Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2003) 111 - 115

УДК 517.95

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЁННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПОРЯДКА $2-\varepsilon$

А.В. Агибалова, Л.Л. Оридорога
Донецкий национальный университет,
Донецк, Украина

Хорошо известно (см [5]), что система собственных и присоединённых функций (ССПФ) оператора Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y. \tag{1}$$

$$y'(0) - h_0 y(0) = y'(1) - h_1 y(1) = 0 \tag{2}$$

полна в $L_2[0,1]$ при любом комплекснозначном потенциале $q \in L_1[0,1]$ и любых $h_0, h_1 \in \mathbb{C}$. Подобный результат имеет место (см. [5]) также для произвольных невырожденных граничных условий.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка $n > 2$ полнота ССПФ задачи с нерегулярными распадающимися граничными условиями впервые анонсирована М.В. Келдышем в [2], а доказана в работе А. А. Шкаликова [6]. В совместной работе М. М. Маламуда и одного из авторов [4] этот результат А. А. Шкаликова был распространен на случай уравнений произвольного дробного порядка $n-\varepsilon$, где $n \geq 3$.

В настоящей работе аналогичные результаты получены для дифференциального оператора дробного порядка $(2-\varepsilon)$ с распадающимися граничными условиями. Кроме того, исследовано асимптотическое поведение собственных значений такого оператора в случае нулевого потенциала. При этом, оказывается, что в отличие от уравнений целых порядков, собственные значения асимптотически приближаются не к лучам, а к некоторой кривой, для которой получено явное уравнение.

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ дифференциальное уравнение дробного порядка $(2-\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,1)$

$$y^{(2-\varepsilon)} + q(x)y^{(-\varepsilon)} = \lambda y, \tag{3}$$

с распадающимися краевыми условиями:

$$hy^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) + y^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = 0, \tag{4}$$

$$h_1 y^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) + y^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda) = 0. \tag{5}$$

Здесь

$$y^{(2-\varepsilon)} = \frac{d^2}{dx^2} J^\varepsilon y, \tag{6}$$

а J^ε—оператор дробного интегрирования:

$$J^\varepsilon y(x) \int_0^x \frac{(x-t)^{\varepsilon-1} y(t)}{\Gamma(\varepsilon-1)}\, dt. \tag{7}$$

Рассмотрим вначале случай нулевого потенциала, т.е. уравнение вида

$$y^{(2-\varepsilon)} = \lambda y. \tag{8}$$

Это уравнение имеет следующую фундаментальную систему решений:

$$c(x,\lambda) = \Gamma(1-\varepsilon)x^{-\varepsilon}E_{\frac{1}{2-\varepsilon}}\left(\lambda x^{2-\varepsilon}, 1-\varepsilon\right), \tag{9}$$

$$s(x,\lambda) = \Gamma(2-\varepsilon)x^{1-\varepsilon}E_{\frac{1}{2-\varepsilon}}\left(\lambda x^{2-\varepsilon}, 2-\varepsilon\right), \tag{10}$$

удовлетворяющую начальным условиям:

$$\begin{cases} c^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) = s^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = 1, \\ c^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = s^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $E_\rho(z;\mu)$–функция типа Миттаг-Леффлера, которая определяется степенным рядом

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})} \quad (\rho > 0), \tag{12}$$

где μ, вообще говоря, произвольный комплексный параметр. Хорошо известно (см.[1]), что $E_\rho(z;\mu)$–целая функция порядка ρ и типа 1,

Используя асимптотическое поведение функций типа Миттаг-Леффлера (см.[1]), выпишем асимптотику для функций $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$:

$$c(x,\lambda) = \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + O\left(\frac{x^{\varepsilon-4}}{|\lambda|^2}\right), \tag{13}$$

$$s(x,\lambda) = \frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon-1}{2-\varepsilon}}e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + O\left(\frac{x^{\varepsilon-3}}{|\lambda|^2}\right). \tag{14}$$

