Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2003) 121 - 129

УДК 517.95

СУММИРУЕМОСТЬ ПО РИССУ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ СЛАБО НЕРЕГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А. П. Гуревич, А. П. Хромов
Саратовский государственный университет,
Саратов, Россия

В статье изучаются обыкновенные линейные дифференциальные операторы с суммируемыми коэффициентами и двухточечными краевыми условиями, обеспечивающими рост ядра резольвенты по спектральному параметру не выше степенного. Для таких операторов найдены достаточные условия на разлагаемую функцию, при которых имеет место равномерная сходимость на любом отрезке, лежащем внутри основного интервала, обобщенных средних Рисса по собственным и присоединенным функциям. Установлена также равносходимость таких средних для двух произвольных операторов рассматриваемого вида, имеющих одинаковый порядок.

Ключевые слова: суммируемость по Риссу, дифференциальный оператор, резольвента оператора, собственные функции

1. Введение

Пусть L – оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l[y] = y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y, \quad x \in [0,1],\ p_k(x) \in L[0,1],$$

и нормированными ([2], с.66) краевыми условиями

$$U_j(y) = U_j^0(y) + U_j^1(y) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $U_j^0(y) = \sum\limits_{k=0}^{\sigma_j} a_{jk} y^{(k)}(0)$, $\quad U_j^1(y) = \sum\limits_{k=0}^{\sigma_j} b_{jk} y^{(k)}(1)$,

$|a_{j\sigma_j}| + |b_{j\sigma_j}| > 0$, $n-1 \ge \sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ldots \ge \sigma_n \ge 0$, $\sigma_j > \sigma_{j+2}$.

Средние Рисса порядка γ ($\gamma > 0$) разложений по собственным и присоединенным функциям оператора L представляют собой интегралы

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \left(1 - \frac{\lambda^4}{r^4}\right)^{\gamma} R_\lambda f \, d\lambda,$$

где R_λ – резольвента оператора L, а контур $|\lambda| = r$ не проходит через собственные значения.

Если краевые условия регулярны ([2], с.66-67), то М.Стоун показал [6], что имеет место равносуммируемость на любом отрезке из $(0,1)$ таких средних и аналогичных средних для обычного тригонометрического ряда Фурье произвольной функции $f(x) \in L[0,1]$. Полное решение вопроса о равномерной сходимости на всем отрезке $[0,1]$ средних Рисса для таких операторов дано в [4], [5], причем в [5] исследуется и сходимость средних в пространстве $C^k[0,1]$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Регулярность краевых условий приводит к тому, что ядро

$G(x,t,\lambda)$ резольвенты R_λ имеет при больших $|\lambda|$ оценку $O\left(|\lambda|^{\frac{1-n}{n}}\right)$ [3]. В настоящей статье изучаются такие дифференциальные операторы, для которых у $G(x,t,\lambda)$ допускается любая степенная оценка.

Дадим точное описание рассматриваемого класса операторов. Пусть $\lambda = -\rho^n$ и $\rho \in S = \left\{\rho \mid 0 \le \arg\rho \le \frac{2\pi}{n}\right\}$. Обозначим через S_j, $j = 1,2,3,4$ секторы в ρ-плоскости: $S_j = \left\{\rho \mid \frac{\pi}{2n}(j-1) \le \arg\rho \le \frac{\pi}{2n}j\right\}$. Очевидно, что $S = \bigcup\limits_{j=1}^{4} S_j$. Известно ([2], с.58-59), что в каждом из секторов $S_1 \cup S_2$ и $S_3 \cup S_4$ уравнение $l[y] + \rho^n y = 0$ имеет фундаментальную систему решений $\{y_k(x,\rho)\}_{k=1}^n$, которая при больших $|\rho|$ допускает следующее асимптотическое представление:

$$\frac{d^m y_k(x,\rho)}{dx^m} = (\rho\omega_k)^m[1]\exp\rho\omega_k x, \quad m = 0,1,\ldots,n-1,$$

где $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ – различные корни n-ой степени из -1, занумерованные так, что выполняются неравенства $\operatorname{Re}\rho\omega_1 \ge \operatorname{Re}\rho\omega_2 \ge \ldots \ge \operatorname{Re}\rho\omega_n$ (нумерация ω_k зависит от сектора), $[a] = a + O\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Обозначим $U_j(y_k) = A_{jk} + B_{jk}\exp\rho\omega_k$.

