Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2003) 213 - 220

УДК 518.7–519.6

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ЗАДАНИИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С НЕКОММУТИРУЮЩИМИ МАТРИЦАМИ

Е.Н. Хайлов
Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

В работе рассматривается множество достижимости однородной билинейной системы $\dot{x} = (A + uB)x$ со скалярным ограниченным управлением. При определенных предположениях показывается, что каждой точке множества достижимости отвечает кусочно-постоянное управление, оценка числа переключений которого связана с размерностью фазового пространства исходной системы. Данный факт обобщает и развивает результаты, полученные ранее в [1-4]. Он позволяет использовать моменты переключений таких управлений для описания множества достижимости рассматриваемой системы.

Рассмотрим билинейную систему со скалярным управлением вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + u(t)B)x(t), \ t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \ x_0 \neq 0, \end{cases} \tag{1}$$

где A, B - матрицы порядка $n \times n$, $AB \neq BA$ и $x(\cdot) \in R^n$.

Под классом допустимых управлений $P(T)$ понимаем всевозможные измеримые функции $u(t)$, удовлетворяющие неравенству $0 \le u(t) \le \rho$ почти всюду на отрезке $[0, T]$.

Пусть Y есть множество различных действительных матриц порядка $n \times n$.

Обозначим через $[C, D]$ коммутатор матриц $C, D \in Y$ ([5]). Тогда, следуя [6], определим матрицы :

$$[B, A]_1 = [B, A]; \ [B, A]_{k+1} = [[B, A]_k, A], \ k \ge 1. \tag{2}$$

Обозначим через $X(T)$ множество достижимости системы (1) из точки x_0 в момент времени T, т.е. множество значений $x(T)$ решений (1), отвечающих всевозможным управлениям $u(\cdot) \in P(T)$.

Известно ([7]), что множество $X(T)$ компактно в R^n.

Рассмотрим матрицу $G_A = E \otimes A - A \otimes E$, где E - единичная матрица, а $C \otimes D$ - кронекерово произведение матриц $C, D \in Y$ ([5]). Пусть $h(\mu) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k \mu^k$, $l = n^2 - n + 1$ - характеристический многочлен матрицы G_A, деленный на μ^{n-1}, в котором $\alpha_l \neq 0$. В [6] установлено равенство

$$\sum_{k=1}^{l} \alpha_k [B, A]_k = 0. \tag{3}$$

Далее, в последующих рассуждениях считаем выполненными следующие предположения.

Condition 1. Ранг матрицы, составленной из векторов $[B, A]_k x_0$, $k = \overline{1, (l-1)}$ равен n.

Condition 2. Для матриц $[[B,A]_k,B]$, $k=\overline{1,(l-1)}$ справедливы представления :

$$[[B,A]_k,B]=\sum_{i=1}^{k}\Delta_i^k[B,A]_i+\delta^k[B,A]_{k+1},\ k=\overline{1,(l-1)}, \tag{4}$$

где Δ_i^k, $i=\overline{1,k}$; δ^k, $k=\overline{1,(l-1)}$ - некоторые числа.

В работе [8] последнее предположение названо условием Суссмана.

Определим для чисел Δ_i^k, $i=\overline{1,k}$; α_k, δ^k, $k=\overline{1,(l-1)}$ и величины $v\in[0,\rho]$ матрицу $H(v)$ порядка $(l-1)\times(l-1)$ с элементами $h_{i,j}(v)$ следующим образом :

$$h_{i,j}(v)=\Delta_j^i v,\ j=\overline{1,i};\ h_{i,i+1}(v)=1+\delta^i v;\ h_{i,j}(v)=0,\ j=\overline{(i+2),(l-1)} \tag{5}$$

для $i=\overline{1,(l-2)}$ и

$$h_{l-1,j}(v)=\Delta_j^{l-1}v-\frac{\alpha_j}{\alpha_l}(1+\delta^{l-1}v),\ j=\overline{1,(l-1)}. \tag{6}$$

Пусть выполнены предположения.

