Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2002) 99 – 104

УДК 517.9:532

Д.О. Цветков

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть вязкая стратифицированная жидкость, плотность ρ_0 которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Ox_3: $\rho_0 = \rho_0(x_3)$, частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя облость Ω, ограниченную твердой стенкой S и свободной поверхностью Γ. Предположим, что начало O декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ выбрано на свободной равновестной поверхности Γ, которая является плоской и расположена перпендикулярно ускорению силы тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ – орт оси Ox_3.

Будем рассматривать основной случай устойчивой сратификации жидкости по плотности:

$$0 < N^2_{min} \le N^2(x_3) \le N^2_{max} = N^2_0 < \infty,$$
$$N^2(x_3) = -\frac{g\rho_0'(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0, \tag{1}$$

где $N^2(x_3)$ – квадрат частоты плавучести (частоты Вейсяля-Брента).

В состоянии покоя давление в жидкости распределенно по закону

$$p_0 = p_0(x_3) = p_0(0) - g\int_0^{x_3} \rho_0(\tau)d\tau. \tag{2}$$

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ поле скорости в жидкости, $p = p(t,x)$ – отклонение поля давлений от равновестного давления (2), а через $\rho = \rho(t,x)$ – отклонения поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$.

Линеализированные уравнения для определения функций $\vec{u}$, p, ρ имеют вид:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3 + \mu\Delta\vec{u}) + \vec{f}(x,t) \quad (\text{в}\,\Omega),$$
$$\text{div}\vec{u} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \tag{3}$$

где μ – коэффициент динамической вязкости жидкости.

На твердой стенке S для вязкой жидкости должно выполнятся условие прилипания

$$\vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на}\, S), \tag{4}$$

а на свободной поверхности Γ выполняются динамические и кинематические условия. Если уравнение свободной движущейся поверхности $\Gamma(t)$ разыскивать в виде $x_3 = \zeta(t, \hat{x})$, $\hat{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma$, то упомянутые условия таковы:

$$\begin{aligned} &\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i}\right) = 0 \quad (\,i = 1, 2;\ \text{на}\,\Gamma\,), \qquad -p + 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -g\rho_0(0)\zeta \quad (\,\text{на}\,\Gamma\,), \\ &\frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_n = \vec{u}\cdot\vec{n} \quad (\,\text{на}\,\Gamma\,), \qquad \int\limits_{\Gamma} \zeta d\zeta = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к границе области Ω.

В начальный момент времени естественно считать заданными

$$\vec{u}(x,0) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(x,0) = \rho^0(x) \quad (\,x \in \Omega\,), \quad \zeta(\hat{x},0) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\,\hat{x} \in \Gamma\,). \tag{6}$$

Таким образом, задача о малых движениях вязкой стратифицированной жидкости в открытом сосуде сводится к решению уравнений (3) при краевых и начальных условиях (4) — (6).

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Начально-краевую задачу (3) — (6) приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применим прем проектирования уравнений (3) на ортогональные подпространства [1]. Свяжем с функцией $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int\limits_{\Omega} \rho_0(x_3)\vec{u}(x)\overline{\vec{v}(x)}d\Omega. \tag{7}$$

Как следует из (1), для $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ справедливы неравенства $0 < m \le \rho_0(x_3) \le M < \infty$, из которых следует, что норма, порожденная (7) и связанная с кинетической энергией в стратифицированной жидкости, эквивалентна обычной норме в пространстве $\vec{L}_2(\Omega)$.

Лемма 1. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$\vec{L}_2(\Omega, \rho_0) = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0),$$

где

$$\begin{aligned} &\vec{J}_0(\Omega, \rho_0) = \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : div\vec{u} = 0\,(\text{в}\,\Omega), \quad u_n := \vec{u}\cdot\vec{n} = 0\,(\text{на}\,\partial\Omega)\}. \\ &\vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) = \{\,\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{v} = \rho_0^{-1}\nabla p, \quad \vec{v}\cdot\vec{n} = 0\,(\text{на}\,S), \\ &\qquad\qquad \nabla\cdot\vec{v} = 0\,(\text{в}\,\Omega), \int\limits_{\Gamma} p\,d\Gamma = 0\,\}, \\ &\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) = \{\vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{w} = \rho_0^{-1}\nabla\varphi, \quad \varphi = 0(\text{на}\,\Gamma)\}. \end{aligned}$$

Наряду с введенными пространствами, понадобятся еще гильбертово пространство $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ скалярных функций со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = g^2 \int\limits_{\Omega} [\rho_0(x_3) N^2(x_3)]^{-1} \varphi \overline{\psi} d\Omega.$$

и гильбертово пространство $L_2(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$(\zeta, \eta)_0 = \int\limits_{\Gamma} \zeta(\hat{x}) \overline{\eta(\hat{x})} d\Gamma.$$

Как видно из последнего условия (5), функция $\zeta(t, \hat{x})$ принадлежит пространству $H_0 := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$ функций из $L_2(\Gamma)$, которые ортогональны к функциям, тождественно равным единице.

