Ученые записки Таврического национального университета имени В.И.Вернадского
Серия «Физика». Том 15-16 (54-55). 2003 г. № 1. С. 103-112

УДК 621.382:537.5

ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ МОД ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ТОЛСТОЙ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНЕ

Резник Д. В., Лозовский В. З., Глумова М. В.

ВВЕДЕНИЕ

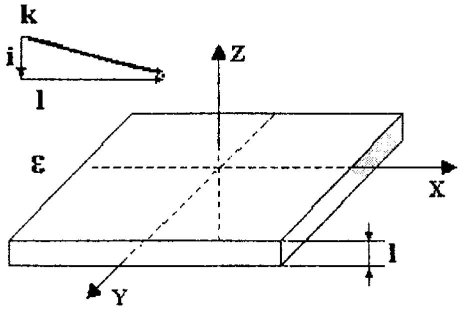
В настоящее время интенсивно развиваются микро - и нанотехнологии. Появляются принципиально новые приборы – фотоприемники на сверхрешетках, оптические волокна на фотонных кристаллах (photonic crystal fibers etc.) и ряд других приборов. [1, 2]. Сверхпроводники активно применяются в этих технологиях так, как удовлетворяют основным их требованиям – низкому уровню потерь и малым шумам.

Интерес к сверхпроводящим материалам вырос и в материаловедении. Это связано с появлением новых высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП), имеющих критические температуры порядка температуры кипения азота [2]. В настоящее время сверхпроводниковые устройства приобретают все большую популярность в качестве индуктивных ограничителей тока, запоминающих устройств с длительным периодом обновления, высокочастотных ключей с высоким показателем изменения импеданса, всевозможных фильтров и датчиков магнитного поля [3-4]. В связи с эти несомненный интерес представляет развитие как экспериментальных, так и теоретических методов исследования нано - размерных сверхпроводниковых частиц и изучение влияния эффектов локального поля на их электродинамические свойства.

Известно что, переход к микро - и нано размерам часто приводит к резкому изменению свойств материалов, в том числе к стимулированию сверхпроводящего состояния [5]. Важной электродинамической характеристикой системы малых размеров является спектр собственных колебательных мод, так как основную информацию о таких системах можно получить, измеряя их косвенные характеристики – поглощение электромагнитного излучения, восприимчивость. Изучение собственных мод, может позволить выявить, какие процессы преобладают в системе и насколько эффективно данная система может быть использована.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему, состоящую из однородной изотропной сверхпроводящей пластины и электромагнитного поля. Будем считать, что пластина либо находится внутри объема массивного однородного и изотропного тела, такого, что ее можно считать свободной (см. Рис.1.а), либо лежит на плоской границе раздела двух разных однородных и изотропных образцов и оказывается, таким образом, лежащей на подложке (Рис.1.б). Свойствами самой пластины пренебрегаем. Когда на систему, в нашем случае – пластину, падает электромагнитное поле, при их взаимодействии возможно возникновение следующих процессов.



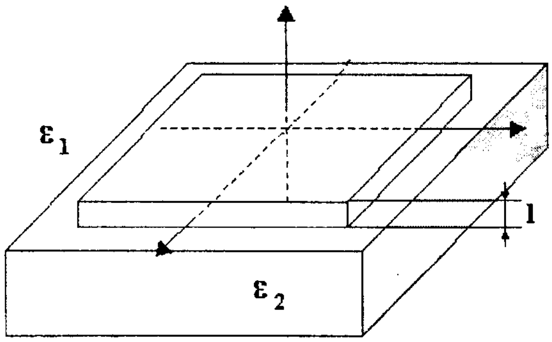


Рис.1.а «Свободная пластина» Рис.1.б «Пластина на подложке»

Под действием внешнего электромагнитного поля в системе станет возможным возбуждение долгоживущих колебаний (механических или электромагнитных) с частотами, обусловленными особенностями самой системы – ее геометрией и электродинамическими свойствами. Эти колебания являются характеристиками конкретной системы, как единой целой. Возникающие при этом возбуждения – это собственные моды системы. Эти колебания могут существовать в системе и без внешнего воздействия, но оно необходимо для их возбуждения и стимуляции. Причина их релаксации – наличие диссипации в любой реальной колебательной системе. Таким образом, под собственными модами системы будем понимать колебательные процессы в системе, которые могут возбуждаться даже при незначительном внешнем воздействии на определенных частотах, характерных для конкретной системы как целого.