Condition 3. Для чисел δ^i, $i=\overline{1,(l-2)}$ имеют место неравенства : $\delta^i>-\rho^{-1}$, $i=\overline{1,(l-2)}$.

Condition 4. При любом $v\in[0,\rho]$ корни $\lambda_i(v)$, $i=\overline{1,(l-1)}$ характеристического многочлена матрицы $H(v)$ вещественные и удовлетворяют неравенствам :

$$\lambda_1(v)\le\nu_1\le\lambda_2(v)\le\cdots\le\lambda_{l-2}(v)\le\nu_{l-2}\le\lambda_{l-1}(v),$$

где ν_i, $i=\overline{1,(l-2)}$ - постоянные, подчиняющиеся соотношению : $\nu_1<\cdots<\nu_{l-2}$.

Способы проверки этого предположения ранее обсуждались в [2,9,10].

Теперь от управлений $u(\cdot)\in P(T)$ перейдем к новым управляющим функциям $z(\cdot)$ с помощью замены

$$z(t)=\int_t^T u(\xi)d\xi,\ t\in[0,T]. \tag{7}$$

Очевидно, что $z(T)=0$ и $u(t)=-\dot z(t)$, $t\in[0,T]$.

Обозначим через $Z(T)$ класс всех скалярных абсолютно непрерывных функций $z(\cdot)$ таких, что $z(T)=0$ и $-\dot z(t)\in[0,\rho]$ при почти всех $t\in[0,T]$.

Для произвольного значения $\sigma\in[0,\rho T]$ введем множество :

$$Z_\sigma(T)=\left\{z(\cdot)\in Z(T):z(0)=\sigma\right\}.$$

Справедливо следующее равенство :

$$Z(T)=\bigcup_{\sigma\in[0,\rho T]}Z_\sigma(T). \tag{8}$$

Теперь, фиксируем величину $\sigma\in[0,\rho T]$. Обозначим через $Z_\sigma^*(T)$ множество всех таких $z(\cdot)\in Z_\sigma(T)$, что $-\dot z(t)\in\{0;\rho\}$ всюду на отрезке $[0,T]$ за исключением, быть может, конечного числа точек. Заметим, что при $\sigma=0$, $\sigma=\rho T$ множества $Z_\sigma(T)$, $Z_\sigma^*(T)$ совпадают и состоят из одного элемента : при $\sigma=0$ - функции $z(t)=0$, $t\in[0,T]$, а при $\sigma=\rho T$ - функции $z(t)=\rho(T-t)$, $t\in[0,T]$. Для остальных величин $\sigma\in(0,\rho T)$ имеет место утверждение, доказанное в работе [4].

Lemma 1. При каждом значении $\sigma\in(0,\rho T)$ множество $Z_\sigma^*(T)$ всюду плотно в множестве $Z_\sigma(T)$.

Пусть задано значение $\sigma \in (0, \rho T)$. Рассмотрим для некоторого $m \geq 1$ следующие множества :

$$S_m = \left\{ (z_1, z_2, \ldots, z_m)^T \in \mathrm{R}^m : 0 \leq z_m \leq z_{m-1} \leq \cdots \leq z_2 \leq z_1 \leq \sigma \right\},$$

$$W_m = \left\{ (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)^T \in \mathrm{R}^m : \tau_j \geq 0, j = \overline{1, m}; \sum_{j=1}^{m} \tau_j = T - \frac{\sigma}{\rho} \right\},$$

где знак ^{T} означает транспонирование.