Используя оценки (13) и (14), докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $h_1 + h(\varepsilon-1) + hh_1 \neq 0$. Тогда собственные значения λ_n краевой задачи (8), (4), (5) асимптотически приближаются к кривой, описываемой уравнением*

$$\lambda^{1+\frac{1}{2-\varepsilon}}e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} = \frac{2-\varepsilon}{\Gamma(\varepsilon-1)}(h_1 + h(\varepsilon-1) + hh_1), |\lambda| > \lambda_0. \tag{15}$$

При этом большие по модулю собственные значения λ_n удовлетворяют асимптотике

$$\mathrm{Im}\left(\lambda_n^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\right) = R + 2\pi n - \mathrm{sgn}(n)\frac{\pi}{2}(3-\varepsilon) + o(1), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

где

$$R = arg\left(\frac{h_1 + h(\varepsilon-1) + hh_1}{\Gamma(\varepsilon-1)}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $y(x,\lambda)$–общее решение уравнения (8), удовлетворяющее граничному условию (4), т.е.

$$y(x,\lambda) = c(x,\lambda) - hs(x,\lambda). \tag{18}$$

Для того чтобы λ было собственным значением необходимо и достаточно, чтобы $y(x,\lambda)$ удовлетворяло условию (4), т.е.

$$\chi(\lambda) = hs^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda) - c^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda) + h_1\left(hs^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) - c^{(-\varepsilon)}(1,\lambda)\right) = 0. \tag{19}$$

Так же как и для уравнений целых порядков будем называть аналитическую функцию $\chi(\lambda)$ вида (19) характеристической функцией задачи (8), (4), (5). При этом собственные значения задачи (8), (4), (5) и только они являются нулями функции $\chi(\lambda)$.

Запишем асимптотические оценки для дробных производных функций $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ в точке $x = 1$:

$$c^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) = \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon}e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} - \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon-1)}\frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right), \tag{20}$$

$$c^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda)=\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}+O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right), \tag{21}$$

$$s^{(-\varepsilon)}(1,\lambda)=\frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{2-\varepsilon}\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}}e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}-\frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}\frac{1}{\lambda}+O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right), \tag{22}$$

$$s^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda)=\frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{2-\varepsilon}e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}-\frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon-1)}\frac{1}{\lambda}+O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right). \tag{23}$$

Тогда характеристическая функция примет вид

$$\chi(\lambda)=\left(-\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}+\frac{h\Gamma(2-\varepsilon)-h_1\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon}+\frac{hh_1\Gamma(2-\varepsilon)}{2-\varepsilon}+\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}}\right)e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}+$$
$$+\left(\frac{h_1\Gamma(1-\varepsilon)-h\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon-1)}-\frac{hh_1\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}\right)\frac{1}{\lambda}+O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right). \tag{24}$$

Для удобства записи обозначим

$$-\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon}=A,\qquad \frac{h\Gamma(2-\varepsilon)-h_1\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon}+\frac{hh_1\Gamma(2-\varepsilon)}{2-\varepsilon}=B,$$
$$\frac{hh_1\Gamma(2-\varepsilon)}{2-\varepsilon}=C,\qquad \frac{h_1\Gamma(1-\varepsilon)-h\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon-1)}-\frac{hh_1\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}=D. \tag{25}$$

Теперь характеристическую функцию можно переписать в виде

$$\chi(\lambda)=\left(A\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}+B+C\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}}\right)e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}+D\frac{1}{\lambda}+O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right)=$$
$$=\left(A\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}+B+C\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}}\right)\left(e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}+\frac{D}{A}\lambda^{-1-\frac{1}{2-\varepsilon}}\right)+O\left(|\lambda|^{-1-\frac{1}{2-\varepsilon}}\right). \tag{26}$$

