Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2003) 3 - 7

УДК 517.98

СИМВОЛИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Е. В. Акулич
Белорусский государственный университет,
Минск, Белоруссия

The paper contains a description of local representatives and the calculation of the Fredholm property for Toeplitz operators with dicontinuous oscillating coefficients.

В настоящей работе получено описание локальных представителей и найдены условия фредгольмовости для теплицевых операторов с разрывными осцилирующими коэффициентами.

Пусть C — алгебра кусочно-непрерывных функций на единичной окружности S^1, разрывная в точке $m_0 \in S^1$, S — сингулярный интегральный оператор, действующий в $L^2(S^1)$, а P – проектор в пространстве Харди H^2 вида

$$P = \frac{I+S}{2}.$$

Через D мы обозначим алгебру, порожденную операторами, действующими следующим образом:

$$d_c f = P(cf),\ f \in H^2,\ c \in C;$$

через A – алгебру, порожденную операторами d_a, $a \in C(S^1)$. Тогда D является алгеброй локального типа по отношеню к C^*-алгебре A и идеалу K компактных операторов, действующих в H^2, то есть для любых $d_a \in A$ и $d_c \in D$ существует оператор $k \in K$, такой, что

$$d_a d_c = d_c d_a + k.$$

Из [1], [2, 33.12], [3, 54.1] известно, что пространсво примитивных идеалов Prim D алгебры D можно представить в виде дизъюнктного объединения:

$$S^1 \setminus \{m_0\} \cup \mathbf{R}_{m_0} \cup (m_0, +) \cup (m_0, -).$$

База топологии на Prim D задается следующим образом :

(a) окрестностью точки $(m_0, +)$ является объединение множеств

$$[m_0, m_1) \cup \{t \in \mathbf{R}_{m_0} : t > N\},$$

где $N \in \mathbf{R}$ и m_1 — произвольная точка, такая, что $m_0 < m_1$ (здесь $<$ — порядок, определенный ориентацией на S^1);

(b) окрестностью точки $(m_0, -)$ является объединение множеств

$$(m_2, m_0] \cup \{t \in \mathbf{R}_{m_0} : t < N\};$$

(c) окрестностью точки $t \in \mathbf{R}_{m_0}$ является открытый интервал на $\mathbf{R}_{m_0}$, содержащий m_0;

(d) окрестность точки $m \neq m_0$ задается стандартным образом (как окрестность точки на кривой).

Обозначим через U_h оператор умножения на функцию $a(m)$, непрерывную на $S^1 \setminus \{m_0\}$, которая в окрестности точки m_0 имеет вид

$$a(m) = \begin{cases} e^{-ih\ln(m_0-m)} & \text{при } m < m_0, \\ e^{-ih\ln(m-m_0)} & \text{при } m_0 < m. \end{cases} \tag{1}$$

Предметом данной работы является алгебра $V = C^*(D, \widetilde{U}_h)$, порожденная операторами $d \in D$ и операторами $\widetilde{U}_h = PU_h$, $h \in \mathbf{R}$.

Каждому элементу $d_c \in D$, определенному функцией $c \in C(S^1 \setminus \{m_0\})$, поставим в соответствие оператор $\pi(d_c)$, действующий в пространстве $l^2(S^1, H_m)$:

$$\pi(d_c) = \bigoplus_{m\in S^1} d_c(m), \tag{2}$$

где $H_{m_0} = L^2(\mathbf{R}_{m_0})$ и $H_m = \mathbf{C}$ при $m \neq m_0$, $d_c(m)$ — локальный представитель элемента d_c в точке m — оператор в H_m, определенный следующим образом [2, 31.30, 33.20]:

(1) если $m = m_0$, то

$$[d_c(m_0)]\xi(t) = \left(c_- + \frac{c_+ - c_-}{1+e^{-2\pi t}}\right)\xi(t), \tag{3}$$

$$[d_c(m_0, \pm)]\xi(t) = c_\pm \xi(t), \tag{4}$$

где $\xi(t) \in L^2(\mathbf{R}_{m_0})$, c_+ и c_- — это пределы слева и справа функции $c(m)$ при $m \to m_0$;