Характеристический определитель

$$\Delta(\rho) = \det(U_j(y_k)) = \begin{vmatrix} A_{11} + B_{11}e^{\rho\omega_1} & \ldots & A_{1n} + B_{1n}e^{\rho\omega_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} + B_{n1}e^{\rho\omega_1} & \ldots & A_{nn} + B_{nn}e^{\rho\omega_n} \end{vmatrix}$$

разложим очевидным образом в сумму, каждое слагаемое которой представляет собой определитель, составленный из A_{jk} и B_{jk}, умноженный на экспоненту вида $\exp\rho(\omega_{j_1} + \ldots + \omega_{j_s})$. Пусть число ν определяется из условия: при $\rho \in S_j$ выполняется $\operatorname{Re}\rho\omega_\nu \ge 0 \ge \operatorname{Re}\rho\omega_{\nu+1}$. Очевидно, ν зависит от выбора S_j. Всюду в дальнейшем будем считать, что $n = 4n_0 + 1$, $n_0 = 1,2,\ldots$. Остальные случаи исследуются аналогично.

Обозначим через P_0, P_1 $(\tilde P_0, \tilde P_1)$ определители в разложении $\Delta(\rho)$, стоящие при $\exp\rho\left(\sum\limits_{k=1}^{\nu}\omega_k\right)$ и $\exp\rho\left(\sum\limits_{k=1}^{\nu+1}\omega_k\right)$ соответственно, при условии, что число ν выбрано в предположении $\rho \in S_1$ $(\rho \in S_3)$. Предположим, что выполняется условие: существуют вещественные α_1, β_1, $\tilde\alpha_1$, $\tilde\beta_1$ такие, что

$$\begin{aligned} &\lim_{\rho\to\infty}\frac{P_0}{\rho^{\alpha_1}} \ne 0, \quad \lim_{\rho\to\infty}\frac{P_1}{\rho^{\beta_1}} \ne 0, \quad \rho \in S_1 \cup S_2, \\ &\lim_{\rho\to\infty}\frac{\tilde P_0}{\rho^{\tilde\alpha_1}} \ne 0, \quad \lim_{\rho\to\infty}\frac{\tilde P_1}{\rho^{\tilde\beta_1}} \ne 0, \quad \rho \in S_3 \cup S_4. \end{aligned} \tag{2}$$

В [3] показано, что краевые условия (1) будут регулярны, тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \beta_1 = \tilde\alpha_1 = \tilde\beta_1 = \sigma$, где $\sigma = \sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_j$. Операторы с условием (2) при произвольных вещественных α_1, β_1, $\tilde\alpha_1$, $\tilde\beta_1$ и представляют собой рассматриваемый класс слабо нерегулярных операторов.

В настоящей статье изучаются обобщенные средние Рисса следующего вида $-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f\,d\lambda$, где $g(\lambda,r)$ удовлетворяет условиям ([1]):

а) при любом $r > 0$ $g(\lambda,r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \le r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$;

[3] Следует иметь в виду, что это наименьшая из возможных оценок.

б) существует такая константа C, что при всех $r > 0$ и $|\lambda| \leq r$ выполняется неравенство $|g(\lambda, r)| \leq C$;

в) существуют положительные γ и h такие, что

$$g(r\exp i\varphi, r) = \begin{cases} O(|\varphi|^\gamma), \ |\varphi| \leq h, & \text{если } n = 4n_0 \\ O(|\varphi - \pi|^\gamma), \ |\varphi - \pi| \leq h, & \text{если } n = 4n_0 + 2 \\ O\left(\left|\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right|^\gamma\right), \ \left|\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right| \leq h, & \text{если } n - \text{нечетное} \end{cases}$$

(оценки равномерные по r);

г) $g(\lambda, r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ.

