Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2003) 239 – 244

УДК 519.8

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ГИЛЬБЕРТА В РАСПОЗНАВАНИИ ОБРАЗОВ [6]

С.И. Гуров
МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия

В статье предлагается новый класс дискретных распознающих алгоритмов, основанных на голосовании, в которых в качестее элементарных классификаторов используются монотонные функции, получаемые при разложении Э. Гильберта. Получена точная нижняя оценка мощности множества вершин единичного булевого куба, покрываемых совокупностью безызбыточной системы интервалов и, как следствие — точная нижняя оценка мощности единичного множества монотонной булевой функции.

1. Разложение Гильберта

Известны различные представления булевых функций: с помощью д.н.ф. и к.н.ф. различных видов, полиномов Жегалкина и т.д.

Для целей использования аппарата теории функций алгебры логики при распознавании образов хотелось бы иметь представление, обладающее свойством последовательного приближения к заданной функции по мере увеличения его составляющих ("членов приближения"), как это имеет место при разложении действительных функций в ряд по той или иной системе базисных функций. Имея такое разложение возможно было бы оценить степень близости нового объекта (вершина булева единичного куба $\tilde{y}$) к классу (ч.б.ф. $f(\tilde{x})$) максимальным количеством членов разложения, необходимым для того, чтобы вершина $\tilde{y}$ принадлежала множеству единичных наборов аппроксимирующей булевой функции с данным числом членов.

Такому требованию удовлетворяет разложение булевой функции $f(\tilde{x})$ вида

$$f(\tilde{x}) = M_1 \,\&\, \overline{M_2 \,\&\, \overline{M_3 \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{M_{m-1} \,\&\, \overline{M_m}}}}\,, \qquad (1)$$

где $M_1, M_2, \ldots, M_m$ — монотонные булевы функции. Данное разложение введено и исследованно в работе [3] американского математика Э.Н. Гильберта, и мы предлагаем называть его *разложением Гильберта*.

Разложение (1) единственно для полностью определённых булевых функций. Оно обладает тем свойством, что

$$N^1_{M_1} \supset N^1_{M_2} \supset \ldots \supset N^1_{M_m} \qquad (2)$$

(N^1_f обозначает, как обычно, множество единичных наборов функции f). Итерационный алгоритм последовательного нахождения функций $M_1, M_2, \ldots$ извлекается из работы [3].

Если исходная булева функция частичная, то под $f(\tilde{x})$ в (1) нужно понимать некоторое возможное её доопределение до полностью определёнeй. Конечно, здесь следовало бы применить другое обозначение для левой части (1), однако нам кажется, такая вольность записи не затруднит общее понимание.

[6]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 01-01-00885

В силу того, что такое доопределение не единственно, монотонные функции в разложении Гильберта определяются, вообще говоря, неоднозначно. Однако эта однозначность восстанавливается, если ввести естественное требование экстремальности: на каждом шаге итерационного алгоритма выбирать функции, имеющие нечётные индексы с минимально, а чётные — с максимально возможным множеством единичных наборов. Ясно, что это соответствует выбору единственного из возможных и экстремального в указанном смысле доопределения. Данный алгоритм был разработан и реализован автором в 1991 г. при построении подсистемы логического синтеза макроблоков «LORD» в составе САПР заказных БИС [1].

Пусть теперь ч.б.ф. $f(\tilde{x})$ описывает прецедентную информацию о некотором классе объектов, для которой, в предположении об экстремальности выбираемых монотонных функциях, получено разложение Гильберта и $\tilde{y}$ — признаковое описание объекта, подлежащего классификации. Естественно теперь оценить близость $\Gamma(\tilde{y})$ объекта $\tilde{y}$ к классу, описанному ч.б.ф. $f(\tilde{x})$ (или "вес" соответствующего голоса) по следующему правилу:

$$\Gamma(\tilde{y}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{y} \in N^1_{M_m} \text{ и } k \text{ нечётно}, \\ \dfrac{k}{m}, & \text{если } \tilde{y} \in \{N^1_{M_k} \cap N^0_{M_{k+1}}\},\ 1 \leqslant k < m,\ k \text{ нечётно}, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Такая оценка оправдывается структурой разложения Гильберта и его основным свойством (2). Поскольку содержательно функция $f(\tilde{x})$ описывает некоторый объективно существующий класс объектов, предполагается, что m будет невелико, если верна гипотеза компактности классов (см., например, [2]).

Можно также вычислить оценку того, что исследуемый объект далёк от данного класса, взяв в указанной процедуре вместо функции $f(\tilde{x})$ её отрицание. Некоторые возможные методы работы с оценками «за» и «против» принадлежности объекта классу имеются в [2].

