Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2003) 116 - 120

УДК 517.95

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА N-ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОСИНУС-ФУНКЦИЙ

В.М.Говоров
НТУУ «Киевский Политехнический Институт»
Киев, Украина

Настоящая работа посвящена n-параметрическим косинус-функциям, здесь изучаются некоторые их свойства без дополнительного предположения о четности по каждому из аргументов в отдельности, а также устанавливается связь между выражением для самой косинус-функции и ее покоординатными сужениями.

Keywords: косинус-функция, тождество Д'Аламбера.

Пусть X — банахово пространство, $L(X)$ -- пространство линейных ограниченных операторов над X.

Определение 1. n-параметрической косинус-функцией (КОФ) называется функция $C : \mathbb{R}^n \to L(X)$, удовлетворяющая слудующим условиям:

i) $C(\bar{0}) = I$.

ii) $C(\bar{t})$ сильно непрерывна в нуле: $\forall x \in X \quad \lim\limits_{t\to 0} C(\bar{t})x = x$.

iii) $C(\bar{t})$ удовлетворяет тождеству Д'Аламбера:

$$\forall\, \bar{t}, \bar{s} \in \mathbb{R}^n : \; C(\bar{t} + \bar{s}) + C(\bar{t} - \bar{s}) = 2C(\bar{t})C(\bar{s}). \tag{1}$$

Приведем примеры n-параметрических КОФ.

Пример 1.
Пусть $C(\bar{t})$ — произвольная однопараметрическая КОФ. Пусть $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — произвольный элемент $\mathbb{R}^n$, тогда функция $W(t_1, t_2, \ldots, t_n) = C(a_1t_1 + a_2t_2 + \ldots + a_nt_n)$ будет n-параметрической КОФ.

В простейшем случае, когда $X = \mathbb{R}$, примерами n-параметрической КОФ будут служить функции $\cos(a_1t_1 + a_2t_2 + \ldots + a_nt_n)$ и $\operatorname{ch}(a_1t_1 + a_2t_2 + \ldots + a_nt_n)$.

Пример 2.
Пусть $X = \mathbb{R}^3$, $n = 2$.

$$W_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{2}y^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(x^2+y^2) & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что $W_1(x,y)$ и $W_2(x,y)$ удовлетворяют тождеству Д'Аламбера. Выполнение условий i) и ii) очевидно.

Утверждение 1. Пусть $C(\bar{t})$ — n-параметрическая КОФ. Тогда $\exists M \geq 0$ и $C_0 \geq 0$, такие что

$$\forall\, \bar{t} \in \mathbb{R}^n : \; \|C(\bar{t})\| \leq Me^{C_0\|\bar{t}\|}. \tag{2}$$

Замечание.
В формулировке утверждения 1 не уточняется конкретный вид нормы, так как в $\mathbb{R}^n$ все нормы эквивалентны.

Доказательство основано на идее ван дер Лина. Для случая $n = 1$ его можно найти в [4]. На n-мерный случай оно переносится без каких-либо существенных изменений.

Утверждение 2. n-параметрическая КОФ сильно непрерывна при всех значениях аргумента.

Доказательство для случая $n = 1$ можно найти в [4], которое также без существенных изменений переносится на n-мерный случай.

Рассмотрим вопросы дифферецируемости n-параметрической КОФ. Для случая $n = 1$ известно, что существует плотное подмножество X, на котором КОФ сильно дифференцируема при $\bar{t} = 0$. Для векторов этого множества она оказывается дифферецируемой и при всех остальных значениях $\bar{t}$ (доказательство можно найти в [4]). Для n-параметрической КОФ будем рассматривать множество $D_{\bar{t}}$, на котором КОФ дважды сильно дифференцируема как функция от n переменных в точке $\bar{t}$, пусть $D_2 = \bigcap\limits_{\bar{t}\in\mathbb{R}} D_{\bar{t}}$, т.е. в D_2 входят те векторы, на которых КОФ дважды сильно дифференцируема при всех значениях параметра $\bar{t}$.

