясно, что $A_B^* = A_{B^*}$. В частности, A_B самосопряжён точно тогда, когда $B = B^*$.

Обозначим

$$d := b - \frac{a^2}{4}, \quad \eta_+(\lambda) := \sqrt{\lambda - d}, \quad \eta_-(\lambda) := -i\sqrt{\lambda + d}, \tag{13}$$

где $\sqrt{\lambda}$ ветвь аналитической функции $\sqrt{\lambda}$ с разрезом вдоль $\mathbb{R}_+$ такая, что $\sqrt{\lambda} \geq 0$ на верхнем берегу разреза. Далее, функция Вейля, соответсвующая тройке Π_1, имеет вид

$$M(\lambda) := \begin{pmatrix} i\eta_+(\lambda) & 0 \\ 0 & \frac{i}{\eta_-(\lambda)} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Пусть $\sigma_c(A), \sigma_r(A), \sigma_p(A)$ - непрерывный, остаточный и точечный спектры оператора A.

Предложение 1. *Пусть* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. *Пусть также*

$$\varphi(\lambda) := \det(B - M(\lambda)), \quad \varphi_*(\lambda) := \det(B^* - M(\lambda)) \tag{15}$$

Тогда для оператора A_B *вида* (11) *справедливы следующие утверждения:*

1) $\sigma_c(A_B) = \mathbb{R} \setminus (-d, d)$; 2) $\sigma_r(A_B) = \emptyset$;

3) $\sigma_p(A_B) = \{\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup (-d,\ d) : \varphi(\lambda) = 0\} \bigcup \{\lambda \in \mathbb{C}_- \cup (-d,\ d) : \varphi_*(\overline{\lambda}) = 0\}$.

Здесь и далее будем считать $(-d, d) := \emptyset$, если $d \leq 0$.

Доказательство. Простые вычисления показывают, что во множестве $\mathbb{R} \setminus (-d,\ d)$ собственных значений нет. Из этого легко следует утверждение о непрерывном спектре. Утверждение о точечном и остаточном спектре с очевидностью вытекает из [3, Предложение 4].

Следующая теорема – основной результат заметки.

Теорема 1. *Пусть* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ *и* $|b_{12}| + |b_{21}| \neq 0$. *Тогда оператор* A_B *подобен нормальному, если и только если функции* $\varphi(\lambda)$ *и* $\varphi_*(\lambda)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) φ *и* φ_* *не имеют нулей в* $\sigma_c(A_B) \cup \{\infty\}$;

2) φ *и* φ_* *не имеют нулей кратности 2 во множестве* $\mathbb{C}_+ \cup (-d,\ d)$.

Оператор A_B *подобен самосопряжённому тогда и только тогда, когда функции* $\varphi(\lambda)$ *и* $\varphi_*(\lambda)$ *не имеют нулей в* $\overline{\mathbb{C}_+} \setminus (-d, d)$ *и нулей кратности 2 в* $(-d,\ d)$.

Замечание 2. Случай $b_{12} = b_{21} = 0$ менее интересен потому, что оператор с такими граничными условиями распадается в прямую сумму двух дифференциальных операторов A_+ и A_-, следующего вида

$$A_\pm := p(D), \quad \mathrm{dom}(A_\pm) := \{f \in W_2^2(\mathbb{R}_\pm) :\ f(\pm 0) + h_\pm f'(\pm 0) = 0\}, \quad h_\pm \in \overline{\mathbb{C}}. \tag{16}$$

Такие операторы подробно изучены.

5. Хорошо известно, что условие

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{\mathrm{const}}{\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(T))} \tag{17}$$

необходимо для подобия оператора T нормальному оператору.

Для доказательства теоремы 1 сформулируем несколько предложений.

