Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2003) 133 - 138

УДК 517.95

К ВОПРОСУ О РАССМОТРЕНИИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ

Е.В. Иванова
Московский авиационный институт
(Государственный технический университет),
Москва, Россия

Вопросы движения и излучения заряженных частиц в электромагнитных полях привлекают внимание в связи с проблемами астрофизики, с задачами работы ускорителей и другими задачами. Особое значение эта проблема приобретает при разработке приборов, в которых используется индуцированное излучение потоков колеблющихся электронов в электромагнитных полях различной конфигурации (см. [1]). Однако аналитическое решение подобных задач стандартными методами, особенно в случае переменных полей, удается лишь в немногих случаях. Весьма плодотворным при их решении является метод интегралов движения и связанный с ним метод когерентных состояний (см. [2], [3]), разрабатывавшийся для решения задач излучения в работах [4]–[8]. Метод когерентных состояний удобен также и тем, что дает возможность наглядно проследить связь между квантовым и классическим подходами к расчету излучения, свести квантовую задачу к задаче классической.

В настоящей работе методом интегралов движения (см. монографию [3], а также ссылки, приведенные в ней) и квазиэнергий (см. [9]–[12]) рассматривается движение и излучение систем заряженных частиц в периодических по времени электромагнитных полях, которые могут быть описаны квадратичными по координатам и импульсам гамильтонианами вида

$$H(t) = \sum_{\alpha,\beta}^{6N} B_{\alpha,\beta}(t) Q_\alpha Q_\beta + H_0(t) \equiv QB(t)Q^T + H_0(t); \; H(t+T) = H(t), \tag{1}$$

где $B(t+T) = B(t)$ — $6N$-мерная симметрическая действительная матрица, $H_0(t+T) = H_0(t)$ — периодическая функция времени, а $6N$-мерный вектор $Q = (p, q)$ построен по закону: $p = (p_1, \dots, p_N)$, $q = (q_1, \dots, q_N)$, причем $q_s = (q_{s1}, q_{s2}, q_{s3})$ — оператор координат, а $p_s = -i\partial/\partial q_s$ — оператор импульса заряженной частицы с номером s ($s = 1, \dots, N$). Здесь и далее используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$, где c — скорость света, а $\hbar$ — постоянная Планка.

Для систем с гамильтонианом (1) в случае произвольной зависимости от времени в работах И.А. Малкина и В.И. Манько (см., например, [3]) было построено $6N$ эрмитовых интегралов движения

$$I = \Lambda(t) Q; \tag{2}$$

при этом $6N$-мерная матрица $\Lambda(t)$ находится из уравнения

$$\dot{\Lambda}(t) = -2\Lambda(t) J B(t) \tag{3}$$

с начальным условием

$$\Lambda(0) = E_{6N}, \tag{4}$$

где матрицы J и $B(t)$ имеют вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -E_{3N} \\ E_{3N} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2^T & B_4 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

здесь E_{3N} — $3N$-мерная единичная матрица. Матрица $\Lambda(t)$ является симплектической, т.е. $\Lambda J \Lambda^T = J$.

Отметим, что интегралы движения определяются тем условием, что их среднее значение не зависит от времени (см. [3]). Для этого достаточно потребовать, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H(t),\ I \right] \Psi(t) = 0, \tag{6}$$

где $H(t)$ — гамильтониан системы, а $\Psi(t)$ — решение уравнения Шредингера.

Поскольку система (1) является периодической, то при расчете излучения следует рассматривать переходы между квазиэнергетическими состояниями (см. [9]–[12]). Квазиэнергетические состояния являются решениями уравнения Шредингера, удовлетворяющими условию периодичности по времени:

$$\Psi(q;\, t + T) = \exp(-i\varepsilon T)\, \Psi(q;\, t). \tag{7}$$

Условие периодичности можно записать и другим образом:

$$\begin{aligned} &\Psi(q;\, t + T) = \varphi(q;\, t) \exp(-i\varepsilon T); \\ &\varphi(q;\, t + T) = \varphi(q;\, t). \end{aligned} \tag{8}$$

Величину ε называют квазиэнергией. Она определена с точностью до энергии целого числа колебательных квантов (см. [12]):

$$\varepsilon = n\omega, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2, \dots . \tag{9}$$

Отметим, что спектр квазиэнергий и квазиэнергетические состояния найдены лишь для немногих систем (см. ссылки в [3], [7]). Здесь следует указать на работу В.М. Бабича и В.С. Булдырева [13], где рассматривалось аксиальное движение в полях волноводного типа. В работе [11] на основе теоретико-группового подхода в специальных переменных построены квазиэнергетические состояния и спектр квазиэнергий периодической квадратичной системы общего вида. Изучение квадратичной системы с гамильтонианом вида (1) при переходах между квазиэнегетическими состояниями в случае дискретного спектра квазиэнергий произведено в работе [6].

