Ученые записки Таврического национального университета имени В.И.Вернадского
Серия «Физика». Том 15-16 (54-55). 2003 г. № 1. С. 141-149.

УДК 537874.4

ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С КРУПНОМАСШТАБНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Чуклов В.А. , Пономаренко В.И.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

К важнейшим прикладным задачам оптики относятся задачи, связанные с распространением волн в статистически неоднородных средах, например, лазерных пучков в атмосфере, воде, стекловолокне [1-6]. Ключевую роль в этих задачах играет расчет флуктуации интенсивности поля. В случае крупномасштабных неоднородностей такой расчет сводится к решению уравнений для моментов поля, получаемых из скалярного волнового уравнения [3-5]. В настоящее время получены результаты, относящиеся к случаям достаточно больших или достаточно малых значений дистанции [4,5], однако остается открытым вопрос о флуктуациях в промежуточной области. Целью настоящей работы является расчет флуктуаций плоской волны в среде со случайными крупномасштабными неоднородностями, описываемыми гауссовой корреляционной функцией, для всех значений дистанции, а также нахождение закона распределения для флуктуаций поля.

ВЫРАЖЕНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ЧЕРЕЗ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ПОЛЯ.

Плоская волна с амплитудой $A_0 = 1$, распространяющаяся в однородном полупространстве $x < 0$, нормально падает на полупространство $x > 0$, содержащее слабые($< \varepsilon^2 > << 1$), крупномасштабные ($\frac{2\pi\alpha}{\lambda} >> 1$), случайные неоднородности, где ($< \varepsilon^2 >, \alpha$ соответственно средний квадрат и радиус корреляции флуктуаций показателя преломления.

Комплексная амплитуда волны A(x,y,z), как функция пространственных координат, в области $x > 0$ удовлетворяет известному интегральному уравнению [3]. Разделим область $(0,x)$ на $N >> 1$ слоев равной толщины Δx плоскостями x_i, $i = 0,1...N, x_0 = 0, x_N = x$, причем $x > \Delta x > a$. Для флуктуаций поля в области $(0,x)$ имеем:

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{N} \Delta A_i \; , \qquad (1)$$

где $< A_i >$– объемно усредненное значение поля в слое с номером i; $\Delta A_i = A_i - < A_i >$, A_i– значение поля в слое, определяемое из интегрального уравнения. В области $(0,x)$ нет обратного рассеяния [3], поэтому можно предположить, что слагаемые в (1) будут статистически независимы, если пренебречь влиянием неоднородностей, примыкающих к границам слоев. Тогда в силу центральной предельной теоремы (ЦПТ) величина ΔA должна быть распределена по нормальному закону [7].

Для относительной флуктуации интенсивности J имеем следующее выражение через автокорреляционную функцию интенсивности [3]:

$$\frac{\langle(\Delta J)^2\rangle}{\langle\Delta J\rangle^2} = \langle A_1 \cdot A_1^* \cdot A_2 \cdot A_2^* \rangle r_{1,2} - 1, \qquad (2)$$

$$r_{1,2} > 0,$$

где $r_{1,2}$ – расстояние между точками «1» и «2», $A_{1,2}$– значение амплитуды в этих точках. Предполагая, что величина ΔA распределена по нормальному закону и учитывая, что центральные моменты нормального случайного поля нечетного порядка равны нулю, а четные моменты более высокого порядка выражаются через моменты более низкого порядка [7], принимая во внимание связь между корреляционной функцией поля и смешанными моментами поля второго порядка [4], пользуясь известными свойствами эрмитовости корреляционной функции, преобразуем (2) к виду:

$$\frac{\langle(\Delta J)^2\rangle}{\langle\Delta J\rangle^2} = \langle A_1 \cdot A_2^* \rangle_{r_{1,2=0}} - 2\langle A\rangle^4 + \langle A_1 \cdot A_2 \rangle \cdot \langle A_1^* \cdot A_2^* \rangle_{r_{1,2=0(3)}} \qquad (3)$$

Величину $\frac{\langle(\Delta J)^2\rangle}{\langle\Delta J\rangle^2}$ можно вычислить и другим способом, не предполагая нормальности закона распределения для флуктуации. В этом случае [3]:

$$\frac{\langle(\Delta J)^2\rangle}{\langle\Delta J\rangle^2} = \langle M_{42} \rangle - 1 \quad \text{при } r_{1,3} = 0, r_{2,4} = 0, \qquad (4)$$

где $\langle M_{42} \rangle = \langle A_1 A_2 A_3^* A_4^* \rangle$–смешанный момент поля четвертого порядка.

ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ ПОЛЯ В СЛУЧАЕ ГАУСОВОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ СРЕДЫ.

Предполагая далее амплитуды поля безразмерными величинами (с учетом нормировки $A_o = 1$), имеем для моментов первого и второго порядков [3]:

$$\langle A \rangle = \exp(-\alpha' \cdot x); \alpha' = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\langle \varepsilon^2 \rangle \alpha, \qquad (5)$$

$$\left\langle A_1 A_2^* \right\rangle_{r_1 r_2 = 0} = 1 \tag{6}$$

Величина $\left\langle A_1 A_2 \right\rangle$ удовлетворяет уравнению [3]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\langle A_1 A_2 \right\rangle - i\left(\frac{\partial^2 \left\langle A_1 A_2 \right\rangle}{\partial V^2} + \frac{\partial^2 \left\langle A_1 A_2 \right\rangle}{\partial W^2} \right) + \\ + 2\alpha' \left[1 + \exp\left[-\frac{V^2 + W^2}{\alpha^2} \right] \right] \left\langle A_1 A_2 \right. , \ 0 \tag{7}$$

где V,W – безразмерные координаты по оси Y,Z. И граничному условию:

$$\left\langle A_1 A_2 \right\rangle = 1, \textit{при } x = 0 \quad ,$$

Решение уравнения (7) , полученное в [8] содержит многочлен вида:

$$P(r) = \sum_{m=0}^{n-k} b_{k,m} \left(\frac{kr^2}{a^2} \right)^m, \text{ где } r^2 = V^2 + W^2, \tag{8}$$

где коэффициенты $b_{k,m}$, определяются из рекурентного соотношения. Многочлен (8) можно разложить по полиномам Лагерра [9]. При $r = 0$ получим для величины $\left\langle A_1 A_2 \right\rangle$ следующее представление:

$$\left\langle A_1 A_2 \right\rangle = \exp(-2\alpha' x) \text{ x}$$

$$\text{x} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (2\alpha')^k (-1)^{k'} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-k} \left(\frac{4k}{a^2} \right)^{n-k} \sum_{m=0}^{n-k} (n-k-m)! a_{k,m} \frac{x^n}{n!} \right], \tag{9}$$

где коэффициенты $a_{k,m}$ определяются рекуррентными формулами:

$$a_{k,m} = \left(\frac{k-1}{k} \right)^m \sum_{s=0}^{m} (a_{k-1,s})(m-s)!; \ a_{1,0} = 1; \ a_{1,s\neq 0} = 0. \tag{10}$$

Применяя метод последовательных приближений и метод математической индукции, а также пользуясь двумерным интегральным преобразованием Фурье, учитывая связь между полиномами Логерра и Эрмита и свойства этих полиномов [9], можно представить решение уравнения (7) в следующем виде:

$$\left\langle A_1 A_2 \right\rangle = \exp(-2\gamma u) x$$

$$x \left(1 + \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2\gamma)^k (-1)^k B^k \left\{ H_{m_{1}[k]} [aV'] H_{m_{2[1]}} [aW'] \right\} \exp\left[-k\left(V'^2 + W'^2 \right) \frac{U^{n+k}}{(n+k)} \right] \right) \tag{11}$$

где $H_{m_1[k]}\left(\sqrt{kV}\right)$ полином Эрмита, $\gamma = \alpha' a^2; U = \frac{2x}{a^2}; V' = \frac{V}{a}; W' = \frac{W}{a}$.

В (11) использовано обозначение:

$$B\left\{H_{m_1[k]}\left(\sqrt{k}\cdot V\right)H_{m_2[k]}\left(\sqrt{k}\cdot W\right)\right\} = (-i)^{n-s[k]}\sum_{s^{[k]}=0}^{n-s[k]}\binom{n\ -S[k]}{S_1}\left(\sqrt{k}\right)^{2n-2s[k]}A\left(m_1^{[k]}\right)A\left(m_2^{[k]}\right)x$$
$$xH_{2n-2[k]-2s^{[k]}{}_1-2l_1^{[k]}-2l_2^{[k]}+m_1^{[k]}}\left(\sqrt{k+1}\cdot V\right)H_{2s_2^{[k]}+2l_3^{[k]}-2l_4^{[k]}+m_2^{[k]}}\left(\sqrt{k}\cdot W\right), \qquad (12)$$