Рассмотрим также множество $D := \{y_x(s) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(s,\bar{u})C(\bar{u})xd\bar{u} \mid x \in X, s \in \mathbb{R}\}$, где $\{K(s,\bar{u})\}$ — δ-образная последовательность.

Покажем, что $D \subseteq D_2$.

Для этого зафиксируем $\bar{t}$ и исследуем приращение КОФ в точке $\bar{t}$ на произвольном векторе $y_x(s)$ из D.

$$C(\bar{t}+\bar{h})y_x(s) - C(\bar{t})y_x(s) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{t}+\bar{h})C(\bar{u})K(s,\bar{u})xd\bar{u} - \int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{t})C(\bar{u})K(s,\bar{u})xd\bar{u} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{t}+\bar{h}+\bar{u})K(s,\bar{u})xd\bar{u} + \tfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}-\bar{t}-\bar{h})K(s,\bar{u})xd\bar{u} -$$

$$- \tfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{t}+\bar{h})K(s,\bar{u})xd\bar{u} - \tfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}-\bar{t})K(s,\bar{u})xd\bar{u} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}+\bar{t})(K(s,\bar{u}-\bar{h}) - K(s,\bar{u}))xd\bar{u} + \tfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}-\bar{t})(K(s,\bar{u}+\bar{h}) - K(s,\bar{u}))xd\bar{u} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}+\bar{t})\left(\tfrac{\partial K}{\partial \bar{u}}(s,\bar{u}),\bar{h}\right)xd\bar{u} + \tfrac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}+\bar{t})\left(\tfrac{\partial^2 K}{\partial \bar{u}^2}(s,\bar{u})\bar{h},\bar{h}\right)xd\bar{u} -$$

$$- \tfrac{1}{12}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}+\bar{t})\left(\tfrac{\partial^3 K}{\partial \bar{u}^3}(s,\bar{u}-\theta\bar{h})(\bar{h})\bar{h},\bar{h}\right)xd\bar{u} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}-\bar{t})\left(\tfrac{\partial K}{\partial \bar{u}}(s,\bar{u}),\bar{h}\right)xd\bar{u} + \tfrac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}-\bar{t})\left(\tfrac{\partial^2 K}{\partial \bar{u}^2}(s,\bar{u})\bar{h},\bar{h}\right)xd\bar{u} +$$

$$+ \tfrac{1}{12}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}-\bar{t})\left(\tfrac{\partial^3 K}{\partial \bar{u}^3}(s,\bar{u}+\eta\bar{h})(\bar{h})\bar{h},\bar{h}\right)xd\bar{u}, \text{ где } 0 \le \theta \le 1 \text{ и } 0 \le \eta \le 1.$$

Так как K и все её производные ограничены, а косинус-функция имеет оценку роста (2), то последнее выражение можно переписать в виде

$$\underline{\underline{O}}(||\bar{h}||) + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u})C(\bar{t})\left(\frac{\partial^2 K}{\partial \bar{u}^2}(s,\bar{u})\bar{h},\bar{h}\right)xd\bar{u} + \underline{\underline{O}}(||\bar{h}||^3).$$

Таким образом, видно, что КОФ дважды дифференцируема в точке $\bar{t}$ на векторах из D, более того, слагаемое, содержащее $\bar{h}$ во второй степени, непрерывно зависит от $\bar{t}$. Так как $\bar{t}$ выбиралось произвольно, то КОФ дважды сильно непрерывно дифференцируема на векторах из D при всех значениях параметра $\bar{t}$. Это означает, что $D \subseteq D_2$.

Теперь убедимся, что D плотно в X. Так как $K(s,\overline{u})$ — дельта-образная последовательность, то при $s \to 0$ $y_x(s) \to C(0)x = x$. Так как x выбиралось в X произвольно, то D плотно в X.

Поскольку D плотно в X и $D \subseteq D_2$, то D_2 также плотно в X. Этим мы доказали

Утверждение 3. $\overline{D}_2 = X$.

