Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2002) 105 - 114

УДК 517.98

А.В. Яковлев

МАЛЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ГРУЗОМ НА КОНЦЕ

1. Постановка начально-краевой задачи

Рассмотрим вязкоупругий стержень длины l, расположенный в состоянии покоя вдоль оси Ox и находящийся в вязкоупругой среде. Считаем, что вдоль оси Oy действует однородное гравитационное поле с ускорением $g > 0$, направленное сверху вниз. Далее, считаем, что левый конец стержня $x = 0$ жестко закреплен, а на правом конце $x = l$ находится груз массы $m > 0$.

Будем описывать малые поперечные отклонения стержня от состояния покоя с помощью функции $u = u(t, x)$, которая и подлежит определению в качестве решения начально-краевой задачи. Таким образом, далее будет исследоваться двумерная начально-краевая задача о малых поперечных колебаниях стержня, находящегося в вязкоупругой среде и имеющего груз на конце.

Исследуемая здесь задача имеет достаточно большую историю. Так, в работах [1],[2] изучалась задача с жестким защемлением стержня на обоих концах, а в [3] — только на левом и со свободным правым. В [3] проведено подробное исследование эволюционной и спектральной задач методами функционального анализа и спектральной теории операторных пучков. Позднее близкие вопросы рассматривались в [4],[5]. В данной статье изучается новая задача, обобщающая (по физической постановке) задачи из работ [1]—[5]; при этом применяется операторный подход, развитый в [6], а также работах [7], [8].

Введем следующие обозначения:

$S(x)$ — площадь поперечного сечения стержня;

$\rho(x)$ — плотность стержня;

$E(x)$ — модуль упругости стержня в точке x;

$J(x)$ — момент инерции поперечного сечения стержня;

$\gamma = \text{const} > 0$ — коэффициент внутреннего трения;

$\nu(x)$ — коэффициент внешнего трения;

$P(x)$ — сжимающая (при $P(x) > 0$) или растягивающая (при $P(x) < 0$) распределенная сила;

$f(t, x)$ — поперечная распределенная нагрузка, действующая на стержень.

Далее предполагаем, что введенные функции переменной x удовлетворяют следующим естественным для классической постановки условиям непрерывности и дифференцируемости на отрезке $[0,l]$:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } 0 < S_0 \leqslant S_1, \quad S(x) \in C[0,l];\\
&\text{б) } 0 < \rho_0 \leqslant \rho(x) \leqslant \rho_1, \quad \rho(x) \in C[0,l];\\
&\text{в) } 0 < \nu_0 \leqslant \nu(x) \leqslant \nu_1, \quad \nu(x) \in C[0,l];\\
&\text{г) } P(x) \in C^1[0,l];\\
&\text{д) } 0 < E_0 \leqslant E(x) \leqslant E_1, \quad E(x) \in C^2[0,l];\\
&\text{е) } 0 < J_0 \leqslant J(x) \leqslant J_1, \quad J(x) \in C^2[0,l].
\end{aligned} \tag{1}$$

Уравнение малых поперечных колебаний стержня выводится в работе [2] и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\rho(x)S(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(E(x)J(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big) +\\
&+\gamma\frac{\partial}{\partial t}\Big\{-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(E(x)J(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)\Big\} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(P(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) -\\
&-\nu(x)\frac{\partial u}{\partial t} + f(t,x).
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь выражение слева и первое и последнее слагаемые справа — обычные члены, входящие в уравнение упругих колебаний стержня в отсутствие вязкоупругой среды; слагаемое, содержащее коэффициент $\gamma > 0$, учитывает внутреннее трение; соответственно слагаемое, содержащее функцию $\nu(x)$, учитывает внешнее трение; наконец, слагаемое, содержащее функцию $P(x)$, учитывает действие сжимающей (растягивающей) силы в стержне. В целом соотношение (2) есть следствие второго закона Ньютона, примененного к этому элементу стержня длины Δx в точке x.

Приведем теперь граничные условия на концах $x = 0$ и $x = l$. Как уже упоминалось, левый конец стержня жестко защемлен, поэтому

$$u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0. \tag{3}$$

На правом конце находится груз массой m. Учитывая, что момент сил в этой точке равен нулю, приходим к условию

$$E(l)J(l)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,l) = 0. \tag{4}$$

Далее, применяя закон Ньютона к грузу, получаем аналогично выводу уравнения (2) условие

$$\begin{aligned}
&m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,l) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(E(x)J(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)\Big|_{x=l} +\\
&+\gamma\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\Big(E(x)J(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)\Big|_{x=l} - P(l)\frac{\partial u}{\partial x}(t,l) -\\
&-\nu_l\frac{\partial u}{\partial t}(t,l) + f_l(t),
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\nu_l > 0$ — коэффициент трения на правом конце, а $f_l(t)$ — внешняя поперечная сила, действующая на груз.