2. Вектор поляризации

В предыдущем разделе указаны способы построения элементарного классификатора и вычисления значения функции близости объекта классу. Очевидно, однако, что структурные свойства булевых функций одинаковы в классах эквивалентности Шеннона-Поварова, определяемых изометрическими преобразованиями булева гиперкуба.

Выбор монотонных функций в качестве приближающих ч.б.ф. f влечёт сужение классов эквивалентности: инвариантность структурных свойств приближения будет иметь место лишь при одном их двух преобразований, определяющих указанные классы, а именно при перестановках переменных. При другом преобразовании — инвертировании всех вхождений в то или иное функциональное выражение определённых булевых переменных — структура разложения (1) будет, вообще говоря, меняться.

Данное преобразование можно аналитически описать формулой

$$\tilde{x} \mapsto \tilde{x} + \tilde{\gamma}\,, \tag{3}$$

где символ "+" означает сложение по $mod\,2$, а $\tilde{\gamma}$ — булев вектор, который, заимствуя терминологию из работ по полиномам Жегалкина, назовём *вектором поляризации*.

Булев единичный куб после подвергнутый преобразованию (3) будем называть *преобразованным* или, конкретнее, *сдвинутым* (с помощью вектора $\tilde{\gamma}$) кубом, поскольку данное преобразование является аналогом переноса начала координат в непрерывном случае. При $\tilde{\gamma} = \tilde{0}$ имеем тождественное преобразование, при произвольном $\tilde{\gamma} \in B^n$

преобразование задаётся инвертированием в произвольном выражении всех переменных из множества $1(\tilde{\gamma})$.

Более аккуратно функции в (1) следует обозначать $M_i(f)$, $i = \overline{1,m}$, а m как $m(f)$ подчёркивая их зависимость от исходной ч.б.ф. $f(\tilde{x})$. Эту функцию подвергнутую преобразованию (3) обозначим $f_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x})$. При разных $\tilde{\gamma}$ мы будем получать разложения (1) с разными составляющими его монотонными функциями. Таким образом в разложении Гильберта на сдвинутом булевом будут фигурировать функции $M_i(f_{\tilde{\gamma}})$, $i = \overline{1, m(f_{\tilde{\gamma}})}$.

Среди всевозможных таких разложений наибольший представляют интерес те, которые доставляют минимум "длины разложения" m в (1), т.е. решения задачи

$$m(f_{\tilde{\gamma}}) \to \min\,, \qquad \tilde{\gamma} \in B^n\,. \tag{4}$$

Однако дальнейший анализ предлагаемого метода классификации при таком функционале оптимизации представляется достаточно сложным и мы оставляем его для дальнейших исследований. Здесь же мы рассмотрим следующий приближённый критерий оптимальности вектора поляризации $\tilde{\gamma}$:

$$\left| N^1_{M_1(f_{\tilde{\gamma}})} \right| \to \min\,, \qquad \tilde{\gamma} \in B^n\,. \tag{5}$$

Вектор $\tilde{\gamma}$, отвечающий этому критерию содержательно отвечает представлению о некотором "центре" соответствующего класса образов. С другой стороны, легко показать, что решение задачи оптимизации, как исходной (4), так и упрощённой (5), вообще говоря, не единственно.

Итак, решение задачи распознавания предлагаемым методом сводится к следующим шагам.

(1) Данному классу, заданному вершинами единичного булева куба, сопоставляют частичную булеву функцию (ч.б.ф.) f.

(2) (a) Решается задача (5) (или (4)) в результате которой находится совокупность $\{\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_s\}$ оптимальных векторов поляризации.

(b) Для каждого найденного значения $\tilde{\gamma}_i$, $i = \overline{1,s}$ находится разложение Гильберта функции $f_{\tilde{\gamma}_i}$ и вычисляется оценка близости вектора $\tilde{y}+\tilde{\gamma}_i$ к классу по правилу, указанному в конце предыдущего раздела.

(3) Используя полученную совокупность объектов в качестве элементарных классификаторов, проводят голосование за принадлежность объекта данному классу.

Полученную совокупность оценок близости можно тем или иным способом свернуть в одну, взяв, например, среднее арифметическое от них или построить алгебру над совокупность соответствующих распознающих операторов [2].

3. Приближённые алгоритмы поиска оптимальных векторов поляризации

Для применения вышеописанного алгоритма при классификации на практике необходимо лишь предложить (точные или приближённые) методы нахождения оптимальных векторов поляризации. С исследованием задачи оптимизации ((4) или (5)) и нахождением алгоритмов её решения связана математич ская проблематика предлагаемой модели алгоритма классификации. Представляется ясным, что она является не менее сложной, чем при исследовании свойств и нахождении тупиковых д.н.ф., тестовых или представительных наборов.