Основные результаты статьи содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in C[0,1]$ и удовлетворяет тем краевым условиям из (1), которые не содержат производных. Тогда при положительном γ таком, что $\gamma \geq \sigma - \alpha$, где $\alpha = \min\{\alpha_1, \beta_1, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1\}$, и $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f \, d\lambda \right\|_{C[h,1-h]} = 0, \tag{3}$$

где r такие, что на окружности $|\lambda| = r$ нет собственных значений оператора L.

Отметим, что вопрос о том, можно ли в (3) положить $h = 0$, остается открытым.

Пусть L' – другой оператор рассматриваемого вида с параметрами α'_1, β'_1, $\tilde{\alpha}'_1$, $\tilde{\beta}'_1$, $\sigma' = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma'_j$, $\alpha' = \min\{\alpha'_1, \beta'_1, \tilde{\alpha}'_1, \tilde{\beta}'_1\}$ и R'_λ – его резольвента.

Теорема 2. *Пусть $\gamma \geq \max\{\sigma - \alpha, \sigma' - \alpha'\}$ $(\gamma > 0)$. Тогда для любой $f(x) \in L[0,1]$ и любого $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r)(R_\lambda f - R'_\lambda f) \, d\lambda \right\|_{C[h,1-h]} = 0. \tag{4}$$

Для $g(\lambda, r) = \left(1 - \frac{\lambda^4}{r^4}\right)^\gamma$ этот результат без доказательства содержится в [3].

2. Асимптотика $G(x,t,\lambda)$ при больших $|\lambda|$

Известно ([2], с.46), что $R_\lambda f = \int\limits_0^1 G(x,t,\lambda) f(t) \, dt$, где функция Грина $G(x,t,\lambda) = \dfrac{H(x,t,\rho)}{2W(x,\rho)\Delta(\rho)}$, $W(x,\rho)$ – определитель Вронского системы $\{y_k(x,\rho)\}_{k=1}^n$.

$$H(x,t,\rho) = \begin{vmatrix} g(x,t,\rho) & y_1(x,\rho) & \dots & y_n(x,\rho) \\ U_1(g) & U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(g) & U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}, \quad g(x,t,\rho) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^n y_i(x,\rho) W_i(t,\rho), & t \leq x \\ -\sum\limits_{i=1}^n y_i(x,\rho) W_i(t,\rho), & t \geq x, \end{cases}$$

$W_i(x,\rho)$ – алгебраическое дополнение элемента $y_i^{(n-1)}(x,\rho)$ определителя $W(x,\rho)$, $U_j(g)$ – результат применения U_j к $g(x,t,\rho)$ как функции x.

Пусть

$$\Omega = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \dots & \omega_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{n-1} & \dots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

и Ω_i – алгебраическое дополнение элемента ω_i^{n-1} определителя Ω.

Обозначим, далее, $\sum\limits_i' = \sum\limits_{\operatorname{Re}\rho\omega_i \ge 0}$, $\sum\limits_i'' = \sum\limits_{\operatorname{Re}\rho\omega_i \le 0}$, $\sum\limits_i' \omega_i = \omega_0$.

Лемма 1. *Пусть h – произвольное фиксированное число из интервала $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Тогда в области $\{0 \le t \le 1,\ h \le x \le 1-h\}$ и больших $|\rho|$ справедливы асимптотические формулы: если $t \le x$, то*

$$
\begin{aligned}
H(x,t,\rho) &= 2\rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \left\{ \sum_i{}'' \Omega_i[1] P_0 \exp \rho\omega_i(x-t) + O(\rho^\sigma \exp \rho\omega_{\nu+1} h) \right\} \exp \rho\omega_0, \quad \rho \in S_1, \\
H(x,t,\rho) &= 2\rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \left\{ \sum_i{}'' \Omega_i[1] P_1 \exp \rho\omega_i(x-t) + O(\rho^\sigma \exp(-\rho\omega_\nu h)) \right\} \exp \rho\omega_0, \quad \rho \in S_2.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Формула для $H(x,t,\rho)$ при $\rho \in S_3$ получается из последней формулы заменой P_1 на $\tilde{P}_1$, а при $\rho \in S_4$ получается из (5) заменой P_0 на $\tilde{P}_0$. Формулы для $H(x,t,\rho)$ при $t \ge x$ получаются из соответствующих формул при $t \le x$ путем замены $\sum\limits_i''$ на $-\sum\limits_i'$.