В начальный момент времени $t = 0$ следует задать начальные отклонения и начальные скорости стержня:

$$u(0,x) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u^1(x). \tag{6}$$

Таким образом, задача о малых поперечных колебаниях стержня с грузом на конце состоит в нахождении функции $u(t,x)$ из уравнения (2), граничных условий (3) – (5) и начальных условий (6).

2. Закон баланса полной энергии

Предположим, что $u(t,x)$ — классическое решение начально-краевой задачи (2) – (6), т. е. такая функция переменных t, x, для которой существуют и непрерывны все производные, входящие в уравнение (2), и выполнено уравнение (2), а также краевые и начальные условия (3) – (6).

Лемма 1. *Для классического решения задачи* (2) – (6) *выполнен следующий закон балланса полной энергии:*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\Big[\int_0^l \rho(x)S(x)\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 dx + m\Big|\frac{\partial u}{\partial t}(t,l)\Big|^2\Big] + \\
&+\Big[\int_0^l E(x)J(x)\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|^2 dx + \int_0^l \Gamma(x)\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 dx\Big]\Big\} = \\
&= -\gamma\int_0^l E(x)J(x)\Big|\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}\Big|^2 dx - \int_0^l \nu(x)\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 dx - \\
&- \nu_l\Big|\frac{\partial u}{\partial t}(t,l)\Big|^2 + \int_0^l f(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\,dx + \\
&+ f_l(t)u(t,l).
\end{aligned} \tag{7}$$

Замечание 3. Слева в (7) стоит производная по t от полной энергии рассматриваемой механической системы; при этом выражение в первых квадратных скобках есть удвоенная кинетическая энергия системы, а выражение во вторых квадратных скобках — удвоенная потенциальная энергия системы, представленная в виде суммы энергии поперечных упругих сил и энергии продольных сил сжатия (растяжения).

Справа в (7) стоит сумма мощностей диссипации энергии в системе (первые три слагаемых) и работа внешних сил над системой (последние два слагаемых). □

3. Переход к задаче Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве

Исследование задачи (2)—(6) проведем на основе операторного подхода, изложенного в [6]. С этой целью рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}$ элементов вида

$$\hat{u} := \{u(x), 0 < x < l; u(l)\}, \tag{8}$$

состоящих из функций $u(x)$, заданных на отрезке $[0, l]$, и их следов $u(l)$ в точке $x = l$. На этом множестве введем квадрат нормы

$$\|\hat{u}\|^2 := \int_0^l \rho(x)S(x)|u(x)|^2\,dx + m|u(l)|^2, \tag{9}$$

порожденной кинетической энергией изучаемой системы, а также соответствующее скалярное произведение

$$(\hat{u}, \hat{v}) := \int_0^l \rho(x)S(x)u(x)\overline{v(x)}\,dx + mu(l)\overline{v(l)}. \tag{10}$$

Замечание 4. Из неравенств (1) следует, что норма (9) эквивалентна стандартной норме

$$\|\hat{u}\|_0^2 := \int_0^l |u(x)|^2\,dx + l|u(l)|^2. \tag{11}$$

(слагаемые взяты с учетом физических размерностей).

Рассматривая уравнения (2) и (5) в виде пары соотношений и считая далее пару $\hat{u}(t) := \{u(t,x), 0 < x < l; u(t,l)\}$, построенную по решению задачи (2)–(6), функцией переменной t со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением (10), приходим к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (по переменной t)

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\hat{u}}{dt^2} + (\gamma A + C)\frac{d\hat{u}}{dt} + (A + B)\hat{u} = \hat{f}(t), \\ &\hat{u}(0) = \hat{u}^0, \quad \frac{d\hat{u}}{dt}(0) = \hat{u}^1, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} &\hat{u}^0 := \{\hat{u}^0(x); u^0(l)\}, \quad \hat{u}^1 := \{u^1(x); u^1(l)\}, \\ &\hat{f}(t) := \left\{\frac{1}{\rho(x)S(x)}f(t,x); \frac{1}{m}f_l(t)\right\}, \end{aligned} \tag{13}$$