Введем следующие обозначения: $C_i(x_i) = C(0,\ldots,0,x_i,0,\ldots,0)$. Очевидно, что $C_i(x_i)$ — однопараметрическая КОФ. Функцию $S_i(x_i) = \int\limits_0^{x_i} C_i(s)ds$ принято называть однопараметрической синус-функцией, соответствующей $C_i(x_i)$, причем интеграл понимается в сильном смысле.

Лемма 1. Если $w : \mathbb{R} \to X$, w — дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}w(t) &= Aw(t) \\ w(0) &= x \\ \frac{dw}{dt}(0) &= y, \end{cases} \tag{3}$$

где A - генератор некоторой однопараметрической КОФ $C(t)$, $x \in D(A)$, y - вектор, на котором $C(t)$ один раз сильно дифференцируема в нуле, $S(t)$ - соответствующая ей синус-функция, то w представима в виде

$$w(t) = C(t)\,x + S(t)\,y \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Доказательство можно найти в [5].

Утверждение 4. Если $u \in D_2$, то однопараметрическая косинус-функция $C_i(x_i)$ дважды сильно дифференцируема на векторе $C(y_1, y_2, \ldots, y_n)u$ и сильно дифференцируема один раз на векторе $\frac{\partial C}{\partial y_i}(y_1, y_2, \ldots, y_n)u \quad \forall y_1, \ldots, y_n, x_i \in \mathbb{R}$.

Доказательство.

Из тождества Д'Аламбера нетрудно получить

$$C_i(x_i)C(y_1,\ldots,y_n)u = C(y_1,\ldots,y_n)C_i(x_i)u.$$

Так как $u \in D_2$, то $C_i(x_i)u$ дважды дифференцируема. Пользуясь непрерывностью $C(y_1,\ldots,y_n)$, внесём её под знак производной. Таким образом, правая часть равенства дважды дифференцируема по x_i, а, значит, и левая.

Для доказательства второй части утверждения заметим, что для $u \in D_2$ имеет смысл выражение

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial y_i^2}(y_1,\ldots,y_{i-1},y_i,y_{i+1},\ldots,y_n)\,u\Big|_{y_i=z+x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial y_i^2}(y_1,\ldots,y_{i-1},y_i,y_{i+1},\ldots,y_n)\,u\Big|_{y_i=z-x_i}.$$

Преобразовывая его к виду

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(C(y_1,\ldots,y_{i-1},z+x_i,y_{i+1},\ldots,y_n)\,u\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(C(y_1,\ldots,y_{i-1},z-x_i,y_{i+1},\ldots,y_n)\,u\right)\right)$$

и пользуясь тождеством Д'Аламбера, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial z}\Big(C(0,\ldots,0,\underbrace{x_i,}_{i\text{-я позиция}}0,\ldots,0)C(y_1,\ldots,y_{i-1},z,y_{i+1},\ldots,y_n)u\Big) = \frac{\partial C_i(x_i)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i}C(y_1,\ldots,y_n)u,$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 5. Для любого индекса $i = \overline{1,n}$ и любого вектора $u \in D$ функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(x_1, x_2, \dots, x_n)u$ удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2}(\overline{0})f \\ f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) &= C(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)u \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) &= \frac{\partial C}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)\Big|_{x_i=0} \end{cases}.$$

Доказательство. Выполнение второго и третьего соотношений очевидно, для доказательства первого воспользуемся тождеством Д'Аламбера

$$C(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n)u + C(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - h, x_{i+1}, \dots, x_n)u =$$

$$= 2C(0, \dots, 0, \underset{i\text{-я позиция}}{h}, 0, \dots, 0)C(x_1, \dots, x_n)u.$$