где $A(m_1[k]) = \left(m_1^{[k]}\right)!\sum_{l_1^{[k]}=0}^{\left[\frac{m_1^{[k]}}{2}\right]}\frac{(-1)^{l_1^{[k]}}}{\left(l_1^{[k]}\right)!}\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)^{m_1^{[k]}-2l_1^{[k]}}\sum_{l_{21}^{[k]}=0}^{\left[\frac{m_2^{[k]}}{2}\right]}\frac{(-1)^{l_1^{[k]}}}{\left(l_2^{[k]}\right)!\,(m_2^{[k]}-2l_1^{[k]}-2l_2^{[k]})!}$,

Действие B^k означает k – кратное суммирование выражений (12) с итерированием индексов у полиномов по следующим рекурентным формулам:

$$m_1^{[k+1]} = 2n - 2S_{[k]} - 2S_1^{[k]} - 2l_1^{[k]} - 2l_2^{[k]} + m_1^{[k]},$$
$$m_2^{[k+1]} = 2S_1^{[k]} - 2l_1^{[k]} - 2l_2^{[k]} + m_2^{[k]}, \qquad (13)$$

если $l_1^{[1]} = l_2^{[1]} = 0$, то $m_1^{[0]} = m_2^{[0]} = 0$.

Ниже используется также полученное в [11] выражение для момента четвертого порядка:

$$\langle M_{42}\rangle = \exp(-2\gamma u) + \exp(-2\gamma u)\sum_{k=1}^{\infty}(2)k(\gamma)k\left[\exp\left\{-k\left(V_1^2+W_1^2\right)\right\}+\exp\left\{-k\left(V_2^2+W_2^2\right)\right\}\right]\frac{u^k}{k!} + \exp(-2\gamma u)\cdot$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma)^k\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}2^{k-\nu}\sum_{m=0}^{k-\nu}\sum_{l=0}^{\nu}\exp\left\{-\left[(k-\nu-m)\left(v_2^2+W_2^2\right)+m\left(v_1^2+W_1^2\right)+l\left[(V_1+V_2)^2+(W_1+W_2)^2\right]+\right.\right.$$
$$\left.\left.(V-e)\left[\left[(V_1-V_2)^2+(W_1-W_2)^2\right]\ \right]\ \right\}B^{k-\nu-m}\left\{H_{m_1[1]}\left[\sqrt{k-\nu-m}(V_2)\right]H_{m_{21}[1]}\left[\sqrt{k-\nu-m}W_2\right]\right\} \qquad (14)$$
$$B^m\left\{H_{m_3[1]}\left[\sqrt{m}(V_1)H_{m_4[1]}\left[\sqrt{m}W_1\right]\right]\right\}B^e\left\{H_{m_5[1]}\left[\left(\sqrt{e}(V_1+V_2)\right)H\left[\sqrt{e}(W_1+W_2)\right]\right]\right\}$$
$$B^{V-e}\left\{H_{m_7[1]}\left[\sqrt{\nu-e}(V_1-V_2)\right]H_{m_3[1]}\left[\sqrt{\nu-e}(W_1-W_2)\right]\right\},$$

Если индекс V принимает значение 0, то $m \neq 0, m \neq k$

ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ПОЛЯ.

Используя равенства (3), (5), (6), (9), (10) и учитывая, что $\left\langle A_1^* A_2^*\right\rangle = \left\langle A_1\ A_2\right\rangle$ получим:

$$\frac{\left\langle (\Delta J)^2 \right\rangle}{\left\langle \Delta J \right\rangle^2} = 1-\exp(-2\gamma u)+2\exp(-2\gamma u)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k (\gamma)^k \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (2k)^{2n} \sum_{m=0}^{2n-k}(2n-k-m)!\,a_{km} x$$

$$x\frac{U^{2n+k}}{(2n+k)!}+\exp(-2\gamma u)\left\{ \left[\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^n (2k)^{2n+1} \sum_{m=0}^{2n+1-k}(2n+1-k-m)!\,a_{k,m}\frac{U^{2n+k+1}}{(2n+k+1)!}\right]^2 + \right. \quad (15)$$

$$\left. +\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \gamma^k \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2k)^{2n+1}\sum_{m=0}^{2n+1-k}(2n+1-k-m)!\,a_{k,m}\frac{U^{2n+k+1}}{(2n+k+1)!}\right]^2\right\} ,$$