Доказательство. Проведем доказательство лишь для случая $\rho \in S_1$, так как в других случаях оно совершенно аналогично. При больших $|\rho|$ имеем

$$
W(x,\rho) = \Omega\rho^{\frac{n(n-1)}{2}}[1], \quad W_j(t,\rho) = \Omega_j \rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}[1]\exp(-\rho\omega_i t).
$$

Далее, так как каждый элемент первого столбца определителя $H(x,t,\rho)$ равен сумме n слагаемых, то, представив $H(x,t,\rho)$ в виде суммы n слагаемых, после несложных преобразований придем к

$$
\begin{aligned}
H(x,t,\rho) &= 2\rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \sum_{i=1}^n \Omega_i[1] M_i(x,\rho) \exp(-\rho\omega_i t), \quad t \le x, \\
H(x,t,\rho) &= 2\rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \sum_{i=1}^n \Omega_i[1] N_i(x,\rho) \exp(-\rho\omega_i t), \quad t \ge x,
\end{aligned}
$$

где

$$
M_i(x,\rho) = \left| \begin{matrix}
e^{\rho\omega_i x}[1] & e^{\rho\omega_1 x}[1] & \dots & e^{\rho\omega_{i-1} x}[1] & 0 \\
B_{1i} e^{\rho\omega_i} & A_{11} + B_{11} e^{\rho\omega_1} & \dots & A_{1,i-1} + B_{1,i-1} e^{\rho\omega_{i-1}} & A_{1i} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
B_{ni} e^{\rho\omega_i} & A_{n1} + B_{n1} e^{\rho\omega_1} & \dots & A_{n,i-1} + B_{n,i-1} e^{\rho\omega_{i-1}} & A_{ni}
\end{matrix} \right.
$$

$$
\left. \begin{matrix}
e^{\rho\omega_{i+1} x}[1] & \dots & e^{\rho\omega_n x}[1] \\
A_{1,i+1} + B_{1,i+1} e^{\rho\omega_{i+1}} & \dots & A_{1n} + B_{1n} e^{\rho\omega_n} \\
\dots & \dots & \dots \\
A_{n,i+1} + B_{n,i+1} e^{\rho\omega_{i+1}} & \dots & A_{nn} + B_{nn} e^{\rho\omega_n}
\end{matrix} \right|
$$

Определитель $N_i(x,\rho)$ отличается от $M_i(x,\rho)$ лишь двумя элементами: в первой строке и первом столбце у него стоит 0, а в первой строке и $(i+1)$-м столбце стоит $e^{\rho\omega_i x}[1]$. Если $\operatorname{Re}\rho\omega_i \le 0$, то в определителе $M_i(x,\rho)$ выносим из второго столбца $e^{\rho\omega_1}$, из третьего – $e^{\rho\omega_2}$ и т.д., из $(\nu+1)$-го – $e^{\rho\omega_\nu}$, затем разлагаем полученный определитель по элементам первого столбца, и, учитывая, что функции $e^{\rho\omega_1(x-1)}, \dots, e^{\rho\omega_\nu(x-1)}, e^{\rho\omega_{\nu+2} x}, \dots, e^{\rho\omega_n x}$ при

$x \in [h, 1-h]$ экспоненциально убывают, придем к представлению

$$M_i(x,\rho)\exp(-\rho\omega_i t) = \left\{ [1] \begin{vmatrix} B_{11} & \dots & B_{1\nu} & A_{1,\nu+1} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & \dots & B_{n\nu} & A_{n,\nu+1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \exp \rho\omega_i(x-t) + \gamma(\rho) \right\} \exp \rho\omega_0,$$