В настоящей работе рассматривается движение и излучение нерелятивистской частицы с зарядом e и массой m в зависящем от времени однородном магнитном поле с потенциалом $\mathcal{H}(t) = (0,\, 0,\, \mathcal{H}_z(t))$, с векторным потенциалом

$$\mathcal{A}(r,\, t) = \frac{1}{2} \left[\mathcal{H}(t) \times r \right], \ \mathcal{A}(r,\, t + T) = \mathcal{A}(r,\, t) \tag{10}$$

и зависящем от времени неоднородном электрическом поле с потенциалом

$$\varphi(r,\, t) = \frac{m}{2e} \chi(t) \, \left(x^2 + y^2 \right), \tag{11}$$

где $\mathcal{H}_z(t) = \mathcal{H}_z(t+T)$ и $\chi(t) = \chi(t+T)$ — периодические функции времени. Подобные потенциалы рассматривались в работах [14]–[16]. Потенциалы (10), (11) удовлетворяют уравнениям Максвелла и достаточно точно описывают электромагнитное поле в соленоиде.

Отметим, что индуцированное излучение заряда в полях, являющихся частными случаями полей, описываемых гамильтонианом (1), в классическом пределе методом усреднения рассматривалось в работе [17].

Движение по оси Z тривиальное. Далее будем рассматривать движение и излучение заряда лишь в плоскости X, Y.

Гамильтониан заряда в полях (10), (11) имеет вид

$$H_{X,Y}(t) = \frac{1}{m}(P - e\mathcal{A}(t))^2 + e\varphi(t), \tag{12}$$

где P - оператор импульса заряда.

Для потенциалов (10), (11) в работе [5] были найдены интегралы движения:

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{2\sqrt{m}} \exp\left\{\frac{i}{2}\int_0^t \omega_0(\tau)\,d\tau\right\} \left[\epsilon(t)\,(P_X + iP_Y) - i\,m\,\dot{\epsilon}(t)\,(y - ix)\right], \\ B(t) &= \frac{1}{2\sqrt{m}} \exp\left\{-\frac{i}{2}\int_0^t \omega_0(\tau)\,d\tau\right\} \left[\epsilon(t)\,(P_Y + iP_X) - i\,m\,\dot{\epsilon}(t)\,(x - iy)\right], \end{aligned} \tag{13}$$

где $\omega_0(t) = \dfrac{e\mathcal{H}_z(t)}{m}$, а $\epsilon(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\epsilon}(t) + \frac{\Omega^2(t)}{4}\epsilon(t), \qquad \Omega^2(t) = \omega_0^2(t) + 4\chi(t), \tag{14}$$

и условию

$$\epsilon(t) = |\epsilon(t)|\,\exp\left\{i\int_0^t |\epsilon(\tau)|^{-2}\,d\tau\right\}. \tag{15}$$

Будем полагать для определенности, что $e > 0$. Для интегралов A и B справедливы коммутационные соотношения бозонных операторов рождения и уничтожения:

$$[A,\, A^+] = [B,\, B^+] = 1, \quad [A,\, B] = [A,\, B^+] = 0. \tag{16}$$

Ограничимся рассмотрением устойчивого классического движения заряда. Тогда согласно теореме Флоке-Ляпунова (см. [3]) решение уравнения (14) имеет вид

$$\epsilon(t+T) = \exp(i\varkappa T)\,\epsilon(t), \quad \varkappa = \frac{1}{T}\int_0^T |\epsilon(\tau)|^{-2}\,d\tau. \tag{17}$$

Для операторов (13) в соответствии с (17) получим

$$A(T) = \exp(i\Omega_1 T)\,A(0), \quad B(T) = \exp(i\Omega_2 T)\,B(0), \tag{18}$$