Собственные моды, в данном рассмотрении, характеризуются временным параметром ω, характеристикой пространственного распространения – волновым вектором $\vec{q}$ (мерность этого вектора может быть различной в зависимости от симметричности геометрии систем, например, в случае однородной изотропной пластины $\vec{q} = (q_X, q_Y, 0)$ - двухмерный). При этом на одной и той же частоте возможна реализация нескольких собственных мод с разными волновыми векторами. То есть собственная мода системы полностью определена, если известна взаимосвязь между ее волновым вектором и частотой или, иначе говоря – дисперсионная характеристика $\omega = \omega(\vec{q})$. Дисперсионное соотношение является основной характеристикой собственных мод системы, как колебательных процессов.

Для определения собственных мод системы, точнее, их дисперсионного соотношения, необходимо определить отклик системы на некоторое внешнее воздействие, произвольной частоты с произвольным волновым вектором. При этом необходимо отобрать только те пары частота - волновой вектор, для которых отклик системы будет отличен от нуля при устремлении к нулю амплитуды внешнего воздействия.

Т.е., если возможно получить связь м
ежду внешним воздействием и откликом системы в виде

$$\vec{E}(\omega,\vec{q}) = \vec{L}^{SYS}(\omega,\vec{q})\vec{E}^{ext}(\omega,\vec{q}), \qquad (1)$$

где $\vec{E}(\omega,\vec{q})$ есть отклик системы, $\vec{E}^{ext}(\omega,\vec{q})$ - внешнее воздействие (в данном случае полевое) и $\vec{L}^{SYS}(\omega,\vec{q})$ - передаточный оператор, носящий название – фактор локального поля, то частоты собственных мод могут быть определены как:

$$\det\left[\left(\vec{L}^{SYS}(\omega,\vec{q})\right)^{-1}\right] = 0\,. \qquad (2)$$

Выражение (2) представляет собой дисперсионное соотношение, записанное в неявном виде.

Успешное применение подобной идеологии имеет место, например, при рассмотрении поверхностных собственных мод системы, состоящей из полупространства в вакууме (решение подобной задачи можно найти в работах [4-6]). Однако, в общем же случае, возникает ряд сложностей. В основе всех рассуждений лежит решение дифференциальных или интегральных уравнений поля (уравнений Максвелла). Эти уравнения решаются путем представления поля в виде совокупности волн (чаще всего плоских). При этом проводится пространственно-временное преобразование Фурье в трансляционно инвариантных направлениях. И если осуществление преобразования Фурье по времени всегда представляется возможным вследствие его однородности, то в случае систем с ограниченными размерами, Фурье преобразование возможно лишь частично. Так в нашем случае при рассмотрении бесконечной пластины Фурье-преобразование в направлении перпендикулярном поверхности пластины не имеет смысла – мы можем лишь говорить о представлении поля в этом направлении в виде дискретного ряда гармонических составляющих. В работе [17] продемонстрирована методика решения уравнения Липпмана - Швингера для самосогласованного локального поля в общем случае для малой частицы, при этом форма частицы не имела значения. Важно только, что ее размеры ограничены и переход к Фурье - компонентам невозможен. По этой причине приходится работать либо полностью в прямом пространстве (в случае частицы произвольной формы), либо в частично обратном (например, в рассматриваемом случае пластины имеет смысл перейти в $\vec{q}-Z$-пространство, где $\vec{q}=(q_X,q_Y,0)$- двумерный волновой вектор[12]). Подобная ситуация верна с физической точки зрения, так как только работая в прямом пространстве имеется возможность учесть влияние геометрических размеров и формы частицы на локальное поле. Но при этом становится принципиально невозможно определить независящий от координат фактор локального поля $\vec{L}^{SYS}(\omega,\vec{q})$. Уравнение (2) в этом случае принимает вид:

$$\det\left[\left(\vec{L}(\omega,\vec{q},\vec{r})\right)^{-1}\right] = 0 \qquad (3)$$