где через $\gamma(\rho)$ здесь и в дальнейшем обозначается функция, имеющая оценку $O(\rho^\sigma \exp \rho\omega_{\nu+1} h)$. Отсюда

$$M_i(x,\rho)\exp(-\rho\omega_i t) = \{P_0[1]\exp\rho\omega_i(x-t) + \gamma(\rho)\}\exp\rho\omega_0.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что при $t \geq x$

$$N_i(x,\rho)\exp(-\rho\omega_i t) = \gamma(\rho)\exp\rho\omega_0.$$

Если же $\operatorname{Re}\rho\omega_i \geq 0$, то придем к следующим асимптотическим представлениям: $M_i(x,\rho)\exp(-\rho\omega_i t) = \gamma(\rho)\exp\rho\omega_0$ при $t \leq x$, $N_i(x,\rho)\exp(-\rho\omega_i t) = \{-P_0[1]\exp\rho\omega_i(t-x) + \gamma(\rho)\}\exp\rho\omega_0$ при $t \geq x$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Если функция $M(x,\rho)$ равномерно ограничена при всех $x \in [h, 1-h]$ и всех $\rho \in S_1$, то*

$$\int\limits_{C_r} \rho^k g(-\rho^n, r^n) M(x,\rho)\exp\rho\omega_{\nu+1} h\, d\rho = O(r^{k-\gamma}),$$

где C_r - дуга окружности $|\rho| = r$, лежащая в секторе S_1.

Это утверждение при $g(\lambda, r) = \left(1 - \dfrac{\lambda^4}{r^4}\right)^\gamma$ принадлежит М.Стоуну [6], и доказательство в нашем случае полностью сохранится.

Обозначим через S_δ область, получающуюся из сектора S после удаления всех чисел $\rho_k = (-\lambda_k)^{1/n}$ (λ_k - собственные значения оператора L) вместе с их круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ. Получим для $|\Delta(\rho)|$ оценку снизу в области S_δ. Остановимся лишь на случае $\rho \in S_{1,\delta} = S_1 \cap S_\delta$, так как в остальных случаях рассуждения аналогичны.

В силу (2) имеем

$$\Delta(\rho) = (P_0 + P_1 \exp\rho\omega_{\nu+1} + \tilde{o}(1))\exp\rho\omega_0 = b\rho^{\alpha_1}\{1 + (a + o(1))\rho^{\beta_1 - \alpha_1}\exp\rho\omega_{\nu+1} + \tilde{o}(1)\}\exp\rho\omega_0, \tag{6}$$

где a и b - константы, отличные от нуля, $\tilde{o}(1)$ экспоненциально стремится к нулю при $|\rho| \to \infty$.

Лемма 3. *Функция $z(\rho) = \rho\omega_{\nu+1} + \beta\ln\rho$ отображает взаимно однозначно область $\{\rho \mid \rho \in S_1,\ |\rho| \geq \rho_0\}$ на область, содержащую полуполосу произвольной ширины, осью которой является луч $\arg\rho = \frac{3\pi}{2}$. Здесь $\beta > 0$, ρ_0 - достаточно большое положительное число.*

Доказательство. Взаимная однозначность отображения при $|\rho|$ достаточно больших очевидна, поэтому остановимся на доказательстве заключительного утверждения леммы. С этой целью рассмотрим образы лучей $\rho = x$ и $\rho = x\exp\frac{\pi}{2n}i$ при $x \geq \rho_0$. Имеем

$$z(x) = x\sin\frac{\pi}{2n} + \beta\ln x - ix\sin\frac{\pi}{2n},$$

$$z\Big(x\exp\frac{\pi}{2n}i\Big) = \beta\ln x - i\Big(x - \frac{\pi}{2n}\Big).$$