Для наборов $(z_1, z_2, \ldots, z_m)^T \in S_m$, $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)^T \in W_m$ полагаем :

$$t_1^1 = \frac{\sigma - z_1}{\rho}; t_j^2 = t_j^1 + \tau_j, j = \overline{1, m}; t_{j+1}^1 = t_j^2 + \frac{z_j - z_{j+1}}{\rho}, j = \overline{1, (m-1)}. \tag{9}$$

Заметим, что $0 \leq t_1^1 \leq t_1^2 \leq \cdots \leq t_m^1 \leq t_m^2 \leq T$. На отрезке $[0, T]$ определим кусочно-линейную функцию :

$$z(t) = \begin{cases} \sigma - \rho t, & 0 \leq t \leq t_1^1, \\ z_j, & t_j^1 \leq t \leq t_j^2, \quad j = \overline{1, m}, \\ z_j - \rho(t - t_j^2), & t_j^2 \leq t \leq t_{j+1}^1, \quad j = \overline{1, (m-1)}, \\ z_m - \rho(t - t_m^2), & t_m^2 \leq t \leq T. \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно, что таким образом заданная функция $z(\cdot) \in Z_\sigma^*(T)$. Из результатов работы [1] следует взаимно однозначное соответствие между всевозможными парами наборов из множеств S_m, W_m при всех $m \geq 1$ и множеством $Z_\sigma^*(T)$.

Рассмотрим теперь точку $y \in X(T)$ такую, что ей отвечает управляющая функция $w(\cdot) \in Z_\sigma^*(T)$ для некоторого $\sigma \in (0, \rho T)$. Из этого включения вытекает существование значения m и наборов $(w_1, w_2, \ldots, w_m)^T \in S_m$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)^T \in W_m$, по которым функция $w(t)$ строится согласно формулам (9),(10). Имеет место утверждение.

Lemma 2. Для определенной выше точки $y \in X(T)$ справедливо представление :

$$y = \mathrm{e}^{\frac{w_m}{\rho}(A+\rho B)} \mathrm{e}^{(T - \frac{\sigma}{\rho})A} Q_{m-1}(\vartheta_{m-1}) Q_{m-2}(\vartheta_{m-2}) \cdots$$
$$Q_2(\vartheta_2) Q_1(\vartheta_1) \mathrm{e}^{\frac{\sigma - w_1}{\rho}(A+\rho B)} x_0, \tag{11}$$

где

$$Q_i(\vartheta_i) = \mathrm{e}^{-\vartheta_i A} \mathrm{e}^{\frac{w_i - w_{i+1}}{\rho}(A+\rho B)} \mathrm{e}^{\vartheta_i A}, \ \vartheta_i = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_i, \ i = \overline{1, (m-1)}. \tag{12}$$

Здесь e^D есть экспоненциал матрицы $D \in Y$ ([11]).

Доказательство. Доказательство данного факта заключается в интегрировании системы (1) для управления $v(t) = -\dot{w}(t)$, $v(\cdot) \in P(T)$, отвечающего точке y, и преобразовании полученного выражения с учетом соотношений (9),(10) и (12). □

Введем множество :

$$\Lambda_{m-1}(T) = \left\{ (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1})^T \in \mathrm{R}^{m-1} : 0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \leq \varphi_{m-1} \leq T - \frac{\sigma}{\rho} \right\}.$$

Видим, что фигурирующие в условии леммы 2 значения ϑ_i, $i = \overline{1, (m-1)}$ удовлетворяют включению $(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1})^T \in \Lambda_{m-1}(T)$.

Обозначим через $\operatorname{int} \Omega$, $\partial \Omega$ внутренность и границу компакта $\Omega \subset \mathrm{R}^n$.

Установим справедливость следующего утверждения.

Lemma 3. Существует такая управляющая функция $\bar{w}(\cdot) \in Z^*_\sigma(T)$, отвечающая рассматриваемой точке $y \in X(T)$, что для соответствующих наборов $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_m)^T \in S_m$, $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_m)^T \in W_m$ имеет место неравенство $m \leq (l-1)$.