Соотношение (3) уже является локальным для каждой конкретной точки системы и описывает только возможность возникновения ненулевого локального поля с частотой ω и волновым вектором $\vec{q}$ в этой точке при инфинитезимально малом внешнем воздействии. Передаточная функция $\vec{L}(\omega,\vec{q},\vec{r})$ в общем случае не является глобальной характеристикой системы как целого, а лишь описывает реакцию каждой точки системы на внешнее возбуждение. Очевидно, что соотношение между частотой и волновым вектором в некоторой точке не может дать нам характеристику колебательных процессов в системе (так же как величина тока или напряжения на одном из элементов электромагнитного колебательного контура никак не описывает процесс, происходящий во всем контуре).

В этом случае, к разрешению подобной проблемы, возможно два подхода. Первый предполагает, что возникшее состояние в системе можно представить в виде совокупности некоторых колебательных процессов, распределенных по всей системе. Тогда можно перейти от общей передаточной функции к передаточным функциям для каждого такого колебательного процесса и рассматривать их как и ранее:

$$\det\left[\left(\bar{L}^{SYS}\left(\omega,\vec{q},\vec{\vec{q}}\right)\right)^{-1}\right]=0\,, \tag{4}$$

где $\vec{\vec{q}}$ - некий вектор (или просто набор квантовых чисел состояния), аналог волнового вектора, характеризующий рассматриваемое колебательное состояние. Подобный подход распространен в теории волноводов, где поле внутри волноведущего тракта рассматривается как сумма вкладов от мод разных порядков, характеризующихся волновыми индексами. Однако он не всегда представляется возможным. Например, какие колебательные состояния надо рассматривать при изучении малой частицы достаточно сложной формы, на которую падает электромагнитная волна под произвольным углом; введение понятия дискретных колебательных мод при рассмотрении малых (нано - размерных) систем представляется не адекватным действительности. При малых размерах системы колебательный процесс настолько обобщен всей системой, что не может быть индивидуализирован (хотя бы потому, что форма частицы в этом случае определяется неточно – трудно провести границу между объемом частицы и ее поверхностью). Также, возникает неопределенность в самом понятии волнового вектора собственной моды, которая, строго говоря, перестает быть волновым процессом. Можно ли говорить о поверхностных модах в системе, которая благодаря своим размерам практически вся состоит из поверхности.

Второй подход предполагает рассмотрение некоторой глобальной характеристики системы, которая бы зависела от свойств собственных колебательных процессов во всей системе. Таким примером может служить функция поглощения (хотя она не единственная характеристика подобного рода).

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСПЕРСИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПО ФУНКЦИИ ПОГЛОЩЕНИЯ

Если частота падающей электромагнитной волны, совпадает с одной из собственных частот системы, между внешней волной и этим колебанием возникает взаимодействие. Последнее приводит к тому, что часть энергии внешнего поля вследствие резонанса частот может перейти в колебательную энергию собственной моды и тем самым в собственную энергию системы. При этом, не акцентируя внимание на фазе, в которой происходит это взаимодействие, можно утверждать, что всегда найдутся собственные колебания, которые примут энергию внешних колебаний, совпав с ними в нужной фазе (это обеспечивается чрезвычайно большим количеством частиц, принимающих участие в рассматриваемом коллективном колебательном процессе). В том же случае, когда частота внешней волны не совпадает с собственными частотами системы, взаимодействие с перекачкой энергии между внешней волной и системой невозможно, не зависимо от разности фаз в этом взаимодействии. Кроме того, следует учесть, что взаимодействие с отбором энергии возможно еще и в случае, когда одна частота будет некоторой гармоникой другой частоты, но в этом случае количество передаваемой энергии резко уменьшается с ростом номера гармоники и чаще всего уже достаточно мало даже для второй гармоники. Процессы взаимодействия с гармониками приводят к появлению фоновой потери энергии внешним полем.

