Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2003) 8 – 11

УДК 517.98

# О ПОДОБИИ J-САМОСОПРЯЖЁННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С КОНЕЧНОЗОННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ-САМОСОПРЯЖЁННОМУ

И. М. Карабаш, М. М. Маламуд,
Донецкий национальный университет,
Донецк, Украина

**1.** Напомним, что замкнутые операторы $A_1$ и $A_2$ в банаховом пространстве $X$ с областями определения $D(A_1)$ и $D(A_2)$ называют подобными, если найдётся топологический автоморфизм $T$ пространства $X$ такой, что $T(D(A_1)) = D(A_2)$ и $A_2 = TA_1T^{-1}$.

Пусть

$$L := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad q = \overline{q}, \tag{1}$$

самосопряженный оператор Штурма-Лиувилля в $L^2(\mathbb{R})$ с ограниченным потенциалом $q$, ($|q(x)| \le c$), а $J$ – оператор умножения на функцию $\operatorname{sgn} x$, $J : f \to \operatorname{sgn} x \cdot f$.

В заметке изучается подобие оператора $A := JL$ самосопряженному оператору в случае почти периодического потенциала $q$. Заметим, что

$$D(A^*) = \{y \in W_2^2(\mathbb{R}) : y(+0) = y(-0),\ y'(+0) = -y'(-0)\} \neq D(A) = W_2^2(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Более того, из (2) вытекает, что оператор $A$ имеет двумерную "мнимую компоненту".

Заметим, что спектральные задачи вида

$$(Ly)(x) = \lambda r(x)y(x),$$

где $L$—самосопряжённый дифференциальный оператор, а $r$—знакопеременный вес, исследовались давно в связи с некоторыми задачами механики и физики. Так, в работах [1] и [14] изучен вопрос о базисности Рисса из собственных функций упомянутой задачи.

В работах [3] и [6] показано, что оператор $A$ с постоянным потенциалом $q(x) \equiv c = const$ подобен самосопряженному в точности тогда, когда $q = c \ge 0$.

**2.** Напомним (см. [8], [12]), что потенциал $q$ (оператор $L$) называют конечнозонным (бесконечнозонным), если $q$—почти периодическая функция и оператор $L$ имеет конечное (бесконечное) число запрещённых зон (лакун) $(-\infty, \lambda_0)$ и $\{(\lambda_j, \mu_j)\}_1^n$ ($\{(\lambda_j, \mu_j)\}_1^\infty$), где

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \dots < \lambda_n < \mu_n < \dots$$

Хорошо известно, что спектр $\sigma(L) = [\lambda_0, \infty) \setminus \bigcup_{j \ge 1}(\lambda_j, \mu_j)$ оператора $L$ является двукратным и абсолютно непрерывным.

Заметим, что оператор $L$ с почти периодическим (и даже предельно периодическим в смысле Г. Бора) потенциалом может содержать как сингулярную, так и дискретную компоненты или быть, например, чисто точечным. Подчеркнем, однако, что если даже спектр $\sigma(L)$ абсолютно непрерывен, $\sigma(L) = \sigma_{ac}(L)$, то оператор $L$ может не быть бесконечнозонным, так как спектр $\sigma(L)$ может быть канторовым, т.е. нигде не плотным множеством в $\mathbb{R}$.

**Теорема 1.** *Пусть $L$—неотрицательный в $L_2(\mathbb{R})$ оператор вида* (1) *с бесконечнозонным потенциалом $q$. Тогда оператор $A = JL$ подобен самосопряжённому.*

**Пример 1.** Пусть $L_\xi$ оператор вида (1) с периодическим потенциалом

$$q(x,\xi) = (1-k^2)(2\,\mathrm{sn}^2(x,k') - 1) + \xi, \quad k \in (0,1), \quad k' = \sqrt{1-k^2},$$

где $\mathrm{sn}(x,k')$—эллиптическая функция Якоби. Тогда $L_\xi$—однозонный периодический оператор с лакунами $(-\infty,\xi) \cup (k^2+\xi, 1+\xi)$, и если $\xi \geq 0$, то оператор $JL_\xi$ подобен самосопряжённому.

Доказательство теоремы 1 базируется на резольвентном критерии подобия [13], [10], [2] замкнутого оператора самосопряженному. При этом для интегральной оценки резольвенты применяются теоремы Макенхоупта [9] и Ханта-Макенхоупта-Видена [7] о весовых оценках максимальной функции Харди-Литтлвуда и преобразования Гильберта.

Заметим еще, что как характеристическая функция $\theta_A$ оператора $A$, так и соотвествующие ей $J$-формы $w_A := \theta_A J\theta_A^* - J$ и $w_{*A} := \theta_A^* J\theta_A - J$ не ограничены в каждой из полуплоскостей $\mathbb{C}_\pm$, как в бесконечности, так и вблизи концов лакун оператора $L$. Это обстоятельство не позволяет применить к оператору $A$ известные достаточные условия подобия замкнутого оператора самосопряженному, выражаемые в терминах $J$-форм $w_A$ и $w_{*A}$ и близких к ним объектов (см. [11], [5]).