(2) если $m \neq m_0$, то

$$[d_c(m)]\xi = c(m)\xi, \ \xi \in \mathbf{C}. \tag{5}$$

Оператору $\widetilde{U}_h$ поставим в соответствие оператор

$$\pi_h : l^2(S^1, H_m) \to l^2(S^1, H_m),$$

определенный следующим образом:

(1) если $m = m_0$,

$$(\pi_h f)_{m_0}(t) = \frac{1+e^{-2\pi t}\cdot e^{-\pi h}}{1+e^{-2\pi t}} \cdot f_{m_0}(t+h), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} (\pi_h f)_{(m_0,+)}(t) &= f_{(m_0,+)}(t+h), \\ (\pi_h f)_{(m_0,-)}(t) &= e^{-\pi h} f_{(m_0,-)}(t+h); \end{aligned} \tag{7}$$

(2) если $m \neq m_0$, то

$$(\pi_h f)_m = a(m) f_m, \tag{8}$$

где $f = \{f_m\}_{m\in S^1}$, $f_m \in H_m$.

Теорема 1. *Отображения*

$$\sigma : d_c \to \pi(d_c), \ d_c \in D,$$

$$\sigma : \widetilde{U}_h \to \pi_h$$

порождают изоморфизм

$$\sigma : C^*(D, \widetilde{U}_h) \Big/ K \to C^*(\pi(D), \pi_h),$$

Доказательство.

Алгебра $C^*(D, \widetilde{U}_h)$ является подалгеброй алгебры $PC^*(B, U_h)P$ на $\mathrm{Im}\ P$, где B — алгебра, порожденная операторами, действующими в $L^2(S^1)$, вида

$$b = a + dS.$$

a и d — операторы умножения на кусочно-непрерывные на S^1 функции, разрывные в точке $m_0 \in S^1$, поэтому, принимая во внимание теорему 1 из [4], достаточно показать, что формулы (6) — (8) дают нам выражение для $\pi(P)\pi_h\pi(P)$ на $\mathrm{Im}\ \pi(P)$, где $\pi(P)$ и π_h заданы в [4] формулами (2) — (4).

Для того, чтобы не путать обозначения, заменим π, которое встречается в [4], на $\overline{\pi}$. То есть, нам нужно доказать, что

$$\pi_h = \overline{\pi}(P)\overline{\pi}_h\overline{\pi} \ \text{ на } \ \mathrm{Im}\ \overline{\pi}. \tag{9}$$

Из [2, 31.30] известно, что $f \in \mathrm{Im}\ \overline{\pi}(P)$ тогда и только тогда, когда

$$f(t) = \lambda(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}e^{-\pi t} \end{pmatrix}$$

и $f \in \mathrm{Ker}\ \overline{\pi}(P)$ тогда и только тогда, когда

$$f(t) = \delta(t) \begin{pmatrix} \mathrm{i}e^{-\pi t} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

где $\lambda(t)$, $\lambda(t)e^{-\pi t}$, $\delta(t)$, $\delta(t)e^{-\pi t} \in L^2(\mathbf{R})$.

При $m = m_0$ для любого $f \in \mathrm{Im}\ \overline{\pi}(P)$ имеем:

$$(\overline{\pi}_h f)_{m_0}(t) = f_{m_0}(t+h) = \lambda(t+h) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}e^{-\pi(t+h)} \end{pmatrix} = \gamma(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}e^{-\pi t} \end{pmatrix} + \delta(t) \begin{pmatrix} \mathrm{i}e^{-\pi t} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует:

$$\gamma(t) = \frac{1 + e^{-2\pi t} \cdot e^{-\pi h}}{1 + e^{-2\pi t}} \cdot \lambda(t+h),$$

что доказывает формулу (6). При переходе к пределам $t \to \pm\infty$ получаем формулы (7).

Аналогично проверяется формула (8). Таким образом, равенство (9) верно.

