Ученые записки Таврического национального университета имени В.И.Вернадского
Серия «Физика». Том 15-16 (54-55). 2003 г. № 1. С. 75-78

УДК 621.3.013.22

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Милюков В.В.

Задача синтеза заданного поля на оси соленоида или в его объеме является одной из классических задач, приводящих к интегральным уравнениям 1го рода. Частным случаем является задача оптимизации соленоида с целью повышения однородности создаваемого им поля.

Покажем, что стандартные методы решения таких интегральных уравнений 1го рода дают «катастрофически» плохие и практически непригодные результаты, заключающиеся в том, что для синтеза поля требуются гигантские токи, а показатели однородности поля получаются плохими даже при небольшом удалении от точек задания правой части уравнений.

Воспользуемся методом регуляризации Тихонова и покажем, что задача синтеза поля решается удовлетворительно даже при небольших значениях токов. Предлагается способ вычисления параметра регуляризации из условия минимума невязки на расширенной области определения поля.

В качестве первого примера рассмотрим задачу синтеза однородного поля на оси соленоида. Будем считать заданными геометрические размеры a,R, Рис. 1 и искать распределение плотности токов j, обеспечивающих магнитное поле $B(z) = B_0 = const$.

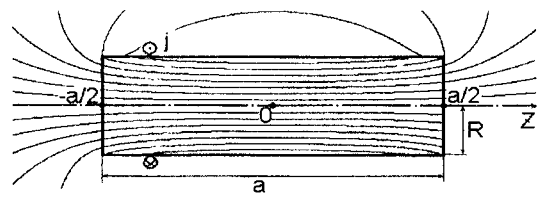

Рис.1. Геометрическая система

Воспользовавшись законом Био-Савара-Лапласа, получим интегральное уравнение первого рода относительно неизвестной функции распределения плотности токов.

$$B_z(z_B) = \frac{\mu_0 R^2}{2} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} j(z) \cdot \frac{dz}{[R^2 + (z - z_B)^2]^{3/2}}$$

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

1) На первом этапе область интегрирования разбивается на элементы. В случае синтеза однородного поля можно использовать симметрию и разбивать половину образующей соленоида на отрезки. Пусть их число равно n, при этом координаты начала отрезка разбиения и его конца вычисляются по формулам:

$z_{1i} = dl\cdot(i\text{-}1)$, $z_{2i} = dl\cdot i$, $i\in[1,n]$, где $dl := a/(2\cdot n)$. Аналогично вычисляются координаты точек коллокаций: $z_i = (i-1)\cdot a/[2\cdot(n-1)]$.

2) На втором этапе вычисляются коэффициенты матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). При использовании кусочно-постоянной аппроксимации искомой функции вместо интегрального уравнения получаем:

$$\frac{\mu_0 R^2}{2}\cdot\sum_{i=1}^{N} j_i\cdot\left(\int_{z_{1i}}^{z_{2i}}\frac{dz}{\left(R^2+(z-z_k)^2\right)^{3/2}}+\int_{z_{1i}}^{z_{2i}}\frac{dz}{\left(R^2+(z+z_k)^2\right)^{3/2}}\right)=B_k=B_0,$$

где второй интеграл возникает вследствие симметрии системы. Коэффициенты матрицы легко вычисляются аналитически.

3) На третьем этапе решается СЛАУ. Применим два метода решения СЛАУ: первый – традиционный метод исключения Гаусса с частичной выборкой ведущего элемента [1], а второй – метод, основанный на методе регуляризации Тихонова [2] и минимизации сглаживающего функционала

$M^{\alpha}[j,f] = \|f - Aj\|^2_{R^m} + \alpha\cdot\|j\|^2_{R^n}$, из которого следует уравнение Эйлера: $\alpha\cdot x + A^T\cdot Ax = A^T\cdot f$. Для упрощения выбора параметра регуляризации будем задавать его относительное значение $\alpha=\alpha_{\text{ОТН}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(A^T\cdot A)^2_{ik}\,/n$, где $\alpha_{\text{ОТН}}=0\div 2$ подбирается в процессе расчетов.

В отличие от многочисленных теоретических способов вычисления параметра регуляризации α воспользуемся практическим способом, основанным на анализе однородности синтезированного поля. При этом будем анализировать отклонение величины магнитного поля в объеме соленоида от его значения в центре системы. В качестве области для анализа однородности поля выберем цилиндр, имеющий меньшие размеры, чем соленоид: $R_{\text{ОТН}} = 0.5$, $Z_{\text{ОТН}} = 0.9$.

Таким образом, параметр регуляризации выбирается из условия минимума невязки в расширенной области определения правой части интегрального уравнения.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОПТИМИЗАЦИИ СОЛЕНОИДА С ЦЕЛЬЮ ПОВЫШЕНИЯ ОДНОРОДНОСТИ СОЗДАВАЕМОГО ИМ ПОЛЯ

Рис.2. Расчет «классическим методом»

На Рис.2 представлена картина синтезированного поля $B=4\pi\cdot10^{-7}T$ для примера с параметрами $R=1\text{м}$, $a/D=10$, $D=2R$, число разбиений $n=20$. Интегральное уравнение решалось без применения методов регуляризации. Величина неоднородности поля, вычисленная как уклонение модуля поля от его значения в центре системы, равна 18% и заметно возрастает при приближении к катушке вдоль радиуса. При выборе $R_{\text{ОТН}}>0.7$ величина неоднородности поля резко возрастает. На Рис.3 представлен соответствующий график изменения токов.