Пользуясь утверждением 4, продифференцируем обе части дважды по h и после этого положим $h = 0$:

$$2\,\frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2}(x_1, \dots, x_n)u = 2\,\frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2}(\overline{0})C(x_1, \dots, x_n)u.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2}(\overline{0})f(x_1, \dots, x_n),$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 6. Для любого индекса $i = \overline{1,n}$ и любого вектора $u \in X$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} C(x_1, \dots, x_n)u &= C_i(x_i)C(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)u + \\ &+ S_i(x_i)\frac{\partial C}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)u. \end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство. Выражение $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(x_1, x_2, \dots, x_n)u$ как функция переменной x_i при $u \in D_2$ благодаря утверждениям 4 и 5 удовлетворяет условиям леммы 1 с оператором $A = \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2}(\overline{0})$, поэтому представимо в виде

$$\begin{aligned} C(x_1, \dots, x_n)u &= C_i(x_i)C(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)u + \\ &+ S_i(x_i)\frac{\partial C}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)u. \end{aligned}$$

Поскольку оператор, стоящий в левой части, а также операторы, присутствующие в первом слагаемом правой части равенства, определены на всем X и ограничены, то оператор $S_i(x_i)\frac{\partial C}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)u$ также определен на всем X и ограничен. Ввиду плотности D_2 последнее равенство может быть распространено на $\forall\, u \in X$, что и требовалось доказать.

Обозначение. Воспользуемся символической записью и перепишем правую часть равенства (4) в виде $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(S_i(x_i)C(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)u\Big)$, где следует понимать, что вначале производится дифференцирование, а затем в выражениях для C и всех ее производных полагается $x_i = 0$.

Придерживаясь этой символической записи, получим, что $\forall u \in X$

$$C(x_1,\dots,x_n)u = \tfrac{\partial}{\partial x_1}\Big(S_1(x_1)C(0,x_2,\dots,x_n)u\Big) =$$

$$= \tfrac{\partial}{\partial x_1}\Big(S_1(x_1)\tfrac{\partial}{\partial x_2}\Big(S_2(x_2)\tfrac{\partial C}{\partial x_2}(0,0,x_3,\dots,x_n)u\Big)\Big) =$$

$$= \dots = \tfrac{\partial}{\partial x_1}\Big(S_1(x_1)\tfrac{\partial}{\partial x_2}\Big(S_2(x_2)\tfrac{\partial}{\partial x_3}\dots\tfrac{\partial}{\partial x_{n-1}}\Big(S_{n-1}(x_{n-1})\tfrac{\partial}{\partial x_n}\Big(S_n(x_n)C(\overline{0})u\Big)\Big)\dots\Big)\Big) =$$

$$= \tfrac{\partial^n}{\partial x_1\cdot\ldots\cdot\partial x_n}\Big(\prod_{i=1}^{n} S_i(x_i)C(\overline{0})u\Big).$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. (Основная теорема).
$\forall u \in X$:

$$C(x_1,\dots,x_n)u = \frac{\partial^n}{\partial x_1\cdot\ldots\cdot\partial x_n}\left(\prod_{i=1}^{n} S_i(x_i)C(\overline{0})u\right).$$

Следствие 1. Для $n = 2$ полученная формула приобретает вид

$$C(x_1,x_2)u = C_1(x_1)C_2(x_2)u + S_1(x_1)S_2(x_2)\frac{\partial^2 C}{\partial x_1\partial x_2}(0,0)u \quad \forall u \in X.$$

Следствие 2. Для $X = \mathbb{R}$, если в качестве КОФ взять $\cos(x_1+x_2+\ldots+x_n)$, полученная формула приводит к известной формуле тригонометрии для косинуса суммы.

Список литературы

[1] Goldstein J.A. On the convergence and approximation of cosine functions. Aeq. Math, 10 (1974), 201-205.

[2] Fattorini H.O. Second order differential equations in Banach spaces // North Holland. Amsterdam. – 1985.

[3] Kureppa S. A cosine functional equation in Hilbert space // Can J. Math. – 1960 – 12. p. 45–49.

[4] Sova M. Cosine operator functions, Warszawa, PWN, 1966, 47s. (Inst. matem.).

[5] Trevis C.C. Webb G.F. Cosine families and abstract non-linear second order differential equations. // Acta math. Acad. Sci Hung. – 1978. – 32., №3. – p. 75–96.

НТУУ "Киевский Политехнический Институт", Киев, пр. Победы, 37, Украина.