а операторы A, B и C заданы следующими формулами на своих областях определения:

$$\begin{aligned} A\hat{u} &:= \left\{\frac{1}{\rho(x)S(x)}\frac{d^2}{dx^2}\left[E(x)J(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right]; -\frac{1}{m}\frac{d}{dx}\left[E(x)J(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right]\Big|_{x=l}\right\}, \\ D(A) &:= \{\hat{u} = \{u(x); u(l)\} : u(x) \in H^4(0,l), \quad u(0) = u'(0) = 0, \\ &\qquad E(l)J(l)\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x=l} = 0\}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$B\hat{u} := \Big\{-\frac{1}{\rho(x)S(x)}\frac{d}{dx}\Big[P(x)\frac{du}{dx}\Big];\ \frac{1}{m}P(l)\frac{du}{dx}(l)\Big\},$$
$$D(B) := \Big\{\hat{u} = \{u(x); u(l)\} : u(x) \in H^2(0,l), \quad u(0) = 0\Big\}, \tag{15}$$

$$C\hat{u} := \Big\{\frac{\nu(x)u(x)}{\rho(x)S(x)};\ \frac{\nu_l}{m}u(l)\Big\}, \quad D(C) = \mathcal{H}. \tag{16}$$

Для областей определения операторов A, B и C справедливы включения
$$D(A) \subset D(B) \subset D(C) = \mathcal{H}. \tag{17}$$

Определение 1. Сильным решением задачи Коши (12) на отрезке $[0,T]$ называется такая функция $\hat{u} = \hat{u}(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$, для которой выполнены свойства $\hat{u}(t) \in D(A)$, $\hat{u}'(t) \in D(A)$ при любом $t \in [0,T]$, $A\hat{u}(t) \in C[0,T;\mathcal{H}]$, $A\hat{u}'(t) \in C[0,T;\mathcal{H}]$, $\hat{u}''(t) \in C[0,T;\mathcal{H}]$ и выполнено уравнение (12) при $t \in [0,T]$. $\square$

Из (17) и определения 1 следует, что для сильного решения $\hat{u}(t)$ задачи (12) выполнены также свойства
$$B\hat{u}(t) \in C[0,T;\mathcal{H}], \quad C\hat{u}'(t) \in C[0,T;\mathcal{H}], \quad \hat{f}(t) \in C[0,T;\mathcal{H}], \tag{18}$$
$$\hat{u}^0 \in D(A), \quad \hat{u}^1 \in D(A). \tag{19}$$

Следствием приведенных выше построений является такое утверждение.

Лемма 2. *Пусть $u(t,x)$ классическое решение начально-краевой задачи (2) (6) на отрезке $[0,T]$.*

Тогда построенная по нему функция $\hat{u}(t) := \{u(t,x); u(t,l)\}$ со значениями в $\mathcal{H}$ является сильным решением задачи Коши (12) на отрезке $[0,T]$.

$\square$

Дальнейшее изучение начально-краевой задачи (2) –(6) основано на изучении условий, обеспечивающих существование сильного решения задачи (12) на любом отрезке $[0,T]$.

4. Свойства операторных коэффициентов задачи Коши.

Для введенных выше операторных коэффициентов доказаны следующие свойства.

Теорема 1. *Оператор A является самосопряженным положительно определенным оператором, заданным на $D(A)$ и действующим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Он имеет дискретный спектр $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$, $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k < \ldots$, $\lambda_k \to +\infty (k \to \infty)$, а его собственные элементы $\{\hat{u}_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$ образуют ортогональный базис в $\mathcal{H}$ и в $\mathcal{H}_A$:*
$$(\hat{u}_k(A), \hat{u}_l(A) = \delta_{kl}, \quad (\hat{u}_k(A), \hat{u}_l(A))_A = \lambda_k(A)\delta_{kl}. \tag{20}$$
Собственные значения $\lambda_k(A)$ оператора A имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k(A) = k^4 c_A^{-4}[1 + o(1)]\,(k \to \infty), \quad c_A := \frac{1}{\pi}\int_0^l \Big(\frac{\rho(x)S(x)}{E(x)J(x)}\Big)^{1/4} dx > 0. \tag{21}$$

Обратный оператор A^{-1} положителен и принадлежит классу S_p компактных операторов при $p > 1/4$.

При этом, энергетическое пространство $\mathcal{H}_A$ положительно определенного оператора A получается замыканием $\mathcal{D}(A)$ по энергетической норме $(A\hat{u}, \hat{u})_{\mathcal{H}} = \|\hat{u}\|_A^2$.