Доказательство. Доказательство. Для точки y выполняется представление (11). Не ограничивая общности считаем, что в наборе $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T$ - все β_i, $i = \overline{1,m}$ положительные и $(w_1, w_2, \dots, w_m)^T \in \operatorname{int} S_m$. Тогда величины, определяемые в (12), подчиняются включению $(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{m-1})^T \in \operatorname{int} \Lambda_{m-1}(T)$.

Для того, чтобы установить справедливость желаемого факта предположим, что $m > (l-1)$ и покажем возможность уменьшения значения m до требуемого.

Полагая величины w_i, $i = \overline{1,m}$ фиксированными, рассмотрим на множестве $\Lambda_{m-1}(T)$ систему нелинейных уравнений :

$$F(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{m-1}) = \tag{13}$$
$$e^{\frac{w_m}{\rho}(A+\rho B)} e^{(T-\frac{\sigma}{\rho})A} Q_{m-1}(\chi_{m-1}) Q_{m-2}(\chi_{m-2}) \dots Q_2(\chi_2) Q_1(\chi_1) e^{\frac{\sigma - w_1}{\rho}(A+\rho B)} x_0 - y.$$

Заметим, что функция $F(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{m-1})$ является аналитической на множестве $\Lambda_{m-1}(T)$. Из (11) вытекает равенство $F(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{m-1}) = 0$, которое означает разрешимость уравнения (13).

Далее, столбцы матрицы Якоби системы уравнений (13) выражаются формулами :

$$\frac{\partial F}{\partial \chi_i}(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{m-1}) = e^{\frac{w_m}{\rho}(A+\rho B)} e^{(T-\frac{\sigma}{\rho})A} Q_{m-1}(\chi_{m-1}) Q_{m-2}(\chi_{m-2}) \dots$$
$$Q_{i+1}(\chi_{i+1}) \dot{Q}_i(\chi_i) Q_{i-1}(\chi_{i-1}) \dots Q_2(\chi_2) Q_1(\chi_1) e^{\frac{\sigma - w_1}{\rho}(A+\rho B)} x_0, \tag{14}$$
$$\dot{Q}_i(\chi_i) = e^{-\chi_i A} [e^{\frac{w_i - w_{i+1}}{\rho}(A+\rho B)}, A] e^{\chi_i A}, \ i = \overline{1,(m-1)}.$$

Покажем, что матрица Якоби имеет ранг n в каждой точке $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{m-1})^T \in \Lambda_{m-1}(T)$. Для этого предположим противное. Пусть нашлась точка $(\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \dots, \bar{\chi}_{m-1})^T \in \Lambda_{m-1}(T)$, для которой рассматриваемая матрица Якоби имеет ранг меньший, чем n. Этот факт означает существование для соотношений (14) такого ненулевого вектора $\psi_0 \in R^n$, что

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \chi_i}(\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \dots, \bar{\chi}_{m-1}), \psi_0\right) = 0, \ i = \overline{1,(m-1)}.$$

Эти равенства после надлежащих преобразований приводятся к виду :

$$\int\limits_{\bar{\chi}_i + \frac{\sigma - w_i}{\rho}}^{\bar{\chi}_i + \frac{\sigma - w_{i+1}}{\rho}} ([A+\rho B, A] x(s), \psi(s)) ds = 0, \ i = \overline{1,(m-1)}. \tag{15}$$

где $x(t)$ - траектория системы (1), подчиненная управлению $\bar{v}(t)$, отвечающему управляющей функции, построенной по наборам $(w_1, w_2, \dots, w_m)^T$, $(\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2 - \bar{\chi}_1, \dots, \bar{\chi}_{m-1} - \bar{\chi}_{m-2}, (T - \frac{\sigma}{\rho}) - \bar{\chi}_{m-1})^T$, а $\psi(t)$ есть решение сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -(A + \bar{v}(t) B)^T \psi(t), \ t \in [0,T], \\ \psi(T) = \psi_0. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что функция $\bar{v}(t)$ принимает на отрезке $[0,T]$ лишь значения $\{0; \rho\}$ и имеет $2m$ точек разрыва, в которых мы доопределим ее значения соответствующими пределами слева.