**3.** При исследовании спектра оператора $A$ мы использовали частный случай следующего результата. Для его формулировки обозначим через $m_\pm(\lambda)$ функции Вейля задач Дирихле для оператора $L$ в пространствах $L^2(\mathbb{R}_\pm)$. Именно, обозначим $s_\pm$ и $c_\pm$-решения уравнений $Ls_\pm(x,\lambda) = \lambda s_\pm(x,\lambda)$ и $Lc_\pm(x,\lambda) = \lambda c_\pm(x,\lambda)$, выделяемые начальными условиями

$$s_\pm(0,\lambda) = c'_\pm(0,\lambda) = 0, \qquad s'_\pm(0,\lambda) = c_\pm(0,\lambda) = 1.$$

Тогда функции Вейля $m_\pm(\lambda)$ определяются соотношениями

$$c_\pm(\cdot,\lambda) \pm m_\pm(\lambda)s_\pm(\cdot,\lambda) \in L^2(\mathbb{R}_\pm), \qquad \lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}. \tag{3}$$

Напомним, что функции $m_\pm(\lambda)$ являются неванлинновскими или $R$-функциями, $m_\pm(\lambda) \in (R)$. Это означает, что они голоморфны в $\mathbb{C}_\pm$, $m_\pm(\bar\lambda) = \overline{m_\pm}(\lambda)$ и $\mathrm{Im}\,\lambda \cdot \mathrm{Im}\, m_\pm(\lambda) > 0$.

Для формулировки следующего результата напомним определение подклассов $S^{\pm\varkappa}$ класса $R$, введенных в работе [4].

**Определение 1.** Функцию $F$ относят к классу $S^{-\varkappa}$, если $F \in (R)$ и для каждых $n \in \mathbb{Z}_+$ и последовательности $\{z_j\}_1^n$ $(z_j \in \mathbb{C}_+,\ j \in \{1,...,n\})$ квадратичная форма

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{z_j^{-1}F(z_j) - \bar z_k^{-1}\overline{F}(z_k)}{z_j - \bar z_k}\xi_j\bar\xi_k \tag{4}$$

имеет не более $\varkappa$, а для некоторых $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\{z_j\}_1^n$ точно $\varkappa$ отрицательных квадратов.

При $\varkappa = 0$ класс $S^{-0} =: S^-(S^{+0} =: S^+)$ совпадает с известным классом Крейна-Стилтьеса функций $F \in (R)$, голоморфных в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ и удовлетворяющих неравенству $F(x) < 0 (F(x) > 0)$ при $x < 0$.

Обозначим через $\varkappa_-(L)$—число отрицательных собственных значений оператора $L$.

**Теорема 2.** *Пусть $m_\pm$—функции Вейля оператора $L$ в $L^2(\mathbb{R}_\pm)$, определяемые условиями* (3). *Тогда $\varkappa_-(L) = \varkappa$ точно тогда, когда $m_+ + m_- \in S^{-\varkappa}$. В часности, $L \geq 0$ точно тогда, когда $m_+ + m_- \in S^-$.*

**4.** Если условие $L \geq 0$ не выполняется, то оператор $A$ может иметь невещественные собственные значения. В случае конечнозонного потенциала спектр оператора $A$ состоит из вещественной непрерывной части и (возможного) конечного числа собственных значений конечной кратности. Поэтому точечный спектр можно отделить.

$$A = A_p \dot{+} A_c, \quad \sigma(A_p) = \sigma_p(A), \quad \sigma(A_c) = \sigma_c(A) \subset \mathbb{R}.$$

**Теорема 3.** *Пусть $L$-оператор вида (1) с конечнозонным потенциалом $q$. Тогда оператор $A_c$ подобен самосопряжённому точно тогда, когда функции*

$$\frac{\operatorname{Im} m_\pm(\pm\lambda)}{m_+(\lambda) + m_-(-\lambda)}, \quad \frac{\operatorname{Im} m_\pm(\mp\lambda)}{m_+(-\lambda) + m_-(\lambda)} \tag{5}$$

*ограничены в окрестности спектра оператора $L$.*

**Замечание 1.** В случае конечнозонного потенциала $q$ теорема 1 является следствием теоремы 3. Подчеркнем, однако, что в силу теоремы 3 оператор $A$ может быть подобен самосопряженному, не будучи $J$-неотрицательным, т.е. когда $L$ не является неотрицательным.

**Следствие 1.** *Если $0 \in (\lambda_0, \lambda_1) \cup \bigcup_j (\mu_j, \lambda_{j+1})$, то есть точка 0 является внутренней точкой множества $\sigma(L)$, то оператор $A_c$ не подобен самосопряжённому оператору.*

**Следствие 2.** *Если $\Big((\lambda_0, \lambda_1) \cup \bigcup_j (\mu_j, \lambda_{j+1})\Big) \cap \Big((-\lambda_1, -\lambda_0) \cup \bigcup_j (-\lambda_{j+1}, -\mu_j)\Big) = \emptyset$, то есть множества $\sigma(L)$ и $\sigma(-L)$ не имеют общих внутренних точек, то оператор $A_c$ подобен самосопряжённому оператору.*

**Пример 2.** Рассмотрим оператор-функцию $A(\xi) = JL_\xi$, где $L_\xi$-однозонный оператор из примера 1. Из теорем 1 и 3 вытекает, что непрерывная часть $A_c(\xi)$ оператора $A(\xi)$ подобна самосопряженному в точности тогда, когда $\xi \in [-1, -k^2] \cup [0, \infty)$. Заметим, что при $\xi \in [-1, -k^2]$ оператор $L$ не является знакоопределенным.

