Ученые записки Таврического национального университета имени В.И.Вернадского
Серия «Физика». Том 15-16 (54-55). 2003 г. № 1. С. 59-62

УДК 531. 49+514. 8

РАДІАЛЬНИЙ РУХ ЗАМКНЕНОЇ СТРУНИ В ЗОНІ ВЗАЕМОДІЇ ПЛОСКИХ ХВИЛЬ, ЩО ЗШТОВХУЮТЬСЯ

Леляков О.П.

Космічні струни, що є одномірними областями концентрації щільності енергії, можуть природно виникати в результаті спонтанного порушення симетрії при фазових переходах у процесі еволюції Всесвіту [1]. У рамках різноманітних моделей Теорії Великого Об'єднання вони виявляються як топологічні дефекти (поряд із доменними стінками і монополями) і тому являють собою стійкі утворення. Серед цих структур саме космічні струни викликають підвищений інтерес із космологічної точки зору, оскільки мають придатні характеристики, що дозволяють вирішувати цілу низку проблем сучасної космології [1,2], наприклад, таких як: механізм створення первинних неоднорідностей густини речовини в ранньому Всесвіті, проблема схованої маси, механізм прискореного стиску або уповільненого розширення простору, характерного для Фрідманівських Всесвітів.

Останнім часом одномірно протяжні об'єкти (струни) інтенсивно досліджуються. Причому вивчається не тільки можливість застосування теорії струн до розв'язання тих чи інших задач у космології, але і динаміка струн в різноманітних зовнішніх гравітаційних полях, оскільки аналіз отриманих розв'язків іноді дозволяє пророчити ряд нових фізичних ефектів, які надалі можуть бути використані при експериментальному виявленні струн, що можливо збереглися в частині Всесвіту що спостерігається.

У зв'язку з чим актуальними є питання про розв'язання рівнянь руху струни в різноманітних скривлених просторах. Основною трудністю, із якою доводиться зштовхуватися при переході від вивчення руху нуль – струни (струни з рівним нулю натягом) у псевдоріманових просторах до вивчення руху струни, – це істотне ускладнення рівнянь і зв'язків (пов'язане з появою похідних по простір подібному параметру σ), що ускладнює їх структуру і робить важким пошук загальних, точних розв'язків.

Для того, щоб обминути зазначену трудність, часто обмежуються пошуком окремих розв'язків рівнянь руху, що реалізують ту або іншу фізичну ситуацію.

Дана робота присвячена пошуку точних розв'язків рівнянь руху струни у метриці Бертотті – Робінсона, що описує зону взаємодії плоских хвиль, що зштовхуються, у теорії Ейнштейна – Максвела. Добре відомо, що єдиним однорідним полем Ейнштейна-Максвела з однорідним неізотропним тензором Максвела є розв'язок виду

$$dS^2 = k^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2 + dx^2 - sh^2(x)dt^2\right), \qquad (1)$$

де k -довільна стала. Вперше цей розв'язок було отримане в роботах [3,4].

Неважко переконатися в тому, що система рівнянь, що описує динаміку струни в зоні взаємодії плоских хвиль, що зштовхуються, для (1) може бути представлена як:

$$t_{,\tau\tau} - t_{,\sigma\sigma} + 2cth(x)(t_{,\tau}x_{,\tau} - t_{,\sigma}x_{,\sigma}) = 0, \tag{2}$$

$$x_{,\tau\tau} - x_{,\sigma\sigma} + sh(2x)(t_{,\tau}^2 - t_{,\sigma}^2)/2 = 0, \tag{3}$$

$$\theta_{,\tau\tau} - \theta_{,\sigma\sigma} - \sin(2\theta)(\varphi_{,\tau}^2 - \varphi_{,\sigma}^2)/2 = 0, \tag{4}$$

$$\varphi_{,\tau\tau} - \varphi_{,\sigma\sigma} + 2ctg(\theta)(\varphi_{,\tau}\theta_{,\tau} - \varphi_{,\sigma}\theta_{,\sigma}) = 0, \tag{5}$$