Согласно теоремы о среднем ([12]) определены значения :

$$\gamma_i \in (\bar{\chi}_i + \frac{\sigma - w_i}{\rho}, \bar{\chi}_i + \frac{\sigma - w_{i+1}}{\rho}), \ i = \overline{1,(m-1)},$$

через которые равенства (15) с учетом (2) записываются в виде :

$$([B, A]_1 x(\gamma_i), \psi(\gamma_i)) = 0, \; i = \overline{1, (m-1)}. \tag{17}$$

Из определения значений $\bar{\chi}_i$, γ_i, $i = \overline{1, (m-1)}$ следуют неравенства $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_{m-1} < T$.

Далее, введем функции :

$$g_k(t) = ([B, A]_k x(t), \psi(t)), \; k = \overline{1, (l-1)}. \tag{18}$$

При этом, видим из (17), что функция $g_1(t)$ имеет $(m-1)$ нуль на интервале $(0, T)$.

Дифференцируя функции $g_k(t)$, $k = \overline{1, (l-1)}$, привлекая при этом системы уравнений (1),(16), равенство (3) и соотношения (4), получим систему линейных дифференциальных уравнений для функций (18) :

$$\begin{cases} \dot{g}_k(t) = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i^k \bar{v}(t) g_i(t) + (1 + \delta^k \bar{v}(t)) g_{k+1}(t), \; k = \overline{1, (l-2)}, \\ \dot{g}_{l-1}(t) = \sum_{i=1}^{l-1} (\Delta_i^{l-1} \bar{v}(t) - \frac{\alpha_i}{\alpha_l}(1 + \delta^{l-1}\bar{v}(t))) g_i(t), \; t \in [0, T]. \end{cases} \tag{19}$$

Заметим, что условия 1,3 гарантируют конечность числа нулей функции $g_1(t)$ на рассматриваемом интервале.

Оценим теперь число нулей функции $g_1(t)$, опираясь на систему уравнений (19). Для этого, привлекая определенную в (5) и (6) матрицу $H(v)$, перепишем систему (19) в матричном виде :

$$\dot{g}(t) = H(\bar{v}(t)) g(t), \; t \in [0, T],$$

где $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_{l-1}(t))^T$. Пусть $b = (1, 0, \ldots, 0)^T \in \mathrm{R}^{l-1}$.

Рассмотрим векторы

$$q_j(\bar{v}(t)) = ((H(\bar{v}(t)))^T)^{j-1} b, \; j = \overline{1, l}$$

на каждом интервале постоянства функции $\bar{v}(t)$, $t \in [0, T]$. Введем функцию $\xi(t) = (b, g(t))$, $t \in [0, T]$. Рассуждая далее как и при обосновании теоремы 1 работы [13], находим выражения $\xi^{(j-1)}(t) = (q_j(\bar{v}(t)), g(t))$, $j = \overline{2, l}$, выполняющиеся на интервалах постоянства функции $\bar{v}(t)$, $t \in [0, T]$. Заметим, что на этих интервалах матрица $\Phi(\bar{v}(t))$, составленная из столбцов $q_j(\bar{v}(t))$, $j = \overline{1, (l-1)}$ невырождена в силу условия 3.