Свойства оператора B, определенного формулами (15), таковы.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$P(x) \in C^1[0, l], \qquad P(x) \geqslant P_0 > 0. \tag{22}$$

Тогда оператор B является положительно определенным самосопряженным оператором с дискретным спектром $\{\lambda_k(B)\}_{k=1}^{\infty}$, расположенным на положительной полуоси: $0 < \lambda_1(B) \leqslant \lambda_2(B) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k(B) \leqslant \ldots$, $\lambda_k(B) \to +\infty (k \to \infty)$. При этом собственные элементы $\{\hat{u}_k(B)\}_{k=1}^{\infty}$ образуют ортогональный базис в $\mathcal{H}$ и в энергетическом пространстве

$$\mathcal{H}_B = \{\hat{u} = \{u(x); u(l)\} \in \mathcal{H} : u(x) \in H^1(0, l), u(0) = 0\}, \tag{23}$$

$$(\hat{u}, \hat{v})_B := \int_0^l P(x) \frac{du}{dx} \cdot \overline{\frac{dv}{dx}}\, dx, \tag{24}$$

$$(\hat{u}_k(B), \hat{u}_l(B)) = \delta_{kl}, \quad (\hat{u}_k(B), \hat{u}_l(B))_B = \lambda_k(B)\delta_{kl}. \tag{25}$$

Для оператора C доказаны следующие свойства.

Теорема 3. *Оператор C, определенный формулами (16), является самосопряженным, ограниченным и положительно определенным оператором, действующим в $\mathcal{H}$. При этом*

$$c_- \|\hat{u}\|^2 := min\Big(\frac{\nu_0}{\rho_1 S_1}; \frac{\nu_l}{m}\Big)\|\hat{u}\|^2 \leqslant (C\hat{u}, \hat{u}) \leqslant max\Big(\frac{\nu_1}{\rho_0 S_0}; \frac{\nu_l}{m}\Big)\|\hat{u}\|^2 =: c_+ \|\hat{u}\|^2, \tag{26}$$

$$\sigma(C) = \Big\{\frac{\nu_l}{m}\Big\} \cup \sigma_{ess}(C), \quad \sigma_{ess}(C) = \Big\{M(x) := \frac{\nu(x)}{\rho(x)S(x)} : 0 \leqslant x \leqslant l\Big\}, \tag{27}$$

где через $\sigma_{ess}(C)$ обозначен существенный (предельный) спектр оператора C.

5. Переход к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Операторная матрица с неограниченными операторными коэффициентами.

Опираясь на доказанные выше свойства операторов A, B и C, вернемся к задаче Коши (12) – (16):

$$\frac{d^2\hat{u}}{dt^2} + F\frac{d\hat{u}}{dt} + A_b\hat{u} = \hat{f}(t), \quad \hat{u}(0) = \hat{u}^0, \quad \frac{d\hat{u}}{dt}(0) = \hat{u}^1, \tag{28}$$

$$F := \gamma A + C, \quad A_b := A + B, \quad D(F) = D(A), \quad D(A_b) = D(A). \tag{29}$$

Далее будем рассматривать лишь случай $P(x) \geqslant P_0 > 0$. Второй вариант приводит к дополнительным усложнениям при получении доказываемых ниже результатов, которые формируются так же, как и в случае $B \gg 0$.

Теорема 4. *Операторные коэффициенты F и A_b в (28) обладают следующими свойствами:*

$$1^0. \quad F = F^* \gg 0, \quad F^{-1} \in \mathcal{S}_\infty, \tag{30}$$

$$\gamma\lambda_k(A) + c_- \leqslant \lambda_k(F) \leqslant \gamma\lambda_k(A) + c_+, \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{31}$$

$$\tag{32}$$

$$2^0. \quad A_b = A_b^* \gg 0, \quad A_b^{-1} \in \mathcal{S}_\infty, \tag{33}$$

$$\lambda_k(A_b) = \lambda_k(A)[1 + o(1)](k \to \infty). \tag{34}$$

Переходя к исследованию задачи Коши (28), (29) с изученными свойствами операторных коэффициентов F и A_b, заметим, что уравнения такого вида в произвольном гильбертовом пространстве изучались в последнее время в работе Копачевского Н. Д., Менникена Р., Пашковой Ю. С., и Треттер Хр. [8], которая до настоящего времени не опубликована (см. также [9], стр. 424). В связи с этим здесь будет дано доказательство теоремы о корректной разрешимости задачи (28), основанное на схеме доказательства статьи [8] и связанное с переходом к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка с последующим изучением свойств возникающей здесь операторной матрицы с неограниченными операторными коэффициентами.