В случае однократного рассеяния, полагая $k=1$ и ограничиваясь линейными относительно γ членами, получим:

$$\frac{\left\langle (\Delta J)^2 \right\rangle}{\left\langle \Delta J \right\rangle^2} = 2\gamma U\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(4U)^{2n-1}}{(2n-1)}\right). \quad (16)$$

Полагая в (14) $k=1$ и ограничиваясь линейными по γ членами, получим из (4):

$$\frac{\left\langle (\Delta J)^2 \right\rangle}{\left\langle \Delta J \right\rangle^2} = 1-2\gamma U+4\gamma U -$$

$$-\gamma\sum_{=1}^{\infty}B\left\{H_{m_5[1]}(0)H_{m_6[1]}(0)\right\}\frac{U^{n+1}}{(n+1)!}-\gamma\sum_{=1}^{\infty}B\left\{H_{m_7[1]}(0)H_{m_8[1]}(0)\right\}\frac{U^{n+1}}{(n+1)!}-1 \quad . \quad (17)$$

Из (12), (13), (17) получим равенство (16). Совпадение выражений для величины флуктуаций, одно из которых получено на основании ЦПТ в предположении нормальности закона распределения флуктуаций, а другое получено без этого предположения непосредственно из решения уравнения для моментов поля четвертого порядка, доказывает, что закон распределения флуктуаций амплитуды в случае однократного рассеяния действительно является нормальным.

ФЛУКТУАЦИИ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ДИСТАНЦИИ.

В этом случае кратность рассеяния велика, и в (11), (14) следует положить $k \gg 1$. При этом, как нетрудно показать, имеет место приближенное равенство:

$$n!\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)^{n-2m}\sum_{l+0}^{\left[\frac{n-2m}{2}\right]}\frac{1}{l!}\frac{1}{(n-2m-2l)!}H_{s+n\ 2m-2l}\left[\sqrt{k+1}\cdot r\right]x$$

$$x\exp\left[-(k+1)r^2\right]\approx\left(\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)^n H_{n+s}\left[\sqrt{k+1}\cdot r\right]\exp\left[-(k+1)r^2\right] \quad (18)$$

Применяя интегральное преобразование Лапласа, пользуясь определением свертки, интегральным представлением для полиномов Эрмита и их значениями в нуле, а также учитывая (18), получим из (11):

$$\langle A_1 A_2\rangle(U;00) = \exp(-2\gamma U)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(2\gamma)^k(-1)^k\int_0^U\frac{(U-t)^{2k-1}}{(2k-1)!}\frac{1}{1+2it}dt\right) \quad (19)$$

С учетом (19), (3), (5), (6) получим для величины флуктуации интенсивности при больших значениях дистанции:

$$\frac{\langle(\Delta J)^2\rangle}{\langle\Delta J\rangle^2} = 1-\exp(-2\gamma U)+\exp(-2\gamma U)x$$
$$x\left\{\left[\int_0^U\frac{\sin\sqrt{\gamma}(U-t)}{1+t^2}dt\right]^2+\left[\int_0^U\frac{\sin\sqrt{\gamma}(U-t)}{1+t^2}tdt\right]^2\right\}+2\exp(-2\gamma U)\int_0^U\frac{\sin\sqrt{\gamma}(U-t)}{1+t^2}dt. \quad (20)$$

Аналогичным образом получим из (14) выражение для $\langle M_{42}\rangle(U;0;0;0;0)$. Пользуясь формулой Пуассона [9], можно оценить по порядку члены, входящие в это выражение. Из этой оценки следует, что квадратичные члены содержащиеся в экспонентах со степенями $\frac{m}{2}$ и $\frac{k-\nu-m}{2}$ компенсируются, перекрестные члены, возникающие при возведении в квадрат, при суммировании по ν и m вносят вклад порядка $\frac{1}{U^2}$; квадратичные члены содержащие ν (ν-l), пропорциональны $\frac{1}{U}$. Таким образом, при $U \gg 1$ перекрестными членами можно пренебречь. Поэтому величину $\langle M_{42}\rangle$ можно выразить в виде:

$$\langle M_{42}\rangle = \exp(-2\gamma U)+\exp(-2\gamma U)\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(2\gamma)^k\exp\left[-k(V_1^2+W_1^2)\frac{U^k}{k!}\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}(2\gamma)^k\exp\left[-k(V_2^2+W_2^2)\frac{U^k}{k!}\right]+F(U;V_1;V_2;W_2;W_1)\right\}. \quad (21)$$