Значит, при $x \to +\infty$ функции $\operatorname{Re} z(x)$, $\operatorname{Im} z(x)$, $\operatorname{Im} z\Big(x\exp\dfrac{\pi}{2n}i\Big)$ стремятся к $-\infty$, а $\operatorname{Re} z\Big(x\exp\dfrac{\pi}{2n}i\Big) \to +\infty$. Лемма доказана. □

Лемма 4. *При $\rho \in S_{1,\delta}$ и достаточно больших по модулю справедлива оценка*

$$|\Delta(\rho)| \geq C|\rho|^{\alpha_1}|\exp\rho\omega_0|. \tag{7}$$

Доказательство. Если $\beta = \beta_1 - \alpha_1 \leq 0$, то оценка (7) получается из (6), как и в [2], с.78-79. Если $\beta > 0$, то, положив $z = \rho\omega_{\nu+1} + \beta\ln\rho$, получим

$$1 + a\rho^\beta \exp\rho\omega_{\nu+1} = 1 + ae^z,$$

и, используя лемму 3, оценим функцию $1 + ae^z$ снизу как и в [2]. В итоге из (6) получаем оценку (7). Лемма доказана. □

Лемма 5. *При $\rho \in S_{1,\delta}$ имеет место асимптотическое представление*

$$\frac{P_0}{\Delta(\rho)} = \{1 + O(\rho^{\beta_1-\alpha_1}\exp\rho\omega_{\nu+1}) + \tilde{o}(1)\}\exp(-\rho\omega_0).$$

Доказательство. В силу (6) имеем

$$\frac{P_0}{\Delta(\rho)} = \left\{1 - \frac{P_1\exp\rho\omega_{\nu+1} + \tilde{o}(1)}{P_0 + P_1\exp\rho\omega_{\nu+1} + \tilde{o}(1)}\right\}\exp(-\rho\omega_0),$$

и требуемое утверждение следует из леммы 4. □

Теорема 3. *В области $\{0 \leq t \leq 1,\ h \leq x \leq 1-h\}$, где $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, справедливы асимптотические формулы: при $\rho \in S_{1,\delta}$, $\rho \in S_{4,\delta}$*

$$G(x,t,\lambda) = \frac{1}{\Omega\rho^{n-1}}\sum_i{}''\Omega_i[1]\exp\rho\omega_i(x-t) + O(\rho^{\sigma-n+1-\alpha}\exp\rho\omega_{\nu+1}h) + \tilde{o}(1), \quad t \leq x \tag{8}$$

$$G(x,t,\lambda) = -\frac{1}{\Omega\rho^{n-1}}\sum_i{}'\Omega_i[1]\exp\rho\omega_i(x-t) + O(\rho^{\sigma-n+1-\alpha}\exp\rho\omega_{\nu+1}h) + \tilde{o}(1), \quad x \leq t \tag{9}$$

при $\rho \in S_{2,\delta}$ и $\rho \in S_{3,\delta}$ формулы для $G(x,t,\lambda)$ получаются из (8), (9) заменой $\exp\rho\omega_{\nu+1}h$ на $\exp(-\rho\omega_\nu h)$.

При $\rho \in S_{1,\delta}$ формулы (8), (9) следуют из лемм 1, 4, 5. В остальных случаях они получаются аналогично.

3. Доказательство теоремы 1

В [1] получена формула:

$$f(x) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f\,d\lambda = f_0(x)(1 - g(\mu,r)) + f(x) - f_0(x) + I_{1r} + I_{2r}, \tag{10}$$

где $f_0(x) \in C^n[0,1]$ и $U_j(f_0) = 0$, $j = 1,2,\ldots,n$; $f_1 = l[f_0] - \mu f_0$, μ - произвольное фиксированное число, не являющееся собственным значением оператора L и лежащее внутри окружности $|\lambda| = r$,

$$I_{1r} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{g(\lambda,r)}{\lambda-\mu}R_\lambda f_1\,d\lambda, \quad I_{2r} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda(f-f_0)d\lambda.$$