Более детальный анализ показывает, что:

(1) при $\xi \geq 0$ оператор $A(\xi)$ подобен самосопряжённому оператору (по теореме 1) и $\sigma_p(A(\xi)) = \pm\sqrt{(\xi+1)^2 - (1-k^2)} \subset \mathbb{R}$.

(2) при $\xi \in (-k^2, 0)$ $\sigma_p(A(\xi)) = \pm\sqrt{(\xi+1)^2 - (1-k^2)} \subset \mathbb{R}$, поэтому $\sigma(A(\xi)) \subset \mathbb{R}$, хотя $A(\xi)$ не подобен самосопряжённому оператору (по следствию 1).

(3) при $\xi = -k^2$, оператор $A(-k^2) = A_c(-k^2)$ подобен самосопряжённому оператору (по следствию 2) и $\sigma_p(A(-k^2)) = \emptyset$.

(4) при $\xi \in [-1, -k^2)$, оператор $A(\xi)$ подобен нормальному оператору, так как он имеет два невещественных однократных собственных значения $\pm\sqrt{(\xi+1)^2 - (1-k^2)}$, а оператор $A_c(\xi)$ подобен самосопряжённому оператору (по следствию 2).

(5) при $\xi \in (-2+k^2, -1)$ оператор $A(\xi)$ не подобен нормальному, так как $A_c(\xi)$ не подобен самосопряжённому оператору (по следствию 1). $A(\xi)$ имеет два невещественных однократных собственных значения $\pm\sqrt{(\xi+1)^2 - (1-k^2)}$.

(6) при $\xi < -2+k^2$, $\sigma_p(A(-k^2)) = \emptyset$, $\sigma(A(\xi)) \subset \mathbb{R}$, однако оператор $A(\xi) = A_c(\xi)$ не подобен самосопряжённому оператору (по следствию 1).

## Список литературы


[1] Beals R. *Indefinite Sturm-Liouville problems and half range completeness* // J. Different. Equat.–1985.–V. 56, no. 3.– P.391-407.

[2] Casteren J. A. *Operators similar to unitary or selfadjoint ones* // Pacific J. Math.–1983.–V. 104. no. 1.–P.241-255.

[3] Curgus B., Najman B. *The operator $-(sgnx)\frac{d^2}{dx^2}$ is similar to selfadjoint operator in $L^2(\mathbb{R})$.* // Proc. Amer. Math. Soc.–1995.– V. 123.–P.1125-1128.

[4] Derkach V. A., Malamud M. M. *Generalized Resolvents and Boundary Value Problems for Hermitian Operators with Gaps.* // J. Functional Analysis —1991— Vol. 95, No.1. P. 1-95.

[5] Капустин В. В. *Спектральный анализ почти унитарных операторов.* // Алгебра и Анализ.—2001.—т. 13, No 5–С.44-68.

[6] Karabash I. M., *J-selfadjoint ordinary differential operators similar to selfadjoint operators* // Methods of Functional Analysis and Topology.—2000.—Vol. 6, No.2.—P.22–49.

[7] Hunt R., Muckenhoupt B., Wheeden R. L. *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform.* // Trans. Amer. Math. Soc.—1973.—V. 176.—P.227–251.

[8] Левитан Б. М. *Обратные задачи Штурма-Лиувилля.*— Москва: Наука, 1984.—240 с.

[9] Muckenhoupt B. *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function* // Trans. Amer. Math. Soc.—1972.—V. 165.—P.207–226.

[10] Маламуд М. М. *Критерий подобия замкнутого оператора самосопряженному* // Укр. мат. журн.—1985.—Т. 37, no. 1.—С.49–56.

[11] Маламуд М. М. *О подобии треугольного оператора диагональному* // Записки научных семинаров РОМИ.—2000—Т. 270. С.201–241.

[12] Марченко В. А. *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения.*— Киев: Наукова думка, 1977.—435 с.

[13] Набоко С. Н. *Об условиях подобия унитарным и самосопряжённым операторам* // Функц. анализ и его прилож.—1984.—Т. 18, no. 1.—С.16–27.

[14] Пятков С. Г. *Некоторые свойства собственных функций линейных пучков* // Сибирский мат. журнал.—1989.—Т. 30, no. 4.—С.111–124.

KARABASH I. M., MALAMUD M. M., DEPARTMENT OF MATHEMATICS, DONETSK NATIONAL UNIVERSITY, UNIVERSITETSKAJA, 24, 83055 DONETSK, UKRAINE.