где F- функция, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial U}+i\left(\frac{\partial^2 F}{\partial V_1\partial V_2}+\frac{\partial^2 F}{\partial W_1\partial W_2}\right)+$$
$$\gamma\left\{\exp\left[-(V_1+V_2)^2-(W_1+W_2)^2\right]+\exp\left[(V_1-V_2)^2-(W_1-W_2)^2\right]\right\}F=0, \quad (22)$$

F=1 при U=0. Переходя к переменным

$y_1 = V_1+V_2; z_1 = W_1+W_2; z_2 = W_1-W_2; y_2 = V_1-V_2$

И представляя $F(U;y_1;y_2;z_1;z_2)$ в виде

$$F(U;y_1;y_2;z_1;z_2) = V(U;y_2;z_1)W(U;y_2;z_2), \quad (23)$$

находим, что (23) распадается на два уравнения, причем

$$V(U;y_2;z_1) = e^{2\gamma U}\left\langle A_1 A_2 \right\rangle,$$
$$W(U;y_2;z_2) = e^{2\gamma U}\left\langle A_1^* A_2^* \right\rangle, \tag{24}$$

Из (4),(22),(24), и (25) следует при больших значениях дистанции формула (20). Таким образом, и в случае многократного рассеяния закон распределения флуктуации асимптотически приближается к нормальному при увеличении дистанции. При этом, как следует из (20), величена относительной флуктуации интенсивности стремится к единице, то есть наступает насыщение, когда вся энергия перекачивается из регулярной части поля в нерегулярную.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ И ИХ СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

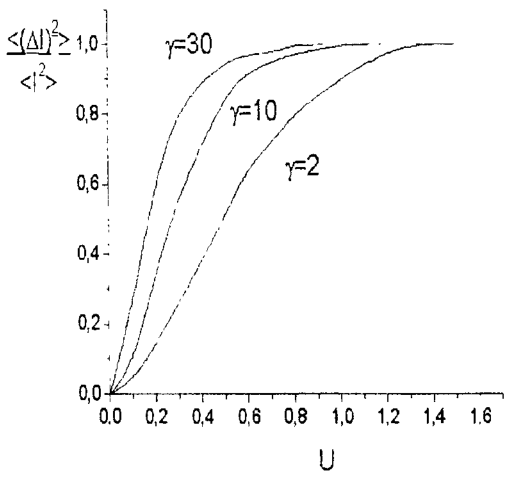

Рис 1. Зависимость величины относительных флуктуаций интенсивности поля от дистанции, при нормальном законе распределения и K=4

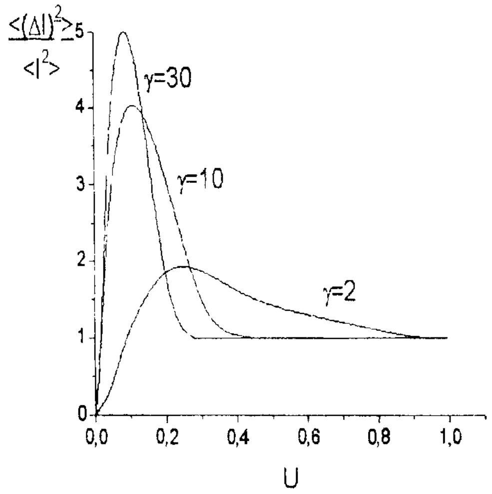

Рис 2. Зависимость величины относительных флуктуаций интенсивности поля от дистанции, при нормальном законе распределения и K>4

На Рис 1,2 изображена полученная с использованием формулы (15) зависимость относительных флуктуаций от дистанции. С ростом кратности рассеяния волн возникают максимумы, которые с увеличением параметра γ возрастают и смещаются в сторону уменьшения параметра U. С ростом дистанции величена флуктуаций интенсивности сначала возрастает, достигает максимума, а затем убывает, асимптотически стремясь к единице, что соответствует насыщению, причем спад тем резче, чем больше параметр U.

На Рис. 3. предоставлены результаты расчетов относительной флуктуации интенсивности по формулам (4), (14). Существенное отличие кривых рисунка 3 от кривых Рисунков 1,2 указывает на то, что закон распределения для флуктуации поля в промежуточной области значений дистанции отличен от нормального.