Покажем, что правая часть (10) при больших r сколь угодно мала. Имеем очевидные оценки при $\rho \in S_1$:

$$\int\limits_0^x |f(t)||\exp\rho\omega_i(x-t)|dt = O(\text{æ}(\rho)\|f\|), \quad i = \nu+1,\ldots,n, \tag{11}$$

$$\int\limits_x^1 |f(t)|\,|\exp\rho\omega_i(x-t)|dt = O(æ(\rho)\|f\|), \quad i=1,\ldots,\nu, \tag{12}$$

где $æ(\rho)=\dfrac{1}{-\mathrm{Re}\,\rho\omega_{\nu+1}}(1-\exp\mathrm{Re}\,\rho\omega_{\nu+1})$, $\|f\|=\|f\|_{C[0,1]}$.

Зададим $\varepsilon>0$ и подберем $f_0(x)$ так, чтобы $\|f-f_0\|<\varepsilon$. Далее, выберем $r_0(\varepsilon)$ так, чтобы при $r\geq r_0(\varepsilon)$ выполнялось неравенство $\|f_0\|\,|1-g(\mu,r)|<\varepsilon$. Рассмотрим теперь I_{1r}. Произведем замену $\lambda=-\rho^n$, $0\leq\arg\rho\leq\dfrac{2\pi}{n}$. В результате получим $I_{1r}=\sum\limits_{j=1}^{4}I_{1r}(j)$, где $I_{1r}(j)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{rj}}\dfrac{g(-\rho^n,r)}{-\rho^n-\mu}R_\lambda f_1 n\rho^{n-1}d\rho$, $C_{rj}=\{\rho|\ |\rho|=\sqrt[n]{r},\ \rho\in S_j\}$.

Оценим $I_{1r}(1)$. Для $j=2,3,4$ рассуждения аналогичны.

По теореме 3 имеем:

$$G(x,t,\lambda)=O\left(\frac{1}{\rho^{n-1}}\right)+O(\rho^{\sigma-n+1-\alpha}\exp\rho\omega_{\nu+1}h)+\tilde{o}(1).$$

Поэтому

$$I_{1r}(1)=O\left(\frac{1}{r^{\frac{n-1}{n}}}\right)+O\left(\int\limits_{C_{r1}}|g(-\rho^n,r)\rho^{\sigma-\alpha-n}\exp\rho\omega_{\nu+1}h|\,|d\rho|\right)+\tilde{o}(1).$$

Тогда по лемме 2 получим $I_{1r}(1)=O\left(r^{\frac{1-n}{n}}\right)$. Следовательно, $I_{1r}=O\left(r^{\frac{1-n}{n}}\right)$.

Оценим теперь $I_{2r}=\sum\limits_{j=1}^{4}I_{2r}(j)$. По теореме 3 в силу (11) и (12) имеем:

$$I_{2r}(1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r1}}g(-\rho^n,r)R_\lambda(f-f_0)n\rho^{n-1}d\rho=$$

$$=O\left(\|f-f_0\|\int\limits_{C_{r1}}|g(-\rho^n,r)æ(\rho)|\,|d\rho|\right)+ \tag{13}$$

$$+O\left(\|f-f_0\|\int\limits_{C_{r1}}|g(-\rho^n,r)\rho^{\sigma-\alpha}\exp\rho\omega_{\nu+1}h|\,|d\rho|\right)+\tilde{o}(1)\|f-f_0\|.$$

В первом интеграле, стоящем в правой части (13), сделаем замену $\rho=|\rho|\exp\left(\dfrac{\pi}{2n}-\Theta\right)i$, а затем воспользуемся условием в).

В результате получим

$$\int\limits_{C_{r1}}|g(-\rho^n,r)æ(\rho)|\,|d\rho|=O\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}}\Theta^\gamma\frac{1-e^{-r^{\frac{1}{n}}\sin\Theta}}{\sin\Theta}d\Theta\right)=$$

$$=O\left(\frac{1}{r^{\frac{\gamma}{n}}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}r^{\frac{1}{n}}}\xi^\gamma\frac{1-e^{-\xi}}{\xi}d\xi\right)=O(1).$$

Второй интеграл в (13) по лемме 2 имеет оценку $O(1)$. Значит, $I_{2r}(1) = O(\|f - f_0\|)$. Проводя аналогичные рассуждения для $I_{2r}(j)$, $j = 2, 3, 4$, заключаем, что $I_{2r} = O(\|f - f_0\|)$.