Как результат, можно наблюдать взаимное соответствие максимумов коэффициента поглощения и частот собственных мод системы. Тогда для решения поставленной задачи по определению дисперсионных характеристик собственных мод системы следует определить коэффициент поглощения электромагнитного излучения, падающего на систему под углом, как функцию

$$\Omega(\vec{q},\omega)=\frac{I^{absorb}}{I^{ext}}, \tag{5}$$

где I^{ext} - плотность электромагнитной энергии падающего поля, а I^{absorb} - плотность поглощенной электромагнитной энергии, усредненная по объему системы. Если для некоторой частоты ω_S при данном волновом векторе q_S функция поглощения имеет максимум, то это значит, что имеет место резонанс частот между внешним возбуждением и собственным колебанием в системе, то есть в системе присутствуют каналы для перехода энергии электромагнитной волны в собственную энергию системы. Тогда эта собственная мода, имеет дисперсию (q_S,ω_S). При этом, чем сильнее выражен максимум, тем дольше время жизни собственного колебания системы (см. Рис.2.).

Имея в своем распоряжении трехмерный график $\Omega(q,\omega)$, мы можем построить множество точек, соответствующих максимумам коэффициента поглощения.

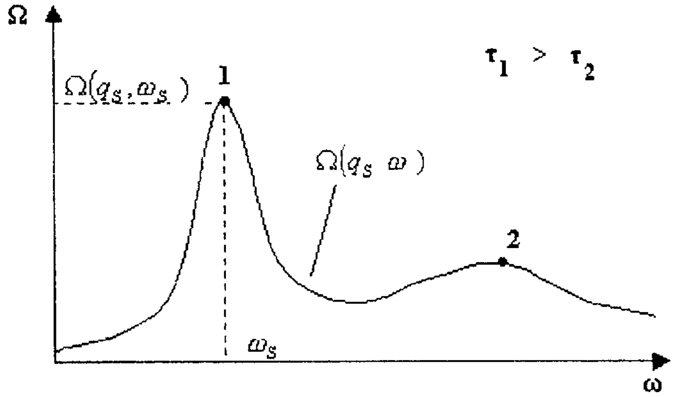


Рис.2 Определение дисперсии и времени жизни собственных мод пластины по ее коэффициенту поглощения

Проекция же этих точек на плоскость $qO\omega$ и есть искомая дисперсионная характеристика собственных мод системы. Подобное построение показано на Рис.3.

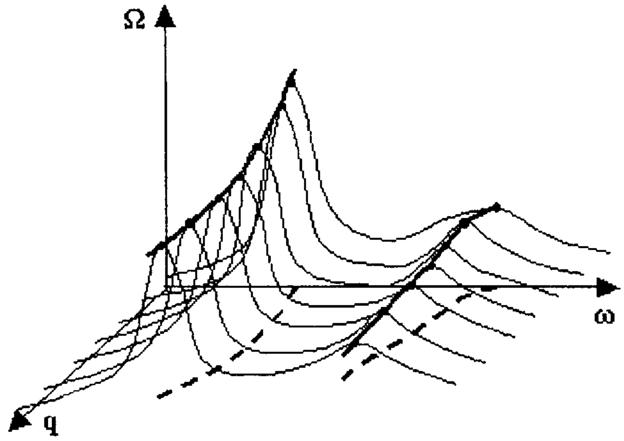


Рис. 3. Определение кривых собственных мод по коэффициенту поглощения

Изложенный подход реализуется на практике при экспериментальном измерении дисперсионных характеристик систем.

КОЭФФИЦИЕНТ ПОГЛОЩЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ МОДЫ ПЛАСТИНЫ

Продемонстрируем применение предложенного подхода на примере сверхпроводниковой пластины.

