Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2002) 95 – 98

УДК 517.983

Д.Л. Тышкевич

О КЛАССАХ СОПРЯГАЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ В ОБЩИХ ПРОСТРАНСТВАХ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

В теории линейных операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой (основы теории изложены в монографиях [1,2]) одну из существенных трудностей представляет определение сопряжённого оператора в случае, когда исходное пространство сингулярно либо вырождено. Одним из способов обойти эту трудность является введение в рассмотрение линейных отношений (см., например [1, гл.II]). Хотя многие понятия (спектр, сопряженное отношение, преобразование Кэли и др.) даже более естественно формулируются в терминах линейных отношений, слабым местом такого подхода является невозможность задания на множестве линейных отношений алгебраической структуры, такой, как линейное пространство либо линейная алгебра.

В данной работе предлагается подход, при котором изначально рассматривается некоторое специальное семейство операторов, но в таком семействе (или в каком-либо определённом его подсемействе) можно задать алгебраическую структуру упомянутого выше типа.

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ — комплексные пространства соответственно с внутренними произведениями $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{X}}$, $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{Y}}$, $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{Z}}$. Кроме наличия внутренних произведений, на пространства $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ не будет налагаться никаких других требований (как-то — наличие топологии, каких-либо свойств топологии, связанных с внутренним произведением и т.п.), все выкладки далее будут чисто алгебраическими.

$\langle \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \rangle$ будет означать множество всех линейных операторов, заданных на *всём* $\mathfrak{X}$ с образом, лежащим в $\mathfrak{Y}$ (классы типа $\langle \mathfrak{X}, \mathfrak{X} \rangle$ будут просто обозначаться через $\langle \mathfrak{X} \rangle$). Важным для всех дальнейших рассмотрений является следующее понятие.

Определение 1. Назовём операторы T_1 и T_2 из $\langle \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \rangle$ *эквивалентными относительно внутреннего произведения* $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{Y}}$ (и будем записывать как $T_1 \sim T_2$), если для всех $x \in \mathfrak{X}$ и $y \in \mathfrak{Y}$

$$[T_1 x, y]_{\mathfrak{Y}} = [T_2 x, y]_{\mathfrak{Y}}$$

Данное понятие содержательно лишь для вырожденного пространства $\mathfrak{Y}$, в случае невырожденности $\mathfrak{Y}$ эквивалентность относительно внутреннего произведения превращается в обычное равенство. Нетрудно видеть, что введённое в определении 1 отношение, в силу свойств внутреннего произведения, действительно является отношением эквивалентности.

Очевидно следующее

Предложение 1. *$T_1 \sim T_2$ тогда и только тогда, когда $T_2 = T_1 + T$ и образ оператора T содержится в изотропном подпространстве $\mathfrak{Y}_0$ пространства $\mathfrak{Y}$.*

Также тривиально

Предложение 2. *Если $T_1 \sim T_2$ и $S_1 \sim S_2$, где $T_1, T_2, S_1, S_2 \in \langle \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \rangle$, то для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ $\quad \lambda T_1 + \mu S_1 \sim \lambda T_2 + \mu S_2$.*

Для композиции операторов соответствующее свойство может не выполняться, т.е. из соотношений $T_1 \sim T_2$, $S_1 \sim S_2$, где $S_1, S_2 \in \langle \mathfrak{X}, \mathfrak{Z} \rangle$, $T_1, T_2 \in \langle \mathfrak{Z}, \mathfrak{Y} \rangle$, в общем случае не следует $T_1 S_1 \sim T_2 S_2$, даже когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}$, как показывает следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим пространство $\mathfrak{X} = \mathbb{C}^2$ с оператором Грама G, заданным матрицей $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Тогда $\mathfrak{X} = \operatorname{Ker} G = \operatorname{Lin}\{(0,1)\}$ — изотропное подпространство пространства $\mathfrak{X}$. Оператор T зададим матрицей $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, а оператор S_0 — матрицей $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Пусть S некоторый произвольный фиксированный оператор. Положим $S_1 = S + S_0$. Т.к. $\mathfrak{R}(S_0) = \operatorname{Lin}\{(0,1)\} = \mathfrak{X}_0$, то $S \sim S_1$ по предложению 1. Однако $TS_1 - TS = TS_0$ и $\mathfrak{R}(TS_0) = \operatorname{Lin}\{(1,1)\}$, $\quad \mathfrak{R}(TS_0) \cap \mathfrak{X}_0 = \{0\}$, что в силу того же предложения 1 означает $TS_1 \not\sim TS_2$.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ — некоторые классы операторов соответственно в $\langle \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \rangle$ и $\langle \mathfrak{Y}, \mathfrak{X} \rangle$. Всюду в данной работе под $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ будут подразумеваться некоторые линейные пространства, или же, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ могут быть алгебрами (подалгебрами линейной алгебры $\langle \mathfrak{X} \rangle$).