Теорема 1 доказана.□

4. Доказательство теоремы 2

По теореме 3 имеем при $x \in [h, 1-h]$ и $\rho \in S_{1,\delta}$

$$G(x,t,\lambda) - G'(x,t,\lambda) = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right) + O(\rho^{\sigma-\alpha-n+1}\exp \rho\omega_{\nu+1}h),$$

где $G'(x,t,\lambda)$ - ядро R'_λ. Отсюда по лемме 2 (см. доказательство теоремы 1) получаем

$$\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)[G(x,t,\lambda) - G'(x,t,\lambda)]d\lambda = O(1). \tag{14}$$

Пусть D - множество функций из $C^n[0,1]$, удовлетворяющих краевым условиям операторов L и L'. Тогда D всюду плотно в $L[0,1]$. Пусть μ не является собственным значением операторов L и L'. Тогда для $f(x) \in D$

$$\frac{f(x)}{\lambda-\mu} + R_\lambda f = \frac{R_\lambda f_1}{\lambda-\mu}, \quad \frac{f(x)}{\lambda-\mu} + R'_\lambda f = \frac{R'_\lambda f_2}{\lambda-\mu},$$

где $f_1 = l[f] - \mu f$; $f_2 = l'[f] - \mu f$ и $l'[f]$ - дифференциальное выражение для оператора L'. Поэтому для $f \in D$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)[R_\lambda f - R'_\lambda f]d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} \frac{g(\lambda,r)}{\lambda-\mu}R_\lambda f_1\,d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{g(\lambda,r)}{\lambda-\mu}R'_\lambda f_2\,d\lambda. \tag{15}$$

Интегралы в правой части (15), как показано при доказательстве теоремы 1, есть $O\left(r^{\frac{1-n}{n}}\right)$. Значит, (4) справедливо для $f(x) \in D$. А в силу (14) по теореме Банаха-Штейнгауза оно имеет место для любой $f(x) \in L[0,1]$. Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] Гуревич А.П., Хромов А.П. *О суммируемости по Риссу разложений по собственным функциям интегральных операторов в пространстве $C^\alpha[0,1]$*// ДАН, 2002, **386**, № 5, С. 589-592.

[2] Наймарк М.А, *Линейные дифференциальные операторы*. - М.: Наука, 1968.

[3] Хромов А.П., *Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов в конечном интервале* // ДАН СССР. 1962, **146**. - С. 1294-1297.

[4] Freiling G., Kaufman F.-J., *On uniform and L_p-convergence of eigenfunction expansions for indefinite eigenvalue problems* // Integral Equations Operator Theory. - 13(1990). - no 2. - P. 193-215.

[5] Kaufman F.-J., *Derived Birkhoff-series associated with $N(Y) = \lambda P(Y)$* // Results in Math. - 1989. - V. 15. - P. 255-290.

[6] Stone M.H., *A comparison of the series of Fourier and Birkhoff* // Trans. Amer. Math. Soc. - 1926. - V.28. - № 4. - P. 695-761.

А.П. Гуревич, Механико-математический факультет, Саратовский государственный университет, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

А.П. Хромов, Механико-математический факультет, Саратовский государственный университет, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

*E-mail:*KhromovAP@info.sgu.ru

A.P. Gurevich, A.P. Khromov *Riesz summability of the spectral expansions of weakly nonregular boundary problems*

This paper contains the study of ordinary linear differential operators with summable coefficients and two-point boundary conditions which provide at most power growth of the resolvent's kernal as a function of the spectral parameter. Sufficient conditions are found under which generalized Riesz means of a given function in eigen and associated functions of these operators converge uniformly on each segment inside the main interval. For two arbitrary operators of this type and the same order the equiconvergence of their means is also established.