Рассмотрим сверхпроводниковую пластину во внешнем поле плоской электромагнитной волны. Геометрия задачи и расположение осей декартовой системы координат, в которой проводится рассмотрение, представлены на Рис.1. Для упрощения задачи будем считать, что плоскость падения электромагнитной волны совпадает с плоскостью XoZ, а нижняя сторона пластины совпадает с плоскостью XoY.

Одновременно можно рассматривать оба случая – и задачу со свободной пластиной, и пластину на подложке, так как от этого будет зависеть только вид псевдовакуумной функции Грина. В первом случае плоскость с обеих сторон окружена однородным изотропным веществом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1(\omega)$, где ω - частота электромагнитного возбуждения. А во втором - полупространство под плоскостью заполнено однородным изотропным веществом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2(\omega)$, а пространство над плоскостью заполнено однородным изотропным веществом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1(\omega)$.

Плоскость будем считать бесконечной изотропной и однородной сверхпроводящей плоскостью с проводимостью $\vec{\sigma}(\vec{k},\omega)$, где $\vec{k}$ - волновой вектор электромагнитного возбуждения, распространяющегося по сверхпроводнику, а ω - его частота. Толщина плоскости H.

Действуя в рамках дипольного приближения полагаем, что границы раздела являются резкими (то есть не учитываем наличие переходных слоев), а все электромагнитные свойства рассматриваемых веществ описываются проницаемостями $\vec{\sigma}(\vec{q},\omega)$, $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$ и микроскопические свойства веществ уже учтены при вычислении этих величин.

Для решения задачи по определению собственных мод определим поглощение электромагнитного излучения, падающего на пластину под углом, единицей площади пластины как функцию $\Omega(q,\omega)$, где q - горизонтальная составляющая волнового вектора, падающего электромагнитного поля, а ω - его частота.

Из общих соображений коэффициент поглощения есть

$$\Omega(\omega,\vec{k})=\frac{\overline{<(\vec{J}+\vec{J}^{*})(\vec{E}+\vec{E}^{*})>}}{I^{ext}}. \tag{6}$$

Здесь символами $<\ldots>$ и $\overline{\ldots}$ обозначены усреднение по объему частицы и по времени соответственно, $\vec{E}$ - локальное поле в некоторой точке внутри пластины, $\vec{J}$ - плотность тока, индуцируемого этим полем в этой точке.

Таким образом, задача сводится к определению распределения поля и плотности тока внутри пластины.

Для определения поля и плотности тока внутри пластины, возникающих под действием внешней электромагнитной волны, запишем интегральные уравнения электромагнитного поля в виде:

$$E_i(\vec{r},\omega)=E_i^{(ext)}(\vec{r},\omega)-i\omega\mu_0\int\limits_{V_{SYS}}d\vec{r}\,'G_{ij}(\vec{r},\vec{r}\,',\omega)J_j(\vec{r}\,',\omega), \tag{7}$$

где $E_i(\vec{r},\omega)$ - i-ая компонента поля в точке $\vec{r}$, $E_i^{(ext)}(\vec{r},\omega)$ - i-ая компонента внешнего (external) для системы поля, ω - циклическая частота внешнего поля, μ_0 - магнитная восприимчивость вакуума, V_{SYS} - объем системы (в нашем случае площадки единичной площади), $G_{ij}(\vec{r},\vec{r}\,',\omega)$ - псевдовакуумная электродинамическая функция Грина (то есть вычисленная в отсутствии самой пластины) среды, в которую помещена пластина, $J_j(\vec{r}\,',\omega)$ - j-ая компонента индуцированной плотности тока в точке $\vec{r}\,'$, определяемого нелокальным материальным уравнением

$$J_j(\vec{r}\,',\omega)=\int\limits_{V_{SYS}}d\vec{r}\,''\sigma_{jk}(\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\omega)E_k(\vec{r}\,'',\omega), \tag{8}$$