где

$$\Omega_{1,2} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\pm\frac{\omega_0(\tau)}{2} + \frac{1}{|\epsilon(\tau)|^2}\right) d\tau. \tag{19}$$

В силу (19) нетрудно видеть, что

$$|\alpha,\, \beta;\, T\rangle = \exp(-i\varkappa T)\; |\exp(-i\Omega_1 T)\alpha,\, \exp(-i\Omega_2 T)\beta;\, 0\rangle\,. \tag{20}$$

Отсюда можно заключить (см. [11]), что ортонормированные состояния $|n_1,\, n_2;\, t\rangle$ в устойчивом случае (17) являются квазиэнергетическими, поскольку когерентные состояния $|\alpha,\, \beta;\, T\rangle$ являются производящими для фоковских состояний $|n_1,\, n_2;\, t\rangle$, т.е. фоковские состояния удовлетворяют соотношению

$$|n_1,\, n_2;\, t+T\rangle = \exp\left(-iT(\varkappa + \Omega_1 n_1 + \Omega_2 n_2)\right)\, |n_1,\, n_2;\, t\rangle. \tag{21}$$

Таким образом, спектр квазиэнергий заряда в полях (10), (11) имеет вид

$$\varepsilon_{n_1 n_2} = \Omega_1\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \Omega_2\left(n_2 + \frac{1}{2}\right). \tag{22}$$

Рассмотрим теперь излучение заряда. Воспользуемся схемой излучения нестационарных систем методом интегралов движения, развитой в [5], [6]. Ограничимся случаем, когда вектор поляризации излучаемого фотона лежит в плоскости X, Y, т.е. предполагаем, что вектор поляризации имеет вид

$$e_{\lambda,\rho} = \left((e_{\lambda,\rho})_X,\, (e_{\lambda,\rho})_Y,\, 0\right). \tag{23}$$

Будем предполагать также, что

$$\Omega_1 \pm \Omega_2 \neq n\omega, \quad \Omega_{1,2} \neq \frac{n\omega}{2}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{24}$$

Для мощности спонтанного дипольного излучения при переходах между когерентными состояниями $|\alpha_1,\, \beta_1;\, t\rangle \longrightarrow |\alpha_2,\, \beta_2;\, t\rangle$ с излучением фотона с частотой, лежащей в интервале между ω_λ и $\omega_\lambda + d\omega_\lambda$, с вектором поляризации $e_{\lambda,\rho}$ вида (23) вблизи направления $k_\lambda = ((k_\lambda)_X,\, (k_\lambda)_Y,\, 0)$ получим

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}(n_\lambda,\, \omega_\lambda,\, e_{\lambda,\rho}) = \\
&= \frac{e\,\omega_\lambda^2}{8\pi m}\int d^2\alpha_1\, d^2\beta_1\, d^2\alpha_2\, d^2\beta_2\, P_{in}(\alpha_1,\, \beta_1) P_f(\alpha_2,\, \beta_2) \exp\left(-|\alpha_1 - \beta_1|^2 - |\alpha_2 - \beta_2|^2\right) \times \\
&\qquad \times \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \Big\{ |\eta_1(l)|^2 \left[|\alpha_1|^2 \delta(l\omega - \Omega_1 + \omega_\lambda) + |\alpha_2|^2 \delta(l\omega - \Omega_1 - \omega_\lambda)\right] + \\
&\qquad\qquad + |\eta_2(l)|^2 \left[|\beta_1|^2 \delta(l\omega - \Omega_2 + \omega_\lambda) + |\beta_2|^2 \delta(l\omega - \Omega_2 - \omega_\lambda)\right] \Big\}\,,
\end{aligned} \tag{25}$$

где n_λ — единичный вектор, направленный вдоль вектора k_λ, и

$$\eta_{1,2}(t) = \left(\dot{\bar{\epsilon}} \mp \frac{i}{2}\omega_0(t)\, \bar{\epsilon}\right) \exp\left(\mp\frac{i}{2}\int_0^t \omega_0(\tau)\, d\tau + \Omega_{1,2} t\right),$$

$$\eta_{1,2}(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \eta_{1,2}(l)\, \exp(i\omega l t), \qquad \eta_{1,2}(l) = \frac{1}{T}\int_0^T \eta_{1,2}(\tau)\, \exp(-i\omega l t)\, d\tau.$$