Анализ результатов показывает, что возникла парадоксальная ситуация, когда с высокой точностью синтезирована правая часть уравнения, а решение практически непригодно из-за плохой однородности поля в объеме соленоида и из-за необходимости использования больших знакочередующихся токов. Для сравнения на Рис.4, 5 представлены аналогичные результаты, но при использовании метода регуляризации для решения интегрального уравнения 1-го рода.

Рис.3. Распределение токов

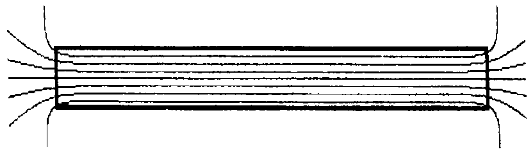

Рис.4. Расчет методом регуляризации

Параметр регуляризации подбирался из условия минимальности неоднородности поля в рассматриваемом объеме. Для указанных геометрических параметров значение параметра равно $\alpha = 1.2$, что соответствует существенной «порче» исходного уравнения. При этом показатель неоднородности поля равен 4.5% и токи не превышают 1.5А.

Полученный результат может быть использован на практике для повышения однородности создаваемого соленоидом поля. Многим экспериментаторам хорошо известен прием наматывания дополнительной обмотки у краев соленоида.

Рис.5. Распределение токов

Еще разительнее различия в результатах расчетов в случае уменьшения относительной длины соленоида. На Рис.6 представлена картина поля, соответствующая $a/D=2$, $n = 10$ и решению СЛАУ без применения регуляризации. При этом показатель неоднородности поля равен 10%. Получен удивительный результат, оказывается с помощью короткой катушки можно создать поле, достаточно однородное вблизи оси соленоида даже за его пределами. Результат красивый, но бесполезный т.к. для его реализации потребовались бы огромные токи, достигающие $\pm$ 60 kA .

Рис.6. Расчет «классическим методом»

При использовании метода регуляризации неоднородность поля составляет 9.9% при значении параметра регуляризации $\alpha = 0.08$ и значениях токов от 0,5 до 3 ампер.

СИНТЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, ЛИНЕЙНО ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ВДОЛЬ ОСИ СОЛЕНОИДА

Величина синтезируемой индукции поля выбрана линейно меняющейся вдоль оси Z. При решении интегрального уравнения без применения методов регуляризации возникает такая же ситуация, как и в задаче синтеза однородного поля, величина индукции начинает значительно уклоняться от заданного закона распределения даже при небольшом удалении от точек коллокаций и, кроме того, для синтеза поля требуются большие знакочередующиеся токи.

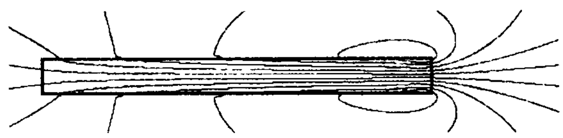

Рис.7. Расчет методом регуляризации

На Рис. 7 представлена картина поля, полученная для примера с параметрами $a/D = 10$, при использовании метода регуляризации. Параметр регуляризации выбран равным $\alpha = 0.07$ из условия наименьшего отклонения синтезированного поля от заданных его значений на оси соленоида. При этом среднеквадратичное уклонение (относительная невязка) вычислялось не только в точках коллокаций, но и в промежуточных точках на оси. На Рис.8 представлены графики требуемого (линейная функция) и синтезированного распределения поля, а на Рис.9 изображена диаграмма соответствующего распределения плотности токов.

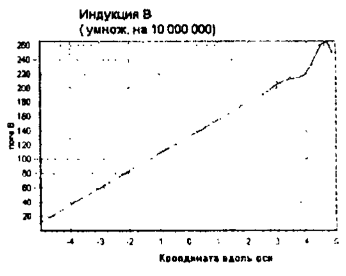

Рис.8. Синтезированное поле

Отметим, что в случае синтеза линейного поля с помощью укороченного соленоида задача определения оптимального значения параметра регуляризации становится более неопределенной т.к. снижение погрешности синтеза правой части уравнения достигается ценой значительного увеличения токов. Достижение разумного компромисса в этой ситуации зависит от допустимой погрешности синтеза поля и от допустимых величин токов.

Рис.9. График токов

Основной вывод заключается в том, что метод регуляризации позволяет удовлетворительно синтезировать магнитное поле заданной конфигурации без существенного увеличения токов. При этом параметр регуляризации может быть выбран на основе анализа однородности синтезированного поля в расширенной области.

Список литературы

1. Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш. Численные методы и программное обеспечение.-М.:Мир, 2001, 545с.
2. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач .-М.: Наука,1979, 285 с.

Поступила в редакцию 11.11.2002 г.