Введем в задаче (28), (29) новую неизвестную функцию $\hat{v}(t)$, полагая

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = -iA_b^{1/2}\hat{u}(t), \quad \hat{v}(0) = \hat{0}. \tag{35}$$

Для сильного решения задачи (28) имеем $\hat{v}(t) \in C^2[0, T; \mathcal{H}]$ и, таким образом,

$$\frac{d^2\hat{v}}{dt^2} = -iA_b^{1/2}\frac{d\hat{u}}{dt}, \quad \hat{v}'(0) = -iA_b^{1/2}\hat{u}^0. \tag{36}$$

Для неизвестных функций $\hat{u} = \hat{u}(t)$ и $\hat{v} = \hat{v}(t)$ имеем из (28), (36) задачу Коши

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}\hat{u}(t)\\ \hat{v}(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}F & iA_b^{1/2}\\ iA_b^{1/2} & 0\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\hat{u}(t)\\ \hat{v}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{f}(t)\\ 0\end{pmatrix},$$
$$\hat{u}'(0) = \hat{u}^1, \quad \hat{v}'(0) = -iA_b^{1/2}\hat{u}^0. \tag{37}$$

Обозначим через $y = y(t)$ функцию переменной t со значениями в $\mathcal{H}^2$ согласно формуле

$$y(t) = (\hat{u}'(t); \hat{v}'(t))^t. \tag{38}$$

Введем в рассмотрение также операторную матрицу

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix}F & iA_b^{1/2}\\ iA_b^{1/2} & 0\end{pmatrix}, \tag{39}$$

заданную на области определения

$$D(\mathcal{A}_0) := D(F) \oplus D(A_b^{1/2}). \tag{40}$$

Тогда задача (37) может быть записана в виде

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_0 y = f_0(t), \quad y(0) = y^0, \tag{41}$$

$$f_0(t) := (\hat{f}(t); 0)^t, \quad y^0 := (\hat{u}^1; -iA_b^{1/2}\hat{u}^0)^t, \tag{42}$$

т. е. в форме задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^2 := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

Лемма 3. *Операторная матрица $\mathcal{A}_0$, заданная на области определения* (40), *является аккретивным оператором, действующим в $\mathcal{H}^2$, т. е.*

$$Re(\mathcal{A}_0 y, y)_{\mathcal{H}^2} \geqslant 0, \quad y \in D(\mathcal{A}_0). \tag{43}$$

□

Из данной леммы следует, что операторная матрица $(-\mathcal{A}_0)$ является диссипативной в $\mathcal{H}^2$. Однако она не является максимально диссипативной. Для преодоления этой проблемы осуществляются некоторые дополнительные преобразования задачи (41), (42).

В частности, вводится новая искомая функция $z(t)$ соотношением

$$y(t) = e^{at} z(t), \quad a > 0 \tag{44}$$

Тогда взамен задачи Коши (41), (42) имеем

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_a z = e^{-at} f_0(t) =: f_a(t), \quad z(0) = y(0) = y^0, \tag{45}$$

$$\mathcal{A}_a := \mathcal{A}_0 + a\mathcal{I} = \begin{pmatrix} F_a & iA_b^{1/2} \\ iA_b^{1/2} & aI \end{pmatrix}, \quad F_a := F + a\mathcal{I}. \tag{46}$$

В силу (43) оператор $\mathcal{A}_a$ является равномерно аккретивным:

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}_a z; z)_{\mathcal{H}^2} \geqslant a\|z\|^2_{\mathcal{H}^2}, \quad z \in D(\mathcal{A}_a) = D(\mathcal{A}_0). \tag{47}$$

При этом $\mathcal{A}_a$ имеет ограниченный обратный оператор $\mathcal{A}_a^{-1}$ и

$$\|\mathcal{A}_a^{-1}\| \leqslant a^{-1}. \tag{48}$$

Далее устанавливается, что оператор $\mathcal{A}_a$ является в существенном максимальным равномерно аккретивным оператором, т. е. его замыкание $\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}_a}$ обладает этими свойствами. При этом, оператор $(-\mathcal{A})$ является генератором сжимающей полугруппы

$$U(t) := \exp(-t\mathcal{A}), \quad \|U(t)\| \leqslant e^{-at}, t > 0. \tag{49}$$

6. Теорема о корректной разрешимости начально-краевой задачи

Доказательство этой теоремы использует следующий хорошо известный общий факт (см., например, [10], стр. 166).