Определение 1. Образ $\sigma(d)$ элемента $d \in C^*(D, \widetilde{U}_h)$ относительно отображения

$$C^*(D, \widetilde{U}_h) \to C^*(D, \widetilde{U}_h) \Big/ K \cong C^*(\pi(D), \pi_h)$$

называется *символом* оператора d.

Из теоремы 1 следует, что d фредгольмов тогда и только тогда, когда $\sigma(d)$ обратим.

Оператору $d \in C^*(D, \widetilde{U}_h)$ поставим в соответствие оператор, действующий в $l^2(\mathrm{Prim}\ D, H_x)$:

$$\widetilde{\pi}(d) = \bigoplus_{x \in \mathrm{Prim}\ D} \pi_x(d),$$

где $\pi_x(d)$ определяются равенствами:

(1) если $x = (m_0, t)$, то (3) и (6), $H_x = L^2(S^1)$;
(2) если $x = (m_0, \pm)$, то (4) и (7), $H_x = L^2(S^1)$;
(3) если $x = m$, $m \neq m_0$, то (5) и (8), $H_x = \mathbf{C}$.

Теорема 2. *Отображение* $\widetilde{\pi}: C^*(D,\widetilde{U}_h) \to l^2(\mathrm{Prim}\ D, H_x)$, *определяет изоморфизм*

$$C^*(D,\widetilde{U}_h) \cong \bigoplus_{x\in \mathrm{Prim}\ D} \pi_x(C^*(D,\widetilde{U}_h)) = \widetilde{\pi}(C^*(D,\widetilde{U}_h)). \tag{10}$$

Оператор $d \in C^*(D,\widetilde{U}_h)$ *обратим в том и только в том случае, когда все* $\pi_x(d)$, $x \in \mathrm{Prim}\ D$, *обратимы.*

Доказательство.

Так как действие группы гомеоморфизмов $\{t_h\}_{h\in\mathbf{R}}$ (см. [5, 16.1])

$$t_h = \begin{cases} x, & \text{при } x \in S^1 \setminus \{m_0\}, \\ x+h, & \text{при} x \in \mathbf{R}_{m_0} \cup (m_0,+) \cup (m_0,-) \end{cases}$$

не является топологически свободным, то применим теорему В.28 из [5]. Проверка условий, необходимых для того, чтобы воспользоваться этой теоремой, выполняется тем же способом, что и для теоремы 2 из [4].

Рассмотрим оператор из алгебры $C^*(D,\widetilde{U}_h)$ вида

$$d = d_0 + d_1\widetilde{U}_h, \tag{11}$$

где d_0, d_1 — теплицевы операторы, определенные соответственно функциями $c_0(m)$, $c_1(m) \in C(S^1 \setminus \{m_0\})$. Пределы справа и слева при $m \to m_0$ этих функций обозначим через $c_0^{\pm}$ и $c_1^{\pm}$.

Выпишем в явном виде условия обратимости для оператора $\widetilde{\pi}(d)$, то есть обратимости операторов

$$\widetilde{\pi}_x(d) = \pi_x(d_0) + \pi_x(d_1)\pi_x(\widetilde{U}_h), \ x \in \mathrm{Prim}\ D. \tag{12}$$

Если $x = (m_0,t)$, $t \in \mathbf{R}_{m_0}$, то

$$\widetilde{\pi}_{(m_0,t)}(d) = (\pi(d_0) + \pi(d_1)\pi(\widetilde{U}_h))(m_0,t) = a_0(t) + a_1(t)T_h,$$

где

$$a_0(t) = c_0^- + \frac{c_0^+ - c_0^-}{1+e^{-2\pi t}},$$

$$a_1(t) = \left(c_1^- + \frac{c_1^+ - c_1^-}{1+e^{-2\pi t}}\right)\cdot\frac{1+e^{-2\pi t}\cdot e^{-\pi h}}{1+e^{-2\pi t}},$$