Тогда, по теореме Руше, корни функции $\chi(\lambda)$ будут иметь такую же асимптотику как и корни уравнения

$$\left(A\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}+B+C\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}}\right)\left(e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}+\frac{D}{A}\lambda^{-1-\frac{1}{2-\varepsilon}}\right)=0. \tag{27}$$

Уравнение $A\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}+B+C\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}}=0$ имеет конечное число корней, поэтому интерес представляют корни уравнения

$$e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}+\frac{D}{A}\lambda^{-1-\frac{1}{2-\varepsilon}}=0, \tag{28}$$

т.е.

$$\lambda^{1+\frac{1}{2-\varepsilon}}e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}=-\frac{D}{A}=\frac{2-\varepsilon}{\Gamma(\varepsilon-1)}(h_1-h+h\varepsilon+hh_1). \tag{29}$$

Обозначим через P число

$$P=\left|\frac{2-\varepsilon}{\Gamma(\varepsilon-1)}(h_1-h+h\varepsilon+hh_1)\right|,\quad P>0. \tag{30}$$

Тогда

$$|e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}|=\frac{P}{|\lambda^{1+\frac{1}{2-\varepsilon}}|}. \tag{31}$$

Так как $|e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}|=e^{\mathrm{Re}\left(\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\right)}$ и $|\lambda^{1+\frac{1}{2-\varepsilon}}|=|\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}|^{\frac{1+\frac{1}{2-\varepsilon}}{\frac{1}{2-\varepsilon}}}$, то

$$e^{\mathrm{Re}\left(\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\right)}=\frac{P}{|\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}|^{\frac{1+\frac{1}{2-\varepsilon}}{\frac{1}{2-\varepsilon}}}}. \tag{32}$$

Откуда

$$\frac{\operatorname{Re}\left(\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\right)}{|\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}|} = \frac{\ln P}{|\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}|} - \frac{1+\frac{1}{2-\varepsilon}\ln|\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}|}{\frac{1}{2-\varepsilon}\,|\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}|} \to 0, \quad |\lambda| \to +\infty. \tag{33}$$

Следовательно,

$$arg\left(\lambda^{1+\frac{1}{2-\varepsilon}}\right) = (3-\varepsilon)arg\left(\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\right) \to \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}})\frac{\pi}{2}(3-\varepsilon), \quad |\lambda| \to +\infty. \tag{34}$$

Беря аргумент левой и правой частей равенства (29) получим, при достаточно больших значениях $|\lambda|$,

$$\operatorname{Im}\left(\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\right) + \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}})\frac{\pi}{2}(3-\varepsilon) = arg\left(\frac{h_1 + h(\varepsilon-1) + hh_1}{\Gamma(\varepsilon-1)}\right) + 2\pi n + o(1), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{35}$$

Или

$$\operatorname{Im}\left(\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\right) = arg\left(\frac{h_1 + h(\varepsilon-1) + hh_1}{\Gamma(\varepsilon-1)}\right) + 2\pi n - \operatorname{sgn}(n)\frac{\pi}{2}(3-\varepsilon) + o(1), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{36}$$

Теорема доказана. □

Теперь, используя оценки (13) и (14), а также доказанное в [3] существование треугольного оператора преобразования для уравнения произвольного дробного порядка $n-\varepsilon$, докажем теорему о полноте ССПФ задачи (3), (4), (5).

Теорема 2. *Пусть $q(x)$ — аналитическая функция.*
Тогда ССПФ задачи (3), (4), (5) полна в пространстве $L_2[0,1]$.

Доказательство. Приведем здесь лишь набросок доказательства теоремы.

Введём функкцию $\omega(x,\lambda)$—решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} \omega^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) = 1, \\ \omega^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = -h. \end{cases} \tag{37}$$

Такая функция при всех λ удовлетворяет граничному условию (4). Поэтому λ будет собственным значением тогда и только тогда, когда

$$\chi(\lambda) = h_1\omega^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) + \omega^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda) = 0. \tag{38}$$

При этом кратность нуля λ характеристической функции $\chi(\lambda)$ совпадает с кратностью собственного значения λ оператора (3), (4), (5).