Определим функции $r_j(\bar{v}(t))$, $j = \overline{1, (l-1)}$ как решения алгебраической системы уравнений :

$$\Phi(\bar{v}(t)) \begin{pmatrix} -r_{l-1}(\bar{v}(t)) \\ \cdots \\ -r_1(\bar{v}(t)) \end{pmatrix} = q_l(\bar{v}(t))$$

на каждом интервале постоянства функции $\bar{v}(t)$, $t \in [0, T]$. Домножая это равенство скалярно на $g(t)$ и учитывая выражения для $\xi^{(i)}(t)$, $i = \overline{0, (l-1)}$, находим линейное дифференциальное уравнение для функции $\xi(t)$:

$$\xi^{(l-1)}(t) + r_1(\bar{v}(t)) \xi^{(l-2)}(t) + \cdots + r_{l-2}(\bar{v}(t)) \xi^{(1)}(t) + r_{l-1}(\bar{v}(t)) \xi(t) = 0.$$

Поставим в соответствие этому уравнению обобщенное характеристическое уравнение :

$$\lambda^{l-1}(t) + r_1(\bar{v}(t)) \lambda^{l-2}(t) + \cdots + r_{l-2}(\bar{v}(t)) \lambda(t) + r_{l-1}(\bar{v}(t)) = 0.$$

Заметим, что данное уравнение определено при всех $t \in [0, T]$. Кроме того, при каждом $t \in [0, T]$ это уравнение является характеристическим уравнением матрицы $H(\bar{v}(t))$. Тогда, из условия 4 и следствия 4.2 работы [14] вытекает, что функция $\xi(t) = g_1(t)$ имеет на интервале $(0, T)$ не более $(l-2)$ различных нулей. С другой стороны, она обращается в нуль в точках γ_i, $i = \overline{1, (m-1)}$, $m > (l-1)$. Имеем противоречие. Значит предположение неверно, и для каждой точки $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{m-1})^T \in \Lambda_{m-1}(T)$ ранг матрицы Якоби системы уравнений (13) равен n.

Введем множество индексов :

$$J = \left\{ (j_1, j_2, \ldots, j_n) : j_i \in \mathrm{N}, i = \overline{1,n}; 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_n \le (m-1) \right\}.$$

Для каждого набора $(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in J$ определим квадратную матрицу :

$$R_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{m-1}) =$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \chi_{j_1}}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{m-1}) \frac{\partial F}{\partial \chi_{j_2}}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{m-1}) \cdots \frac{\partial F}{\partial \chi_{j_n}}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{m-1}) \right)$$

и с ее помощью множество :

$$\Omega_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}(T) =$$

$$\left\{ (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{m-1})^T \in \mathrm{R}^{m-1} : \operatorname{rang} R_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{m-1}) = n \right\}, \tag{20}$$

где $\operatorname{rang} D$ есть ранг матрицы $D \in Y$.

Известно ([15]), что каждое такое множество либо является областью, либо состоит из объединения попарно непересекающихся областей. Поэтому из сказанного выше следует, что множество $\bigcup_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in J} \Omega_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}(T)$ образует открытое покрытие множества $\Lambda_{m-1}(T)$. Тогда ([16]), существуют такие множества $\Theta_j(T)$, $j = \overline{1,M}$ вида (20), что каждое из них является областью и выполняется включение $\Lambda_{m-1}(T) \subset \bigcup_{j=1}^{M} \Theta_j(T)$. Без ограничения общности считаем, что $(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1})^T \in \Theta_1(T)$.

Воспользуемся теперь теоремой о глобальной разрешимости системы уравнений (13) ([17]) поочереди на каждом множестве $\Theta_j(T) \cap \Lambda_{m-1}(T)$, $j = \overline{1,M}$, начиная с первого, в котором расположена точка $(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1})^T$. В результате получим точку $(\chi_1^*, \chi_2^*, \ldots, \chi_{m-1}^*)^T \in \partial\Lambda_{m-1}(T)$, для которой справедливо равенство $F(\chi_1^*, \chi_2^*, \ldots, \chi_{m-1}^*) = 0$. Следовательно, в представлении (11) точки y по крайней мере один множитель отсутствует. Этот процесс повторяем снова, перенумеровав различные компоненты χ_i^* и рассматривая их в качестве ϑ_i. Аналогичное следует проделать и с w_i. Это будет происходить до тех пор, пока $m > (l-1)$. В конце концов, представление вектора y будет иметь вид :