T_h — оператор сдвига

$$(T_hf)(t) = f(t+h).$$

Далее воспользуемся теоремой 17.3 [2]. Для этого вычислим пределы:

$$a_0(+\infty) = c_0^- + \frac{c_0^+ - c_0^-}{1+0} = c_0^+;$$

$$a_0(-\infty) = c_0^- + 0\cdot(c_0^+ - c_0^-) = c_0^-.$$

Аналогично находим, что

$$a_1(\pm\infty) = c_1^{\pm}.$$

Таким образом, по теореме 17.3 [2], оператор $\widetilde{\pi}_{(m_0,t)}(d)$, $t \in \mathbf{R}_{m_0}$ обратим тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

$$a_0(t) \neq 0 \text{ и } |c_0^{\pm}| > |c_1^{\pm}|; \tag{13}$$

$$a_1(t) \neq 0 \text{ и } |c_1^{\pm}| > |c_0^{\pm}|. \tag{14}$$

Если $x = (m_0,+)$, то

$$\widetilde{\pi}_{(m_0,+)}(d) = (\pi(d_0) + \pi(d_1)\pi(\widetilde{U}_h))(m_0,+) = c_0^+ + c_1^+T_h.$$

Отсюда оператор $\widetilde{\pi}_{(m_0,+)}(d)$ обратим тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

$$c_0^+ \neq 0 \text{ и } |c_0^+| > |c_1^+|; \tag{15}$$

$$c_1^+ \neq 0 \text{ и } |c_1^+| > |c_0^+|. \tag{16}$$

Если $x = (m_0, -)$, то

$$\widetilde{\pi}_{(m_0,-)}(d) = (\pi(d_0) + \pi(d_1)\pi(\widetilde{U}_h))(m_0, -) = e^{-\pi h}(c_0^- + c_1^- T_h).$$

Оператор $\widetilde{\pi}_{(m_0,-)}(d)$ обратим тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

$$c_0^- \neq 0 \text{ и } |c_0^-| > |c_1^-|; \tag{17}$$

$$c_1^- \neq 0 \text{ и } |c_1^-| > |c_0^-|. \tag{18}$$

Если $x = m$, $m \neq m_0$, то

$$[\widetilde{\pi}_m(d)]\xi = [(\pi(d_0) + \pi(d_1)\pi(\widetilde{U}_h))(m)]\xi = (c_0(m) + c_1(m)a(m))\xi, \ \xi \in \mathbf{C}.$$

Оператор $\widetilde{\pi}_m(d)$ обратим тогда и только тогда, когда

$$(\pi(d_0) + \pi(d_1)\pi(\widetilde{U}_h))(m) \neq 0,$$

что равносильно

$$c_0(m) + c_1(m)|\lambda| \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}, \ |\lambda| = 1. \tag{19}$$

Теорема 3. *Оператор $d \in C^*(D, \widetilde{U}_h)$ вида (11) обратим в том и только в том случае, когда выполнено неравенство (19) и по одному из условий (13) или (14), (15) или (16),(17) или (18).*

Рассмотрим теперь оператор вида

$$d = \sum_{j=-s}^{k} d_j \widetilde{U}_h^j, \tag{20}$$

где d_j — операторы, определенные функциями $c_j(m) \in C(S^1 \setminus \{m_0\})$, $j = \overline{-s, k}$.

Список литературы

[1] Пламеневский Б. А. Алгебры псевдодифференциальных операторов. М., 1986.

[2] AntonevichA., LebedevA. Functional differential equations: I. C^*–theory. Longman Scientific & Technical. 1994.

[3] AntonevichA., LebedevA., Belousov M. Functional differential equations: II. C^*–applications. Longman Scientific & Tech- nical. 1998. Part 2.

[4] Акулич Е.В., ЛебедевА.В.Символическое исчисление для сингулярных интегральных операторов с разрывными осциллирующими коэффициентами... (в печати)

[5] AntonevichA., LebedevA.,BelousovM.Functional differential equations: II. C^*–applications. Longman Scientific & Tech- nic 1998. Part 1.

Белорусский государственный университет, Минск, Белоруссия