Здесь мы предложим алгоритм поиска решения задачи оптимизации.

Ясно, что для полностью определённой булевой функции f функция M_1 разложения Гильберта определяется как

$$N^1_{M_1} = \bigcup_{\tilde\alpha \in N^1_f} \tilde\alpha^{\Delta}\,. \tag{6}$$

Если f есть ч.б.ф., то также можно пользоваться формулой (6), получая при этом экстремальный в указанном выше смысле вариант функции M_1.

Обозначим через $LU(f)$ множество нижних единиц булевой функции f, т.е. совокупность минимальных элементов N^1_f как частично упорядоченного множества. Пусть $LU(f) = \{\tilde\alpha^1, \ldots, \tilde\alpha^l\}$. Ясно, что $LU(f) = LU(M_1(f))$. Тогда в (6) объединение можно брать лишь по $\tilde\alpha^1, \ldots, \tilde\alpha^l$. Для $j = 1, \ldots, n$ вычислим отношения $r_j = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} \alpha^i_j$ по множеству $LU(f)$. Зададимся значениями t_1 и t_2 таких, что $0 < t_1 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant t_2 < 1$.

Определим интервал $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \subset B^n$, $\delta_j \in \{0, 1, -\}$, $j = \overline{1, n}$ по правилу:

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{если } r_j < t_1\,, \\ 0, & \text{если } r_j > t_2\,, \\ -, & \text{иначе}\,. \end{cases}$$

Понятно, что при преобразовании (3) с $\tilde\gamma \in \delta$ мощности множеств $1(\tilde\alpha)$ у элементов $LU(f_{\tilde\gamma})$, вообще говоря, увеличатся, что соответствует требованию обоих критериев оптимальности. Будем искать оптимальные по (4) или (5) векторы поляризации перебором по вершинам полученного интервала δ. Выбор определённых значений границ t_1 и t_2 позволить задать приемлемый объём перебора.

Если принять критерий оптимальности (5), то для поиска векторов $\tilde\gamma$ можно предложить использовать метод ветвей и границ. Тогда для каждого $\tilde\gamma$ необходимо оценивать значение величины $\left|N^1_{M_1(f_{\tilde\gamma})}\right|$. Далее для простоты записи мы опускаем индекс $\tilde\gamma$, считая, что преобразование (3) проведено.

Итак, мы рассматриваем задачу определения мощности единичного множества монотонной булевой функции $M_1 = M_1(LU)$, заданной своими нижними единицами $LU = LU(M_1) = \{\tilde\alpha^1, \ldots, \tilde\alpha^l\}$, т.е.

$$N^-(LU) \leqslant \left|N^1_{M_1(LU)}\right| \leqslant N^+(LU)\,,$$

где $N^-(LU)$, $N^+(LU)$ — соответствующие оценки. Они будут даны формулами (7) и (9) следующего раздела.

4. Оценки мощности единичного множества монотонной булевой функции

В качестве верхней оценки $N^+(LU)$ величины $|N^1_{M_1}|$ можно взять первые три члена выражения для неё, полученного по методу включений и исключений. Для этого образуем все попарные конъюнкции наборов из LU и возьмём минимальные элементы этой совокупности. Полученное множество обозначим LU^2. Образуем затем все конъюнкции из трёх наборов множества LU и также возьмём минимальные элементы полученной совокупности. Полученное множество обозначим LU^3. Поскольку $|\tilde\alpha^{\Delta}| = 2^{|0(\tilde\alpha)|}$, то примем

$$N^+(LU) = \sum_{\tilde\alpha \in LU} 2^{|0(\tilde\alpha)|} - \sum_{\tilde\alpha \in LU^2} 2^{|0(\tilde\alpha)|} + \sum_{\tilde\alpha \in LU^3} 2^{|0(\tilde\alpha)|}\,. \tag{7}$$

Перейдём к нижней оценке $N^-(LU)$. Мы найдем её как *точную* нижнюю оценку величины $|N^1_M|$ монотонной функции $M = M(\{\tilde\alpha^1, \ldots, \tilde\alpha^l\})$.

Пусть $D = \{\delta^1, \ldots, \delta^l\}$ — такая совокупность интервалов B^n, что ни один из них не покрывается никаким объединением других. Назовём тогда D *безызбыточной* системой интервалов. Без потери общности можно считать, что в D интервалы упорядочены по невозрастанию их мощности, т.е.

$$|\delta^1| \geqslant |\delta^2| \geqslant \cdots \geqslant |\delta^l|.$$

Такую систему интервалов назовём *правильно упорядоченной*.Операцию округления x в бóльшую сторону до ближайшего целого обозначаем $]x[$.