$$y = \mathrm{e}^{\frac{\bar{w}_{l-1}}{\rho}(A+\rho B)} \mathrm{e}^{(T-\frac{\sigma}{\rho})A} Q_{l-2}(\bar{\vartheta}_{l-2}) Q_{l-3}(\bar{\vartheta}_{l-3}) \ldots Q_2(\bar{\vartheta}_2) Q_1(\bar{\vartheta}_1) \mathrm{e}^{\frac{\sigma-\bar{w}_1}{\rho}(A+\rho B)} x_0,$$

где $\{\bar{w}_i\}_{i=1}^{l-1} \in \{w_i\}_{i=1}^{m}$. Поэтому, вычисляя значения $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \ldots, \bar{\beta}_{l-1})^T \in W_{l-1}$ и используя формулы (9),(10), находим искомую функцию $\bar{w}(t)$, $t \in [0,T]$. Требуемый факт полностью доказан. □

Установим теперь главное утверждение настоящей работы.

Theorem. Каждой точке $x \in X(T)$ отвечает кусочно-постоянное управление $\bar{u}(t)$, $t \in [0,T]$, принимающее значения $\{0; \rho\}$ и имеющее не более $2(n^2 - n)$ переключений на отрезке $[0,T]$.

Доказательство. Доказательство. Точке $x \in X(T)$ отвечает управляющая функция $z(\cdot) \in Z(T)$. В силу (8) такое включение означает, что определена величина $\sigma \in [0, \rho T]$, для которой $z(\cdot) \in Z_\sigma(T)$. Если $\sigma = 0$ или $\sigma = \rho T$, то желаемый факт обоснован, поскольку в этих случаях точке x отвечает управление $\bar{u}(t)$, $t \in [0,T]$ без переключений. Пусть теперь $\sigma \in (0, \rho T)$. Согласно лемме 1 для функции $z(t)$ существует последовательность функций $\{w_k(\cdot)\}_{k=1}^{+\infty} \subset Z_\sigma^*(T)$, которая при $k \to +\infty$ равномерно на отрезке $[0,T]$ сходится к функции $z(t)$. Тогда, определяя для каждой функции $w_k(t)$, $t \in [0,T]$ соответствующее значение m и наборы $(w_1^k, w_2^k, \ldots, w_m^k)^T \in S_m$, $(\beta_1^k, \beta_2^k, \ldots, \beta_m^k)^T \in W_m$, по формулам (11),(12) находим последовательность векторов $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset X(T)$, отвечающих управляющим функциям $\{w_k(\cdot)\}_{k=1}^{+\infty} \subset Z_\sigma^*(T)$. Из теоремы 3 работы [18] вытекает сходимость последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ при $k \to +\infty$ к точке x. В силу леммы 3 каждой точке $x_k \in X(T)$ отвечает управляющая функция $\bar{w}_k(\cdot) \in Z_\sigma^*(T)$ такая, что у задающих ее наборов $(\bar{w}_1^k, \bar{w}_2^k, \ldots, \bar{w}_m^k)^T \in S_m$, $(\bar{\beta}_1^k, \bar{\beta}_2^k, \ldots, \bar{\beta}_m^k)^T \in W_m$ величина m удовлетворяет неравенству $m \leq (l-1)$. Согласно теореме Арцела ([19]) из последовательности функций $\{\bar{w}_k(\cdot)\}_{k=1}^{+\infty}$ можно выделить подпоследовательность $\{\bar{w}_{k_s}(\cdot)\}_{s=1}^{+\infty} \subset Z_\sigma^*(T)$, равномерно сходящуюся на отрезке $[0,T]$ к функции $\bar{z}(t)$. Причем, для этой управляющей функции имеет место включение $\bar{z}(\cdot) \in Z_\sigma^*(T)$, а у отвечающих ей наборов $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_m)^T \in S_m$, $(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \ldots, \bar{\tau}_m)^T \in W_m$ величина m подчиняется тому же неравенству $m \leq (l-1)$. Пусть точка $\bar{x} \in X(T)$ отвечает управляющей функции $\bar{z}(t)$, $t \in [0,T]$. Снова учитывая результаты работы [18], имеем сходимость соответствующей последовательности $\{x_{k_s}\}_{s=1}^{+\infty}$ при $s \to +\infty$ к точке $\bar{x}$. Поскольку последовательность $\{x_{k_s}\}_{s=1}^{+\infty}$ является подпоследовательностью последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$, то точки $\bar{x}$ и x совпадают. Значит, управляющая функция $\bar{z}(t)$, $t \in [0,T]$ отвечает точке $x \in X(T)$. Теперь уже привлекая формулу (7), можно восстановить требуемое управление $\bar{u}(t)$, $t \in [0,T]$. При этом, заметим, что в найденном для величины m неравенстве $l - 1 = n^2 - n$. Утверждение полностью доказано. □