где $\sigma_{jk}(\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\omega)$ - тензор объемной нелокальной восприимчивости (проводимости). Из (7), (8) следует уравнение Липпманна-Швингера для определения самосогласованного поля, возникающего под действием внешнего возбуждения:

$$E_i(\vec{r},z)=E_i^{(0)}(\vec{r},z)-i\omega\mu_0\int d\vec{r}\,'dz'G_{ij}(\vec{r}-\vec{r}\,',z,z')\int d\vec{r}\,''dz''\sigma_{jl}(\vec{r}\,'-\vec{r}\,'',z',z'')E_l(\vec{r}\,'',z'')$$

Принимая во внимание трансляционную инвариантность системы в плоскости XoY, после двойного Фурье-преобразования, уравнение (9) можно преобразовать к виду:

$$E_i\left(\vec{k},z\right)=E_i^{(0)}\left(\vec{k},z\right)-i\omega\mu_0\int\limits_H dz'\int\limits_H dz''G_{ij}\left(\vec{k},z,z'\right)\sigma_{jl}\left(\vec{k},z',z''\right)E_l\left(\vec{k},z''\right) \quad (10)$$

При решении этого самосогласованного уравнения принимается во внимание, что поле может быть представлено в виде бесконечной непрерывной комбинации гармоник, и оно решается для поля, представляющего собой набор плоских волн

$$E_i^{(0)}\left(\vec{k},z\right)=\sum_{\infty}E_i^{(0)}\left(\vec{k},k_Z\right)\exp\left(ik_Z z\right) \quad . \quad (11)$$

Решая уравнение (10), можно получить решение для поля в любой точке пространства и для распределения токов в пластине. Не приводя точного решения этого уравнения, остановимся только на главных результатах.

В результате решения (10) прежде всего, определяем эффективную восприимчивость системы (здесь под эффективной восприимчивостью понимается тензорная величина, связывающая плотность тока в некоторой точке пластины с напряженностью поля падающей волны

$$\vec{J}(z,\omega)=-i\omega\int \mathrm{X}(z,z',\omega)\vec{E}^{(ext)}(z',\omega))$$

$$X_{jl}^{(F)}(z,z',\omega)=\chi_{jk}(z,z',\omega)Q_{kl}(z,\omega) \quad (12)$$

Здесь $\chi_{ij}\left(\vec{r},\vec{r}\,',\omega\right)$ - диэлектрическая восприимчивость, связанная с проводимостью как

$$\vec{\chi}\left(z',z'',\vec{k}\right)=\frac{i}{\omega}\vec{\sigma}\left(z',z'',\vec{k}\right) \quad (13)$$

Тензор $Q_{kl}\left(\vec{r},\omega\right)=T_{lk}^{-1}\left(\vec{r},\omega\right)$ - есть обратный тензор массового оператора, который определяется как

$$T_{jl}=\left[\delta_{jl}-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\omega^2}{c^2}\int\limits_H dz'G_{jk}\left(\vec{k},z'',z'\right)\int\limits_H dz'''\chi_{kl}\left(\vec{k},z',z'''\right)\exp\left[ik_Z\left(z'''-z''\right)\right]\right] \quad (14)$$

Теперь из уравнения (7) можно определить решение для электрического поля в виде

$$E_i(\vec{r},\omega)=L_{ij}(\vec{r},\omega)E_j^{(ext)}(\vec{r},\omega) \quad (15)$$

где фактор локального поля определяется согласно формуле

$$L_{ij}(z,\omega)=\delta_{ij}-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\omega^2}{c^2}\int\limits_0^H dz'G_{il}(z,z',\omega)\int\limits_0^H dz''X_{lj}^{(F)}(z',z'',\omega)e^{ik_Z(z-z'')} \quad (16)$$

Теперь подставляя найденные решения для плотности тока и напряженности в выражение (6), получим для искомого коэффициента поглощения

$$\Omega=-i\frac{\omega}{\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{H^2}\int\limits_H\int\limits_H\left[\vec{L}^*(z)\vec{\mathrm{X}}\left(z,z'\right)e^{i\vec{k}(z'-z)}-\vec{\mathrm{X}}^*\left(z,z'\right)\vec{L}\left(z\right)e^{i\vec{k}(z-z')}\right]\vec{\tau}\,\vec{\tau}\,dzdz' \quad (17)$$

Здесь знаком * обозначено эрмитово сопряжение, а τ_i- i-ая компонента орта, направленного по направлению напряженности. При этом следует рассматривать два вида направления поляризации.