Theorem. Пусть $D = \{\delta^1, \ldots, \delta^l\}$ — безызбыточная правильно упорядоченная система интервалов B^n. Тогда имеет место оценка

$$N(D) \stackrel{\text{def}}{=} \left|\bigcup_{i=1}^{l} \delta^i\right| \geqslant \sum_{i=1}^{l} \left]\frac{|\delta^i|}{2^{i-1}}\right[. \tag{8}$$

Доказательство. Напомним, что пересечение двух интервалов в B^n есть интервал и мощность подинтервала минимального ранга есть половина мощности исходного интервала.

Пусть β^1 и β^2 — два интервала единичного булева куба и $|\beta^1| \geqslant |\beta^2|$. Имеем $|\beta^1 \cap \beta^2| \leqslant \frac{|\beta^2|}{2}$. Если в последнем соотношении достигается равенство (максимальное пересечение интервалов без полного накрытия меньшего интервала большим), то $\beta = \beta^2 \setminus \{\beta^1 \cap \beta^2\}$ — также интервал и его мощность есть $|\beta| = \frac{|\beta_2|}{2}$.

Пусть имеется безызбыточная правильно упорядоченная система интервалов B^n мощности $k > 1$.

Нижняя достигаемая оценка мощности интервала $\delta^{(-2)} \stackrel{\text{def}}{=} \delta^1 \setminus \delta^2$ есть $|\delta^2| - \frac{|\delta^2|}{2} = \frac{|\delta^2|}{2}$.

Нижняя достигаемая оценка мощности интервала $\delta^{(-3)} \stackrel{\text{def}}{=} (\delta^1 \cup \delta^2) \setminus \delta^3$ есть $|\delta^3| - \frac{|\delta^3|}{2} - \frac{|\delta^3|}{4} = \frac{|\delta^2|}{4}$ и т.д. Поскольку система интервалов D по условию безызбыточная, имеем $|\delta^{(-k)}| \geqslant \max\left\{\frac{|\delta^k|}{2^{k-1}}, 1\right\}$, что завершает доказательство. □

Замечание 8. Полученная оценка является точной и можно указать конкретные классы случаев, минимум мощности объединения интервалов из безызбыточной системы достигается.

Поскольку система верхних конусов нижних единиц монотонной булевой функции является безызбыточной, то справедливо

Следствие. *Пусть* $LU = \{\tilde{\alpha}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^l\}$ *— множество нижних единиц монотонной булевой функции* $M = M(LU)$, *элементы которого упорядочены по невозрастанию величин соответствующих верхних конусов, т.е.* $|0(\tilde{\alpha}^i)| \geqslant |0(\tilde{\alpha}^{i+1})|$, $i = \overline{1, (l-1)}$. *Тогда*

$$N^-(LU) = \sum_{i=1}^{l} 2^{\lfloor |0(\tilde{\alpha}^i)| - i + 1 \rfloor} \leqslant \left|N^1_{M(\tilde{\alpha}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^l)}\right|, \tag{9}$$

где

$$\lfloor x \rfloor \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|x| + x}{2} = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Итак, формула для $N^{-}(LU)$ получена: выражение (8) для нижней оценки $N(D)$ произвольной безызбыточной системы интервалов D было применено к множеству верхних конусов нижних единиц $LU(M)$ монотонной булевой функции M, получив при этом вид (9). Данная оценка будет тем ближе к $\left|N^{1}_{M(LU)}\right|$, чем сильнее будет взаимное пересечение интервалов из $D = LU$. Это как раз и обеспечивается критерием (5).

Автор глубоко признателен академику РАН Ю.И. Журавлёву за неизменные понимание и поддержку.

Список литературы

[1] **Авдеев Ю.В., Гаврилов С.В., Гуров С.И. и др.** САПР заказных БИС на открытых вычислительных системах // Электронная техника. Сер. 3. «Микроэлектроника», № 1, 1992. — С. 54-58.

[2] **Журавлев Ю.И.** Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Проблемы кибернетики. Вып. 33. — М.: Наука. 1978. — С. 5-68.

[3] **Gilbert E.N.** Lattice theoretic properties of frontal swithing functions // J. Math. Phys., № 1, 1954, pp. 57-67. (Русск. пер.: **Э.Н. Гильберт.** Теоретико-структурные свойства замыкающих переключающих функций // Кибернетич. сборник, № 1, 1960, с. 175-188.)

РФ, г. Москва, ф-т ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова
*E-mail:*sgur@cs.msu.su, gurov@ccas.ru