Теорема 5. *Пусть в произвольном гильбертовом пространстве H рассматривается задача Коши*

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad u(0) = u^0, \tag{50}$$

где A максимальный аккретивный оператор, заданный на плотной в H области определения $D(A)$. Тогда, если выполнены условия

$$u^0 \in D(A), \quad f(t) \in C^1[0, T; H], \tag{51}$$

то задача (50) *имеет единственное сильное на отрезке* $[0,T]$ *решение*

$$u(t) = U(t)u^0 + \int\limits_0^t U(t-s)f(s)\,ds, \tag{52}$$

где $U(t)$ *– сжимающая полугруппа операторов с генератором* $(-A)$.

Эта теорема, а также предыдущие построения, связанные с переходом от задачи (12) к (45), позволяют установить следующий результат о сильной разрешимости задачи (12).

Теорема 6. *Пусть в задаче Коши* (12) *выполнены условия*

$$\hat{u}^0 \in D(A), \quad \hat{u}^1 \in D(A), \quad \hat{f}(t) \in C^1[0,T;\mathcal{H}]. \tag{53}$$

Тогда она имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Следствием данной теоремы является основной результат этой статьи — утверждение о существовании сильного решения исходной начально- краевой задачи о малых движениях вязкоупругого стержня с грузом на конце.

Теорема 7. *Пусть в задаче* (2) - (6) *выполнены условия* (1) , $P(x) \geqslant P_0 > 0$, *а также условия*

1) $u^0(x) \in H^4(0,l)$, $u^0(0) = 0$, $\dfrac{du^0}{dx}(0) = 0$, $E(l)J(l)\dfrac{d^2u^0}{dx^2}(l) = 0$;

2) $u^1(x) \in H^4(0,l)$, $u^1(0) = 0$, $\dfrac{du^1}{dx}(0) = 0$, $E(l)J(l)\dfrac{d^2u^1}{dx^2}(l) = 0$;

3) $f(t,x) \in C^1[0,T;L_2(0,l)]$, $f_l(t) \in C^1[0,T]$.

Тогда начально-краевая задача (2) - (6) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$, *т. е. такую функцию* $u(t,x)$, *для которой* $\hat{u}(t) = \{u(t,x); u(t,l)\}$ *является сильным решением задачи* (12) *в смысле определения 1.*

Автор благодарит профессора Н.Д. Копачевского за постановку задачи, совместные обсуждения и руководство работой.

Список литературы

[1] Pivovarchik V.N., *Problem Connected with Oscillations of Elastic Beams with Internal and Viscous Damping (in Russian)*, Moscow University Bulletin, vol. 42, 1987, 68-71.

[2] Баркарь С.М., Пивоварчик В.Н., *О малых поперечных колебаниях вязкоупругого стержня с жестко закрепленными концами*, Математические исследования, Кишинев, 1992, 3-14.

[3] Lankaster P., Shkalikov A., *Damped Vibrations of Beams and Related Spectral Problems*, Canadian Applied Mathematics Quarterly, vol.2, N1 (1994), 45-90.

[4] Griniv R.O., Shkalikov A.A., *On Operator Pencils Arising in the Problem of Beam Oscillations with Internal Damping (in Russian)*, Matematicheskii zametki, vol. 56, N2 (1994), 114 - 131; English Translation in Math. Notes, vol. 56 (1994).

[5] Adamyan V., Pivovarchik V., *On the spectra of some classes of quadratic operator pencils*, Operator Theoory: Advances and Applications, vol. 106 (1998), 23 - 36.

[6] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан, *Операторные методы в линейной гидродинамике*, М., "Наука", 1989, 416 с.

[7] Azizov T.Ya., Hardt V., Kopachevsky N.D., Mennicken R., *On the problem of Small Motions and Normal Oscillations of a Viscous Fluid in a Partially Filled Container (to appear).*

[8] Kopachevsky N.D., Mennicken R., Pashkova Yu.S., Tretter Chr., *Complete second order linear differential operator equations in Hilbert space and applications in hydrodynamics,* Trans. of the AMS, to appear.

[9] Yakubov S., Yakubov Ya., *Differential-Operator Equations. Ordinary and Partial Differential Equations,* Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2000.

[10] Крейн С.Г., *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве,* М., Наука, 1967, 464 с.