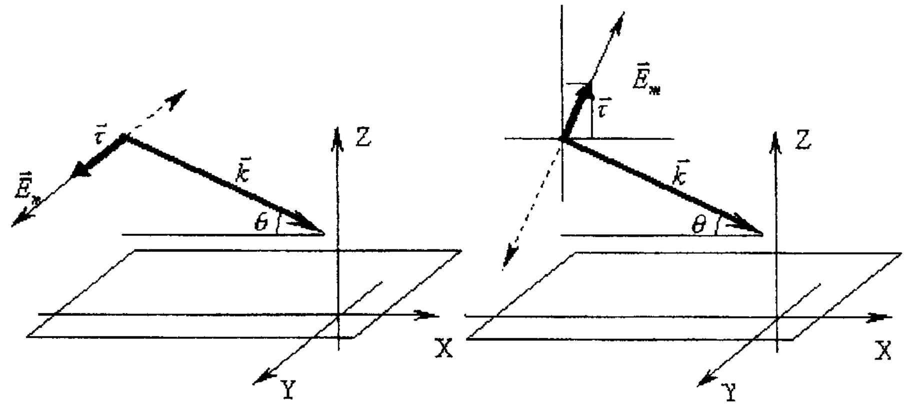


Рис.4.а). S- поляризация $\tau=(0,1,0)$ Рис.4.б). P – поляризация, $\tau=(\sin\theta,0,\cos\theta)$

Хребты на трехмерном графике найденного коэффициента поглощения и будут соответствовать дисперсионным характеристикам собственных мод системы.

ВЫВОДЫ

В работе определение дисперсионной характеристики собственных колебательных процессов в системе предложено осуществлять на основании рассмотрения связи частот собственных мод с коэффициентом поглощения гармонических электромагнитных колебаний.

Среди особенностей предложенного подхода к определению дисперсии собственных мод следует отметить: универсальность предлагаемой методики, которая не зависит от конкретной геометрии системы и может быть применена к любой системе, где верны сделанные в постановке задачи предположения. Дисперсионные характеристики, при решении задач, предлагаемым способом, представляют собой некоторые области – размытые кривые – вокруг линий локальных максимумов коэффициента поглощения, в которых возможно существование собственного колебательного процесса на данной частоте с данным волновым вектором. Величины коэффициента поглощения в этих областях соответствует мощности той или иной собственной моды, а по величине полуширины пиков этих максимумов поглощения можно судить об интенсивности, вернее, о времени жизни соответствующей мод. Приведенное определение дисперсионной характеристики аналогично определению дисперсионной характеристики при рассмотрении волновых процессов в распределенных системах.

Список литературы

1. J. D. Joannopoulos, J. N. Winn and R. D. Meade Molding the Flow of Light, N. J: Photonic Cristals.- Princeteon U. Press, Princeton. – 1995. – 239 p.

2. A.S.Davydov High Temperature Superconductivity, Kyiv : Naukova Dumka,.- 1990.-376 c.
3. V. Meerovich, V. L. Sokolovvsky, M. Slonim et al., // IEEE Transactions on applied Superconductivity. – 1993. - V. 3.- № 3.- P.3033-3040
4. A. Takeoka, M. Hasunuma, S, Sakaiya et al. // IEEE Transactions on applied Superconductivity. -1989.- V. 25.- № 2.- P. 899 -907
5. В. В. Шмидт Введение в физику сверхпроводников, Москва: Наука, 1987.- 240 с.
6. O.Keller, J. Opt. Soc. Am. - 1990. - B. 7, P.2229-2235
7. Е. Г. Борщаговский, О. М. Гецко, В. З. Лозовский, Б. И. Худик, // Оптика и спектроскопия.-1989.- т. 66.- вып. 6.- С. 1345-1350

Поступила в редакцию 26.09.2002 г.