В заключение автор выражает признательность А.В. Кряжимскому за постояннное внимание к этой работе и плодотворное обсуждение полученных в ней результатов.

Список литературы

[1] Heymann V.I., Kryazhimskii A.V. *On finite-dimensional parametrizations of attainability sets* // Applied Mathematics and Computation. 1996. vol.78, N 2,3. P. 137-151.

[2] Хайлов Е.Н. *Об экстремальных управлениях однородной билинейной системы, управляемой в положительном ортанте* // Труды Математического института им В.А. Стеклова. 1998. т.220. С. 217-235.

[3] Хайлов Е.Н. *О решении задачи оптимального управления с терминальным функционалом для однородной билинейной системы* // Вестник Московского университета. Сер.15, Вычислительная математика и кибернетика. 1998. N 1. С. 26-30.

[4] Хайлов Е.Н. *Множество достижимости однородной билинейной системы с квазикоммутирующими матрицами* // Дифференциальные Уравнения. 2002. т.38, N 12. С. 1620-1626.

[5] Прасолов В.В. *Задачи и теоремы линейной алгебры*. М., 1996.

[6] Hajek O., Loparo K.A. *Bilinear control : geometric properties of reachable sets* // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 1988. vol.302. P. 262-273.

[7] Ли Э.Б., Маркус Л. *Основы оптимального управления*. М., 1972.

[8] Вахрамеев С.А. *Теоремы релейности и смежные вопросы* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1998. т.220. С. 49-112.

[9] Либерзон М.Р. *Признак абсолютной устойчивости нестационарных систем* // Автоматика и Телемеханика. 1986. N 2. С. 39-46.

[10] Джури Э. *Инноры и устойчивость динамических систем*. М., 1979.

[11] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. М., 1988.

[12] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа. Том 1*. М., 1982.

[13] Тонков Е.Л. *Неосцилляция и число переключений в линейной нестационарной системе, оптимальной по быстродействию* // Дифференциальные Уравнения. 1973. т.9, N 12. С. 2180-2185.

[14] Левин А.Ю. *Неосцилляция решений уравнения* $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$ // Успехи Математических Наук. 1969. т.24, N 2. С. 43-96.

[15] Елкин В.И. *Редукция нелинейных управляемых систем : Дифференциально-геометрический подход*. М., 1997.

[16] Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа. Том 3*. М., 1989.

[17] Shigeo I. *A note on global implicit function theorems* // IEEE. Transactions on Circuits and Systems. 1985. vol.32, N 5. P. 503-505.

[18] Celikovsky S. *On the representation of trajectories of bilinear systems and its applications* // Kybernetika. 1987. vol.23, N 3. P. 198-213.

[19] Ильин В.А., Поздняк Э.Г. *Основы математического анализа. Том 2.* М., 1980.

E-mail:`khailov@cs.msu.su`