Предположим, что функция $f(x)$ ортогональна ССПФ задачи (3), (4), (5). Рассмотрим скалярное произведение функций $f(x)$ и $\omega(x,\lambda)$:

$$\tilde{F}(\lambda) = \int_0^1 f(x)\overline{\omega(x;\lambda)}\,dx. \tag{39}$$

Очевидно, что $\tilde{F}(\lambda)$—целая функция. Кроме того каждое собственное значение λ кратности p является нулём функции $\tilde{F}(\lambda)$ порядка не ниже p. Следовательно функция

$$F(\lambda) = \frac{\tilde{F}(\lambda)}{\chi(\lambda)} \tag{40}$$

является целой.

Известно (см [3]), что функция $\omega(x;\lambda)$ может быть получена с помощью оператора преобразования из функции $\omega_0(x;\lambda) = c(x,\lambda) - hs(x,\lambda)$—решения задачи Коши для уравнения (8) с начальными условиями

$$\begin{cases} \omega_0^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) = 1, \\ \omega_0^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = -h, \end{cases} \tag{41}$$

т.е.

$$\omega(\lambda;x) = (I+K)\omega_0(x;\lambda) = \omega_0(x;\lambda) + \int_0^x K(x,t)\omega_0(t;\lambda)\,dt, \tag{42}$$

где K—вольтерров интегральный оператор.

Из формулы (42) и оценок (13) и (14) вытекает следующая оценка функции $\omega(\lambda;x)$ на мнимой оси:

$$\omega(\lambda;x) = \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}(1+O(\tfrac{1}{|\lambda|})) + O(x^{-\varepsilon}). \tag{43}$$

Аналогично для $\chi(\lambda)$ получается оценка

$$\chi(\lambda) = -\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}(1+O(\tfrac{1}{|\lambda|})). \tag{44}$$

Из оценок (43) и (44) вытекает, что $F(\lambda)$—функция порядка не выше $2-\varepsilon$, а также что $F(\lambda) \to 0$ когда λ стремится к бесконечности по мнимой оси.

Тогда, по теореме Фрагмена–Линделёфа получаем, что $F(\lambda) \equiv 0$, а следовательно, и $\check{F}(\lambda) \equiv 0$. Но это означает, что $f(x)$ ортогональна $\omega(x;\lambda)$ при всех λ и, следовательно, $(I+K^*)f(x) = 0$.

Но так как оператор K вольтерров, то оператор $I+K^*$ обратим и, значит, $f(x) = 0$.

Таким образом, не существует ненулевой функции $f(x)$ ортогональной ССПФ задачи (3), (4), (5), т.е. эта система функций полна. □

Список литературы

[1] *Джарбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М. — Наука, 1966, 671С.

[2] *Келдыш М.В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряжённых уравнений. — Доклады АН СССР. — 1951 — т. 87, №1, С. 11-14

[3] *Маламуд М. М.* Подобие вольтерровых операторов и смежные вопросы теории дифференциальных уравнений дробных порядков. — Труды Мос. мат. общества, 1994, т. 55, С. 73-148.

[4] *Malamud M. M., Oridoroga L. L.* Analog of the Birkhoff theorem and the completeness results for fractional order differential differential equations.— Russian Jour. of Math. Physics, 2001, vol. 8, №3, p. 287-308.

[5] *Марченко В.А.* Операторы Штурма - Лиувилля и их приложения. — Киев -- "Наукова думка", 1977, 332С.

[6] *Шкаликов А.А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с распадающимися краевыми условиями// Функциональный анализ и его приложения. — 1976 — т. 10, №4, С. 69-80.

А.В. Агибалова, Л.Л. Оридорога, кафедра математического анализа и теории функций, математический факультет, Донецкий национальный университет, ул. Университетская, 24, г. Донецк

E-mail: oridoroga@skif.net