Предложение 2. *Если $\lambda_0 \in \mathbb{C}_+ \cup (-d,\ d)$ является нулем второго порядка функции $\varphi(\lambda)$ (функции $\varphi_*(\lambda)$) вида (15), то резольвента $(A_B - \lambda I)^{-1}$ имеет в точке λ_0 $(\overline{\lambda_0})$ полюс второго порядка и, значит, оператор A_B не подобен нормальному.*

Рассмотрим теперь случай когда функции $\varphi(\lambda)$ и $\varphi_*(\lambda)$ вида (15) обращаются в нуль на непрерывном спектре $\sigma_c(A_B)$.

Предложение 3. *Если $\lambda_0 \in \sigma_c(A_B)$ является нулем либо функции $\varphi(\lambda)$, либо функции $\varphi_*(\lambda)$, то оценка (17) для оператора A_B не выполнятся в окрестности точки λ_0.*

Предложение 4. *Для того чтобы оценка (17) выполнялась в окрестности ∞ необходимо, чтобы функции $\varphi(\lambda)$ и $\varphi_*(\lambda)$ не имели нуля в бесконечности.*

Из предложений 1 – 4 вытекает необходимость выполнения условий теоремы 1. Доказательство достаточности основанно на резольвентном критерии подобия замкнутого оператора самосопряжённому [7, 9] и теореме вложения Карлесона (см. [6]).

6. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.

Пусть $\delta(x)$ – δ–функция Дирака. Выражение $l_c := JL_c$, где $J : f(x) \to \operatorname{sgn} x f(x)$, а L_c оператор вида (5), порождает в $L^2(\mathbb{R})$ (см. [12]) следующий дифференциальный оператор

$$\begin{cases} l_c := D^2 + aD + bI, \\ \operatorname{dom}(l_c) = \{f \in \tilde{W}_2^2(\mathbb{R}) : f(+0) = f(-0),\ \ f'(+0) - f'(-0) = cf(+0)\}. \end{cases} \tag{18}$$

Ясно, что L_c – это в точности оператор A_B вида (3), (12), причем $B = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Предложение 5. *Пусть L_c – оператор вида (5) и d определяется равенством (13). Справедливы следующие утверждения.*

1) *Если $d < 0$, то оператор L_c подобен нормальному, точно тогда когда $c \neq -x \pm i\sqrt{x^2 - 2d}$, $(x > 0)$ и $c \neq iy$, $y \in [-\sqrt{-2d}, \sqrt{-2d}]$.*
При этом L_c подобен самосопряженному оператору, если и только если $\operatorname{Re}(c) \geq 0$, либо $|\operatorname{Im}(c)| > \sqrt{\operatorname{Re}^2(c) - 2d}$.

2) *В случае $d \geq 0$ оператор L_c подобен нормальному тогда и только тогда, когда $c \neq -\sqrt{x^2 + 2d} \pm ix$, $(x \geq 0)$.*
При этом L_c подобен самосопряженному оператору, если и только если $\operatorname{Re}(c) \geq -\sqrt{2d}$, либо $\operatorname{Re}(c) > -\sqrt{\operatorname{Im}^2(c) + 2d}$.

Пример 2.

Дифференциальное выражение $l_c := D^2 + bI + c\delta'$, $(c \in \mathbb{C})$ порождает в $L^2(\mathbb{R})$ оператор (см. [12])

$$\begin{cases} L_c := D^2 + bI, \\ \operatorname{dom}(L_c) = \{f \in \tilde{W}_2^2(\mathbb{R}) : f'(+0) = f'(-0),\ \ f(+0) - f(-0) = cf'(-0)\}. \end{cases} \tag{19}$$

Оператор JL_c совпадает с оператором A_B вида (3), (12) с матрицей $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix}$.

Предложение 6. *Пусть L_c - оператор вида (6). Справедливы следующие утверждения.*

1) *Если $b \geq 0$, то оператор L_c подобен нормальному, точно тогда когда $c \neq -\frac{x}{\sqrt{1+2bx^2}} \pm ix$, $(x > 0)$.*
При этом L_c подобен самосопряженному оператору, если и только если

$\operatorname{Re}(c) \in (-\infty, -1/\sqrt{2b}] \cup [0, +\infty)$, *либо* $|\operatorname{Re}(c)| > \frac{|\operatorname{Im}(c)|}{\sqrt{1+2b\operatorname{Im}^2(c)}}$.