В (25) суммирование по конечным и усреднение по начальным состояниям дается при помощи соответствующих матриц плотности ρ_{in} и ρ_f, записанных через P-функции Глаубера P_{in} и P_f (см. [2], а также [3]) следующим образом:

$$\rho_{in,f} = \int d^2\alpha\, d^2\beta\, |\alpha,\, \beta;\, t\rangle\langle\alpha,\, \beta;\, t|\, P_{in,f}(\alpha,\, \beta). \tag{26}$$

Через $\delta^{(s)}$ будем обозначать s-мерную δ-функцию. Полагая в (25) $P_{in} = \delta^{(2)}(\alpha_1 - \alpha_0)\, \delta^{(2)}(\beta_1 - \beta_0)$, $P_f = \pi^{-2}$, найдем

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}(n_\lambda,\, \omega_\lambda,\, e_{\lambda,\rho}) = \\
&= \frac{e\,\omega_\lambda^2}{8\pi m} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ |\eta_1(l)|^2 \left[|\alpha_0|^2 \delta(l\omega - \Omega_1 + \omega_\lambda) + (|\alpha_0|^2 + 1)\, \delta(l\omega - \Omega_1 - \omega_\lambda) \right] + \right. \\
&\qquad \left. + |\eta_2(l)|^2 \left[|\beta_0|^2 \delta(l\omega - \Omega_2 + \omega_\lambda) + (|\beta_0|^2 + 1)\, \delta(l\omega - \Omega_2 - \omega_\lambda) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{27}$$

В приближении $|\alpha_0|$, $|\beta_0| gg 1$ соотношение (27) переходит в классическое выражение для мощности излучения, если положить

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{2\sqrt{m}} \left[\epsilon(0)\, (P_{0X} + iP_{0Y}) - i\, m\, \dot\epsilon(0)\, (y_0 - ix_0) \right], \\
\beta_0 &= \frac{1}{2\sqrt{m}} \left[\epsilon(0)\, (P_{0Y} + iP_{0X}) - i\, m\, \dot\epsilon(0)\, (x_0 - iy_0) \right],
\end{aligned} \tag{28}$$

где $q_0 = (x_0,\, y_0)$ и $P_0 = (P_{0X},\, P_{0Y})$ — соответственно начальные координаты и начальный обобщенный импульс заряда.

Средняя за период T мощность спонтанного дипольного излучения при переходах вида $|n_1,\, n_2;\, t\rangle \longrightarrow |m_1,\, m_2;\, t\rangle$ равна

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_a(n_\lambda,\, \omega_\lambda,\, e_{\lambda,\rho}) = \\
&= \frac{e\,\omega_\lambda^2}{8\pi m} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ |\eta_1(l)|^2\, \delta_{n_2,m_2} \left[n_1 \delta_{n_1-1,m_1} \delta(l\omega - \Omega_1 + \omega_\lambda) + \right. \right. \\
&\qquad \left. + (n_1 + 1)\, \delta_{n_1+1,m_1} \delta(l\omega - \Omega_1 - \omega_\lambda) \right] + \\
&\qquad + |\eta_2(l)|^2\, \delta_{n_1,m_1} \left[n_2 \delta_{n_2-1,m_2} \delta(l\omega - \Omega_2 + \omega_\lambda) + \right. \\
&\qquad \left. \left. + (n_2 + 1)\, \delta_{n_2+1,m_2} \delta(l\omega - \Omega_2 - \omega_\lambda) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Из выражения (29) видно, что переход $|n_1,\, n_2;\, t\rangle \longrightarrow |m_1,\, m_2;\, t\rangle$ дает серию линий.