Определение 2. Оператор $T \in \mathfrak{U}$ назовём $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$-*сопрягаемым*, если существует такой оператор $T' \in \mathfrak{B}$, что для всех $x \in \mathfrak{X}$ и $y \in \mathfrak{Y}$ выполняется

$$[Tx, y]_{\mathfrak{Y}} = [x, T'y]_{\mathfrak{X}}.$$

Очевидно, в случае невырожденности $\mathfrak{X}$, T' определяется единственным образом. Также тривиально, что если для некоторых классов $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ оператор T — $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$-сопрягаем, то T является $(\langle \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \rangle, \langle \mathfrak{Y}, \mathfrak{X} \rangle)$-сопрягаемым. В случае, когда $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}$, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$-сопрягаемый оператор будем просто называть $\mathfrak{U}$-*сопрягаемым.*

Иллюстрацией к данному определению может служить следующий достаточно общий факт. Пусть в $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ заданы слабые – $\tau^o_{\mathfrak{X}}$, $\tau^o_{\mathfrak{Y}}$ – и некоторые допустимые топологии $\tau_{\mathfrak{X}}$ и $\tau_{\mathfrak{Y}}$ соответственно (см. [2,3]). Через $\mathfrak{U}$ обозначим класс всех $(\tau_{\mathfrak{X}}, \tau_{\mathfrak{Y}})$-, а через $\mathfrak{B}$ — класс всех $(\tau^o_{\mathfrak{Y}}, \tau^o_{\mathfrak{X}})$-непрерывных линейных операторов. Тогда, если пространства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — невырождены, то любой оператор из $\mathfrak{U}$ является $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$-сопрягаемым ([3, предл.3.3]).

В G-пространстве $\mathfrak{H}$, очевидно, оператор $T \in \mathfrak{U}$, такой, что $T^* \in \mathfrak{U}$, является $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$-сопрягаемым тогда и только тогда, когда существует оператор $T' \in \mathfrak{B}$, удовлетворяющий соотношению

$$GT' = T^* G$$

(и T' является $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$-сопряжённым к T).

Если $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ — замкнуты относительно операции обычного гильбертова сопряжения, то последнее равенство эквивалентно равенству

$$(T')^*G = GT,$$

и, таким образом, включение

$$\operatorname{Ker} G \subseteq \operatorname{Ker} GT$$

является необходимым (а в случае конечномерности $\mathfrak{H}$ — и достаточным) условием $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$-сопрягаемости оператора T. В примере 1 положим $\mathfrak{U} = \mathfrak{B} = \langle \mathfrak{X} \rangle$ (таким образом, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ замкнуты относительно обычного сопряжения); тогда

$$\operatorname{Ker} GT = \operatorname{Lin}\{(1,0)\} \text{ и } \operatorname{Ker} G \cap \operatorname{Ker} GT = \{0\},$$

следовательно, оператор T не является $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$-сопрягаемым (вообще ни для каких классов $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$). Оказывается, такой факт не случаен. А именно, справедливо следующее утверждение