а також зв'язки

$$sh^2(x)t_{,\tau}t_{,\sigma} - x_{,\tau}x_{,\sigma} - \theta_{,\tau}\theta_{,\sigma} - \sin^2(\theta)\varphi_{,\tau}\varphi_{,\sigma} = 0, \tag{6}$$

$$sh^2(x)(t_{,\tau}^2 - t_{,\sigma}^2) - x_{,\tau}^2 + x_{,\sigma}^2 - \theta_{,\tau}^2 + \theta_{,\sigma}^2 - \sin^2(\theta)(\varphi_{,\tau}^2 - \varphi_{,\sigma}^2) = 0. \tag{7}$$

Розв'язок системи (2) – (5) легко знайти у випадку радіального руху струни, що відповідає анзацу

$$t = t(\tau), x = x(\tau), \theta = \theta(\sigma), \varphi = \varphi(\sigma), \tag{8}$$

для (8) зв'язок (7) задовольняється тотожно, а зв'язок (6) приймає вигляд

$$sh^2(x)t_{,\tau}^2 - x_{,\tau}^2 + \theta_{,\sigma}^2 + \sin^2(\theta)\varphi_{,\sigma}^2 = 0, \tag{9}$$

система (2) – (5) для (8) переписується у вигляді:

$$\begin{gathered} t_{,\tau\tau} + 2cth(x)t_{,\tau}x_{,\tau} = 0, \; x_{,\tau\tau} + sh(2x)t_{,\tau}^2/2 = 0, \\ \theta_{,\sigma\sigma} - \sin(2\theta)\varphi_{,\sigma}^2/2 = 0, \; \varphi_{,\sigma\sigma} + 2ctg(\theta)\varphi_{,\sigma}\theta_{,\sigma} = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

можна легко помітити аналогію отриманої системи рівнянь (10) із системою рівнянь, що описує динаміку замкненої нуль – струни у цьому ж просторі [5].

Перший інтеграл від (10) дає

$$t_{,\tau} = \frac{C_0}{sh^2(x)}, \quad \varphi_{,\sigma} = \frac{C_3}{\sin^2(\theta)}, \quad x_{,\tau}^2 = \frac{C_0^2}{sh^2(x)} + C_1, \quad \theta_{,\sigma}^2 = C_2 - \frac{C_3^2}{\sin^2\theta}, \tag{11}$$

де: $C_i = const, i = 0,1,2,3$.

Підставляючи (11) у зв'язок (9) легко переконатися в тому, що останній приймає вигляд

$$C_1 = -C_2. \tag{12}$$

З першого і останнього рівняння (11) випливає, що $C_0 \neq 0$, $C_2 > 0$ оскільки, у противному випадку, із першого рівняння (11) при $C_0 = 0$ ми відразу ж одержуємо $t = const$, і не про яку динаміку не може бути і речі, а випадок $C_2 \leq 0$, як легко помітити з останнього рівняння (11) призводить до протиріччя.

Переходячи в (11) від C_1 до C_2 і інтегруючи отримане, приходимо до наступних співвідношень

$$\begin{gathered} x = Arch\left\{\alpha Sin(\pm\sqrt{C_2}\tau + U_x)\right\}, \quad \theta = \arccos\left\{\beta Sin(\pm\sqrt{C_2}\sigma + U_\theta)\right\}, \\ \varphi - \varphi_0 = \begin{matrix} arctg\left\{\gamma tg(\sqrt{C_2}\sigma \pm U_\theta)\right\} \forall C_3 \neq 0 \\ 0 \text{ для } C_3 = 0 \end{matrix}, \\ t = t_0 - Arcth\left\{\mu tg(\sqrt{C_2}\tau \pm U_x)\right\}, \end{gathered} \tag{13}$$

де: $\alpha = \sqrt{1+\frac{C_0^2}{C_2}}, \beta = \sqrt{1-\frac{C_3^2}{C_2}}; \gamma = \frac{C_3}{\sqrt{C_2}}, \mu = \frac{C_0}{\sqrt{C_2}}, x_0^i = const, i = 0,1,2,3,$

$$U_\theta = \arcsin\left(\frac{\cos\theta_0}{\beta}\right), U_x = \arcsin\left(\frac{chx_0}{\alpha}\right), \quad x^0 = t, x^1 = x, x^2 = \theta, x^3 = \varphi.$$