Рассмотрим индуцированные дипольные переходы. Будем считать, что внешняя волна с интенсивностью $I_\rho(n_\lambda, \omega_\lambda)$ монохроматична и имеет какую-либо одну частоту ω_λ. При переходах $|n_1, n_2; t\rangle \longrightarrow |m_1, m_2; t\rangle$ возможно как излучение, так и поглощение фотонов. Реально наблюдаемой величиной является средняя за период мощность суммарного эффекта одновременно идущих процессов дипольного индуцированного излучения и дипольного индуцированного поглощения при переходах заряда из начального квазиэнергетического состояния во все конечные квазиэнергетические состояния:

$$\mathcal{P}_{sum}(n_\lambda,\, |\Omega_j - l\omega|,\, e_{\lambda,\rho}) = -\frac{\pi^2 e^2}{m} \frac{I_\rho\,(n_\lambda,\, |\Omega_j - l\omega|)}{\Omega_j - l\omega}; \quad j = 1,\, 2;\; l \in \mathbb{Z}. \tag{30}$$

Выражением (30) дается также средняя за период T суммарная мощность дипольного индуцированного излучения и дипольного индуцированного поглощения при переходах заряда между когерентными состояниями, если P-функции Глаубера взяты в том же виде, что и в (26).

Если $\Omega_j < 0$, то из формулы (30) следует, что система способна индуцированно излучать на основной частоте $|\Omega_j|$. Индуцированное излучение возможно также на частотах $\Omega_j - l\omega$, если номера сателлитов l выбраны так, чтобы $\Omega_j - l\omega < 0$.

Представляют интерес частные случаи потенциалов (10), (11). Пусть магнитное поле постоянно, а скалярный потенциал (11) изменяется по закону

$$\chi(t) = \chi_0 \cos\omega t, \qquad \chi_0 = const, \tag{31}$$

причем считаем, что χ_0 мало, а $\omega = \omega_0 + \gamma$, где $\gamma \to 0$. Будем полагать также, что возникающим вихревым магнитным полем можно пренебречь.

В этом случае в решении (17) уравнения (14) коэффициент $\varkappa$ имеет вид

$$\varkappa = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2 - \left(\frac{\chi_0}{\omega_0}\right)^2}. \tag{32}$$

Тогда для частоты Ω_1, определенной в (19), получим следующее приближенное соотношение:

$$\Omega_1 \cong -\frac{\omega_0}{2}, \tag{33}$$

т.е. индуцированное излучение возможно как на основной частоте, так и на частотах соответствующих сателлитов.

Таким образом, система полей (10), (11) может быть использована для усиления волн соответствующих частот.

Список литературы

[1] Гапонов А.В., Петелин М.И., Юлпатов В.К. Изв. ВУЗов, радиофизика, 10, с. 1414, 1967.
[2] Glauber R.J. Phys. Rev., 131, p. 2766, 1963; Phys. Rev. Lett., 10, p. 84, 1963.
[3] Малкин И.А., Манько В.И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
[4] Malkin I.A., Man'ko V.I., Trifonov D.A. Phys. Rev. D, 2, p. 1371, 1970.
[5] Ivanova E.V., Malkin I.A., Man'ko V.I. Int. J. Theor. Phys., 16, p. 503, 1977.
[6] Иванова Е.В., Малкин И.А., Манько В.И. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 8, с. 3, 1977.
[7] Ivanova E.V., Malkin I.A., Man'ko V.I. J. Phys., 10A, p. 75, 1977.
[8] Иванова Е.В. В сб. Теоретико-групповые методы в физике. М.: Наука, 1980, т. I, с. 358.
[9] Зельдович Я.Б. ЖЭТФ, 51, с. 1492, 1966.
[10] Никишов А.И., Ритус В.И. ЖЭТФ, 46, с. 776, 1964.
[11] Malkin I.A., Man'ko V.I., Schustov A.P. Preprint PhIAN, 1975, № 109.
[12] Lewis H.R., Riesenfeld W.B. J. Math. Phis., 10, p. 1458, 1966.
[13] Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
[14] Кулькин А.Г., Лоскутов Ю.М., Павленко Ю.Г. Вестник МГУ, физика, астрономия, № 4, с. 424, 1971.
[15] Дерюгин И.А., Воронцов В.И. В сб. Квантовая электроника, 5. К.: Наукова думка, 1971, с. 281.
[16] Vorontzov V.I., Mausunbayev S.S. Phys. Lett., 53A, p. 435, 1975.
[17] Капица П.Л. УФН, 44, с. 7, 1951; УФН, 78, с. 181, 1962; Электроника больших мощностей. М.: Изд-во АН СССР, 1962.

Е.В. Иванова, Московский авиационный институт (Государственный технический университет), Москва, Россия