2) *В случае* $b < 0$ *оператор* L_c *подобен нормальному тогда и только тогда, когда* $c \neq iy$, $y \in \mathbb{R}$ *и* $c \neq -\frac{1}{x} \pm \frac{i}{\sqrt{x^2-2b}}$, $(x > 0)$.

Автор выражает искреннюю благодарность М. М. Маламуду за постановку задачи и руководство работой, а также И. М. Карабашу за ряд ценных замечаний.

Список литературы

[1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* —Харьков: "Вища Школа", 1978, Т. 2.—287 с.

[2] Горбачук В. И., Горбачук М. Л.*Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.*—Киев: Наук. думка, 1984.—284 С.

[3] Деркач В. А., Маламуд М. М. *Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов* // Укр. мат. журн.—1992.—Т. 44, no. 4.—С.435–459.

[4] Капустин В. В.*Несамосопряженные расширен ия симметрических операторов.* // Записки научных семинаров ПОМИ.—2001.—Т.282.—С. 92—105.

[5] Карабаш И. М., Костенко А. С. *О подобии операторов типа* $\operatorname{sgn} x\left(-\frac{d^2}{dx^2} + c\delta\right)$ *нормальному.* // Матем. заметки(в печати).

[6] Кусис П. *Введение в теорию пространств* H^p.—М:"Мир",1984.—386 с.

[7] Маламуд М. М. *Критерий подобия замкнутого оператора самосопряженному* // Укр. мат. журн.—1985.—Т. 37, no. 1.—С.49–56.

[8] Маламуд М. М.*О подобии треугольного оператора диагональному*// Записки научных семинаров ПОМИ.— 2000.—Т. 270,—С. 201—241.

[9] Набоко С. Н. *Об условиях подобия унитарным и самосопряжённым операторам* // Функц. анализ и его прилож.—1984.—Т. 18, no. 1.—С.16–27.

[10] Пятков С. Г. *Некоторые свойства собственных функций линейных пучков* // Сибирский мат. журнал.—1989.—Т. 30, no. 4.—С.111–124.

[11] Фаддеев М. М., Штеренберг Р. Г. *О подобии некоторых дифференциальных операторов самосопряжённым* // Матем. заметки.—2002.—Т. 72. — С.292—303.

[12] Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H. *Solvabel models in quantum mechanics.* — Springer, New-York.—1988.

[13] Beals R. *Indefinite Sturm-Liouville problems and half range completeness* // J. Different. Equat.—1985.—V. 56, no. 3.— P.391–407.

[14] Ćurgus B., Najman B. The operator $-(sgnx)\frac{d^2}{dx^2}$ is similar to selfadjoint operator in $L^2(\mathbb{R})$. // Proc. Amer. Math. Soc.—1995.— V. 123.—P.1125–1128.

[15] Ćurgus B., Najman B. *Positive differential operator in Krein space* $L^2(\mathbb{R})$. // Oper. Theory Adv. and Appl.,Birkhäuser, Basel. 1996.— V. 87.—P.95–104.

[16] Karabash I. M. *The operator* $-\operatorname{sgn} x\frac{d^2}{dx^2}$ *is similar to a self-adjoint operator in* $L^2(\mathbb{R})$.// Spectral and evolutionary problems, Proc. of the Eighth Crimean Autumn Math. School-Symposium, Simferopol.-1998.-Vol.8.-P.23–26.

[17] Karabash I. M., *J-selfadjoint ordinary differential operators similar to selfadjoint operators* // Methods of Functional Analysis and Topology.—2000.—V. 6, no. 2.—P.22–49.

Kostenko A.S., Department of Mathematics, Donetsk National University, Universitetskaja 24, 83055 Donetsk, Ukraine

*E-mail:*aleksey_kostenko@mail.ru