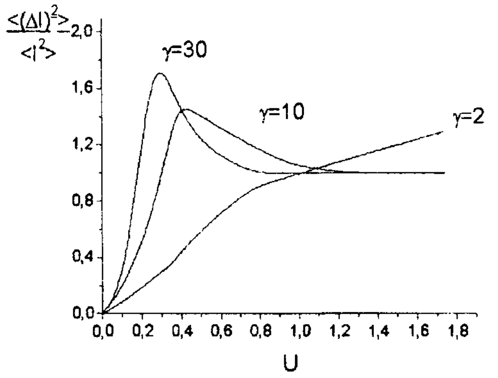

Рис. 3. Зависимость величины относительных флуктуаций интенсивности поля от дистанции, при нормальном законе распределения и K>4

Координату максимума кривых Рис. 3. (1 2) можно определить из соотношения [11]

$U_0 = \frac{n}{2\gamma}$, где $n >> 1$. Учитывая границу применимости метода параболического уравнения a, выражаемую формулой

$$\frac{U}{2k^2a^2} << 1, \tag{25}$$

получим условие, при котором граница применимости параболического уравнения перекрывает то значение дистанции, начиная с которого наступает насыщение интенсивности:

$$ka >> \sqrt[3]{\frac{n}{4\alpha' a}}, \tag{26}$$

где $\alpha' a$ – доля энергии, рассеянной на расстоянии, равном масштабу неоднородностей.

Приведенные результаты расчетов согласуются с экспериментально установленным фактом насыщения флуктуаций интенсивности поля [12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты объясняют теоретически экспериментально полученный факт насыщения величины флуктуаций интенсивности [12]. Эффект насыщения обусловлен наложением многократно рассеянных волн, сконцентрированных в малой области пространства. Насыщение наступает тогда, когда вся энергия из регулярной части поля волны переходит в нерегулярную. При $U \leq 0{,}2$ и $U \geq 1$ флуктуации поля подчинены нормальному закону. В промежуточной области значений дистанции закон распределения отличен от нормального. Для того, чтобы граница применимости метода параболического уравнения перекрывала значение дистанции, начиная с которого наступает насыщение интенсивности флуктуаций, необходимо, чтобы отношение масштаба неоднородностей к длине волны было намного больше величины, обратной доле рассеяния энергии на масштабе неоднородностей.

В случае малых флуктуаций, при однократном рассеянии величина $B = \ln \frac{A}{A_0}$ называемая уровнем, линейно зависит от ΔA. Отсюда следует, что уровень, как и ΔA, распределен по нормальному закону, что соответствует экспериментальным результатам.

Список литературы

1. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. – М: «Наука» 1976 г. – 314с.
2. Монин А.С. Яглом А.М: Статистическая гидромеханика Ч.1 – М: «Наука» 1969 г. – 517с.
3. Чернов Л.А. Волны в случайно неоднородных средах М: – М: «Наука» 1975 г. – 442 с.
4. Рытов С.М:, Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику Ч.2. Случайные поля, – М: «Наука» 1978 г. – 603с.
5. Шишов В.И. Случайные флуктуации интенсивности плоской волны распространяющиеся в случайно преломляющей среде. ЖЕТФ, 1971, 61 вып. 4(10) 1399
6. Martin J. M., Stanly M. Intensity images and statistics from numerical simulation of wave propagation in 3-D random media. Flatte Applied Optics 1989 y.
7. Крамер Г. Математические методы статистики – М: «Мир » 1975 г. – 303 с.
8. Каравайников В.Н. Чуклов В.А. Вычисление статистического момента поля второго порядка для сильных флуктуаций поля. Акустический журнал 1982-XXIII – №1 с.69-72.
9. Бейтмен Г. Эден А. Высшие трансцендентные функции. – М: «Наука» 1974 г.
10. Чуклов В.А. Вычисление статистического момента поля четвертого порядка в среде с гаусовой корреляционной функцией. – Севастополь 1989 г – 155 с.
11. Чуклов В.А. О границе применения МПУ. Рукопись деп. УКРНИИНТИ (№170-УК-84Деп)
12. Гуревич А.С. Кон А.И. , Миронов В.Л. Хмелевцов С.С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М: «Наука» 1974 г. – 500с.

Поступила в редакцию 25.10.2002 г.