Предложение 3. *Пусть $S_1, S_2 \in \langle \mathfrak{X}, \mathfrak{Z} \rangle$, $T_1, T_2 \in \langle \mathfrak{Z}, \mathfrak{Y} \rangle$, и для некоторых классов $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ из $\langle \mathfrak{Z}, \mathfrak{Y} \rangle$ и $\langle \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} \rangle$ соответственно оператор T_1 является $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$-сопрягаемым. Тогда*

$$T_1 S_1 \sim T_2 S_2$$

Доказательство. По определению 2 существует такой оператор $T_1' \in \mathfrak{B}$, для которого

$$[T_1 S_1 x,\, y]_{\mathfrak{Y}} = [S_1 x,\, T_1' y]_{\mathfrak{Z}} = [S_2 x,\, T_1' y]_{\mathfrak{Z}} = [T_1 S_2 x,\, y]_{\mathfrak{Y}} = [T_2 S_2 x,\, y]_{\mathfrak{Y}}$$

для любых $x \in \mathfrak{X}$, $y \in \mathfrak{Y}$, следовательно, по определению 1,

$$T_1 S_1 \sim T_2 S_2$$

□

Предложения 2 и 3 приводят, в частности, к следующему заключению. Пусть $\mathfrak{U}$ — некоторая подалгебра алгебры $\langle \mathfrak{X} \rangle$, а $\mathfrak{U}_c$ — множество всех $\mathfrak{U}$-сопрягаемых операторов. Тогда $\mathfrak{U}_c$ само является алгеброй, причём отношение $\sim$ является конгруэнцией на $\mathfrak{U}_c$, таким образом, можно переходить к фактор-алгебре $\mathfrak{U}_c \backslash \sim$. Однако можно и не осуществлять переход к фактор-алгебре, если есть какой-либо закон, сопоставляющий оператору из $\mathfrak{U}_c$ $\mathfrak{U}$-сопряжённый к нему. По крайней мере, существование такого закона обеспечивается аксиомой выбора. Заметим, что данная ситуация (как и все ситуации подобного рода) похожа на классический случай соглашения рассматривать элементы лебеговских пространств $L^p(A, \mu)$ не как классы эквивалентности (по отношению равенства почти всюду по мере μ), а как функции, о которых говорят, что они "совпадают"(т.е. равны почти всюду по мере μ); равенство почти всюду по мере μ $\stackrel{\mu}{=}$ является конгруэнцией на пространствах $\mathcal{L}^p(A, \mu)$ ($p = \overline{1, \infty}$ или $p = \infty$), по которой строятся фактор-пространства (и фактор-алгебры в случае $p = \infty$) $L^p(A, \mu) = \mathcal{L}^p(A, \mu) \backslash \stackrel{\mu}{=}$.

В заключение отметим легко выводимые из определений 1, 2 и свойств внутреннего произведения факты, которые позволяют, в частности, смотреть на алгебру $\mathfrak{U}_c \backslash \sim$ (или непосредственно на $\mathfrak{U}_c$ с учётом приведённого выше замечания) как на алгебру с инволюцией, которая определяется $\mathfrak{U}$-сопряжением, если $\mathfrak{U}_c$ обладает свойством: для каждого оператора из $\mathfrak{U}_c$ некоторый $\mathfrak{U}$-сопряжённый к нему лежит в $\mathfrak{U}_c$.

Предложение 4. *Справедливы следующие утверждения:*

(a) Если T — $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$-сопрягаемый оператор, $T_1 \in \mathfrak{U}$ и $T_1 \sim T$, то T_1 — также $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$-сопрягаем.

(b) Пусть T_1, T_2 — $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$-сопрягаемые операторы, $T_1 \sim T_2$ и T_1', T_2' — $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$-сопряжённые соответственно к T_1 и T_2. Тогда $T_1' \sim T_2'$.

(c) Если T — $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$-сопрягаем, то любой $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$-сопряжённый оператор T' к оператору T является $(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$-сопрягаемым, причём для любого $(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$-сопряжённого к T' оператора T''

$$T \sim T''.$$

Список литературы

[1] Азизов Т. Л., Йохвидов И. С. *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.* – Москва. : Наука, 1985. – 352 с.
[2] Bognar J. *Indefinite inner product spaces.* – Berlin. – Heidelberg – New York : Springer-Verlag, 1974. – 224 p.
[3] McEnnis Brian W. *Shifts on indefinite inner product spaces.* Pacific J. Math – 1979. – vol. 81, №1. – p.113-130