Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2003) 130 - 132
УДК 517.95

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЯДРА $\cos(\alpha-\beta)$ КОМПОЗИЦИЕЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЯДЕР

М. З. Двейрин, А. В. Фокша
Донецкий национальный университет,
Донецк, Украина

Ключевые слова: ряд Фурье, ядро интегрального оператора

На конференции И. Г. Петровского 2001 г. И. В. Волович сформулировал следующую задачу.

Задача. Описать множество вещественных $g \in \mathbb{R}$ для которых существуют две измеримые 2π-периодические по обоим переменным вещественные функции $u(x,\alpha)$ и $v(x,\beta)$ такие, что $|u(x,\alpha)| \le 1, |v(x,\beta)| \le 1$ и справедливо равенство:

$$g\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,\alpha)v(x,\beta)dx. \tag{1}$$

Эта задача тесно связана с задачами статистического прогноза в квантовой механике и, в частности, с теоремой Белла (см. [2]). Эта теорема утверждает, что квантовые корреляционные функции не допускают представления в виде классических корреляционных функций разделенных случайных переменных. О связи теоремы Белла с критерием локальности для гауссовых волновых функций см. в [3].

Сделаем предварительно очевидное замечание:

(i) если представление (1) имеет место для некоторого $g_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, то оно имеет место для любого g с $|g| \le |g_0|$;

Рассмотрим раздельно случаи равных и неравных между собой функций u и v.

1. В этом пункте мы приведем полное решение задачи для случая равных функций $u = v$. Справедливо следующее

Предложение 1. *Равенство* (1) *в случае* $u(x,\alpha) = v(x,\alpha)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $g \in [0,\ 1/2]$.

Доказательство. Разложим функцию $u(x,\alpha)$ в ряд Фурье по переменной α. Коэффициенты разложения будут функциями от x:

$$u(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}(A_k(x)\cos(k\alpha) + B_k(x)\sin(k\alpha)), \tag{2}$$

где:

$$A_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,y)dy;$$

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x,y)\cos(ky)dy;$$

$$B_0(x) \equiv 0;$$

$$B_k(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(x,y)\sin(ky)dy;$$

Из теоремы Фубини следует измеримость функций $A_k(x)$ и $B_k(x)$, что вместе с ограниченностью гарантирует их суммируемость.

Подставляя разложение (2) функции $u(x,\alpha)$ в уравнение (1), получим

$$2\pi g\cos(\alpha-\beta) = 2\pi g(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$
$$= \sum_{k,l=0}^{\infty}((A_k, A_l)\cos k\alpha\cos l\beta + (A_k, B_l)\cos k\alpha\sin l\beta$$
$$+ (B_k, A_l)\sin k\alpha\cos l\beta + (B_k, B_l)\sin k\alpha\sin l\beta), \quad (3)$$

где знак $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение в $L^2([0,\ 2\pi])$. Обе части равенства являются рядами Фурье одной функции, откуда следует совпадение соответствующих коэффициентов Фурье. В частности, получаем равенства:

$$(A_0, A_0) = (A_2, A_2) = (A_3, A_3) = \ldots = 0;$$
$$(B_0, B_0) = (B_2, B_2) = (B_3, B_3) = \ldots = 0;$$
$$(A_1, A_1) = (B_1, B_1) = 2\pi g;$$
$$(A_1, B_1) = 0;$$

Из первых двух равенств следует:

$$A_0(x) \equiv A_2(x) \equiv A_3(x) \equiv \ldots \equiv 0; \quad B_0(x) \equiv B_2(x) \equiv B_3(x) \equiv \ldots \equiv 0; \quad (4)$$

откуда

$$u(x,\alpha) = A_1(x)\cos\alpha + B_1(x)\sin\alpha. \quad (5)$$

Элементарно показывается, что при фиксированном $x \in [0,\ 2\pi]$ максимум функции $u(x,\ \alpha)$ вида (5) имеет вид

$$\max_{\alpha\in[0,\ 2\pi]} u(x,\alpha) = \sqrt{A_1^2(x) + B_1^2(x)}. \quad (6)$$

Отсюда следует, что для удовлетворения условия $|u(x,\ \alpha)| \le 1$ необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\sqrt{A_1^2(x) + B_1^2(x)} \le 1, \qquad x \in [0,\ 2\pi]. \quad (7)$$

Далее, получаем

$$4\pi g = (A_1, A_1) + (B_1, B_1) = \int\limits_0^{2\pi}(A_1^2(x) + B_1^2(x))dx \le 2\pi, \quad (8)$$

откуда $0 \le g \le \frac{1}{2}$. Для таких g функции

$$A_1(x) = \sqrt{g}; \quad B_1(x) = \sqrt{g}\,\mathrm{sgn}(x); \quad (9)$$

удовлетворяют условиям (7) и, значит, функция $u(x,\alpha) = \sqrt{g}(\cos\alpha + \mathrm{sgn}(x)\sin\alpha)$ является искомой.

2. В этом пункте мы рассмотрим случай неравных между собой функций u и v, т.е. когда $u(x,y) \ne v(x,y)$.

Предложение 2. *Представление* (1), *в котором* $|u(x,\ \alpha)| \le 1$ *и* $|v(x,\ \alpha)| \le 1$ *имеет место при* $|g| \le 2/pi$.

Доказательство. Укажем функции u и v для $g = \frac{2}{\pi}$, откуда будет следовать их существование для $|g| \le \frac{2}{\pi}$. Положим

$$u(x,\alpha) = \mathrm{sgn}(\cos(x-\alpha)), \qquad v(x,\beta) = \cos(x-\beta). \tag{10}$$

Для функции $u(x,\alpha)$ известно (см. [1], стр. 115) разложение в ряд Фурье

$$u(x,\alpha) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left[\cos(2k+1)x\cos(2k+1)\alpha + \sin(2k+1)x\sin(2k+1)\alpha\right] \tag{11}$$

$$v(x,\beta) = \cos x\cos\beta + \sin x\sin\beta. \tag{12}$$

Используя ортогональность системы тригонометрических функций, находим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,\alpha)v(x,\beta)dx = \frac{2}{\pi}(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = \frac{2}{\pi}\cos(\alpha-\beta). \tag{13}$$

Remark 8. Отметим, что результат Предложения 1 был известен И. В. Воловичу. Кроме того, он доказал невозможность представления (1) при $|g| \in [1/\sqrt{2},\ 1]$. Таким образом, сопоставление этого утвердения с Предложением 2 показывает, что в исследуемой задаче остается неисследованным случай $|g| \in (2/\pi,\ 1/\sqrt{2})$.

В заключение мы выражаем признательность М. М. Маламуду, который ознакомил нас как с задачей И. В. Воловича, так и с информацией, содержащейся в Замечании 1.

Список литературы

[1] Ахиезер Н. И. *Лекции по теории аппроксимации.* — М.: "Наука", 1965, —408 с.
[2] Bell J.S., — Physics 1, 195, 1964.
[3] Volovich I. V. *Bell's Theorem and Locality in Space.*— arXiv:quant-ph/0012010 1 Dec 2000.

Математический факультет, Донецкий национальный университет, ул. Университетская, 24, г. Донецк, Украина