Переходячи в першому рівнянні (13) від параметра τ до космологічного часу **t** ,отримуємо

$$x = Arch\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{1+\mu^2 th^2(t_0-t)}}\right\}, \tag{14}$$

таким чином, система розв'язків (13) – (14) цілком визначає динаміку замкненої струни в анзаце (8), причому, оскільки зв'язки для (13) – (14) виконуються тотожно, то єдиним обмеженням на динаміку струни є вимога

$$C_2 > 0; C_0 \neq 0. \tag{15}$$

Приведемо приклад руху замкненої струни в зоні взаємодії плоских хвиль, що зштовхуються. Нехай

$$C_2 = 1, C_0 = 1, C_3 = \frac{1}{2}, \varphi_0 = t_0 = 0, \theta_0 = \frac{\pi}{2}, ch(x_0) = \sqrt{2}, \tag{16}$$

тоді

$$x = Arch\left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+th^2(t)}}\right\}, \theta(\sigma) = \arccos\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}Sin(\sigma)\right\}, \varphi(\sigma) = arctg\left\{\frac{1}{2}tg(\sigma)\right\}. \tag{17}$$

Двомірна поверхня, яку замітає замкнена струна, у цьому випадку, зображена на Рис.1.

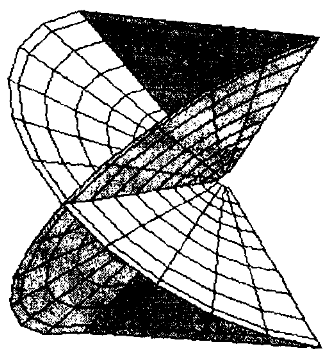

Рис. 1. Двомірна поверхня яку замітає замкнена струна, при своєму русі в зоні взаємодії плоских хвиль, що зштовхуються, у випадку (16).

Наприкінці можна відмітити, що (14) нагадує розв'язок, що описує рух замкненої нуль – струни уздовж осі **x**, одержаний у [5], більш того, можна помітити, що якщо в розв'язках які описують рух замкненої нуль – струни [5] вимагати щоб c_i були константами, то динаміка замкненої нуль – струни уздовж осі **x** буде у точності збігатися з динамікою замкненої струни уздовж осі **x** для (14).

ВИСНОВКИ

У запропонованій роботі були отримані точні розв'язки рівнянь руху замкненої струни (випадок радіального руху) в метриці Бертотті – Робінсона, що описує зону взаємодії плоских хвиль, що зштовхуються, у теорії Ейнштейна – Максвела. Аналізуючи отриманий розв'язок можна помітити, що він нагадує розв'язок, що описує рух замкненої нуль – струни уздовж осі **x**, одержаний раніше, більш того, існує такий набір початкових даних при якому динаміка замкненої нуль-струни і струни збігається.

Наприкінці хочу висловити щиру подяку Рощупкіну С.М. за плідні обговорення та вагомі зауваження.

Список літератури

1. Peebles P.J.E. Principles of Physical Cosmology. – Princeton University Press, 1993 – 850 p.
2. Roshchupkin S.N., Zheltukhin A.A. // Class. Quant. grav. – 1995. – V. 12. – 2519 p.
3. Bertotti B. Uniform electromagnetic field in the theory of general relativity // Phys. Rev. – 1959 – V. 116. – 1331 p.
4. Robinson I. A solution of the Einstein-Maxwell equations // Bull. Acod. Polon. Sci Ser. math. Astr. Phys. – 1959. – V. 7. – 351 p.
5. Леляков А.П. Точное решение уравнений движения замкнутой нуль – струны в однородном поле Эйнштейна – Максвелла с однородным неизотропным тензором Максвелла // Ученые записки ТНУ. – 2000. – №13 (52). – С. 144 – 147.

Поступила в редакцию 29.10.2002 г.