ПЕРЕХОД К ОПЕРАТОРНОМУ УРАВНЕНИЮ

Будем считать, что при каждом t отдельные слагаемые в (3) являются элементами $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$, тогда

$$\begin{aligned} \vec{u}(t,x) &\in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) = \\ &= \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) |\ \mathrm{div}\vec{u} = 0 \ (\text{в}\ \Omega),\ u_n = 0\ (\text{на}\ S)\ \}. \\ \rho_0^{-1}\nabla p(t,x) &\in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) =: \vec{G}(\Omega, \rho_0) = \\ &= \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) |\ \vec{v} = \rho_0^{-1}\nabla p\ (\text{в}\ \Omega),\ \int\limits_\Gamma p\, d\Gamma = 0\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Пусть $P_{0,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ ортопроекторы на $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0)$ соответственно.

$$\begin{gathered} P_{0,S}\vec{u}(t,x) = \vec{u}(t,x), \quad P_{0,S}(\rho_0^{-1}\nabla p) = \rho_0^{-1}\nabla \widetilde{p} \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0), \\ P_{0,\Gamma}(\rho_0^{-1}\nabla p) = \rho_0^{-1}\nabla\varphi \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0). \end{gathered} \tag{9}$$

Применим ортопроекторы $P_{0,\Gamma}$ и $P_{0,S}$ к первому уравнению (3), с учетом (9):

$$\vec{0} = -\rho_0^{-1}\nabla\varphi - P_{0,\Gamma}(\rho_0^{-1} g\rho\vec{e}_3) + P_{0,\Gamma}(\rho_0^{-1}\mu\Delta\vec{u}) + P_{0,\Gamma}\vec{f}(t,x), \tag{10}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\rho_0^{-1}\nabla\widetilde{p} - P_{0,S}(\rho_0^{-1} g\rho\vec{e}_3) + P_{0,S}(\rho_0^{-1}\mu\Delta\vec{u}) + P_{0,S}\vec{f}(t,x). \tag{11}$$

Соотношение (10) показывает, что $\rho_0^{-1}\nabla\varphi(t,x)$ может быть найдено, если известно решение $\rho = \rho(t,x)$. Поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться рассмотрением соотношения (11), а также условий (4) – (6) с соответствующей заменой $p \to \widetilde{p}$, так как $p = \widetilde{p} + \varphi, \quad \varphi = 0 \quad (\text{на}\ \Gamma)$.

Теорема 1. *Классическое решение начально-краевой задачи* (3) – (6) *есть решение задачи Коши для дифференциально операторного уравнения:*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \zeta \\ \rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu A & gG & C \\ -\gamma_n & 0 & 0 \\ -C^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \zeta \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_{0,S} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$(\vec{u}(0), \zeta(0), \rho(0))^t = (\vec{u}^0, \zeta^0, \rho^0)^t, \tag{13}$$

$$(\vec{u},\zeta,\rho)^t \in \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0) \oplus H_0 \oplus \Im_2(\Omega) =: \mathcal{H}$$

и уравнения (10).

Здесь операторы $C^*u := -\nabla\rho_0\vec{u}$, $C\rho := P_{0,S}(\rho_0^{-1}(x_3)g\rho\vec{e}_3)$ взаимно сопряжены и $\|C\| = \|C^*\| \le N_0$; A есть неограниченный самосопряженный, положительно определенный оператор с $\overline{D(A)} = \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)$, при этом A^{-1} — компактный, положительный, действующий в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)$; оператор $G : H_\Gamma^{\frac{1}{2}} \to \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)$ есть линейный ограниченный; γ_n — оператор следа: $\gamma_n\vec{u} := u_n = \vec{u}\cdot\vec{n}|_\Gamma$ $(\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega,\rho_0))$.

Лемма 2. *a) Оператор γ_n может быть расширен до оператора $\tilde{\gamma}_n$ с областью определения $D(\tilde{\gamma}_n) = \{\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0) : \tilde{\gamma}_n\vec{v} \in L_{2,\Gamma}\}$, в этом случае оператор $\tilde{\gamma}_n$ есть оператор, сопряженный к оператору G: $\tilde{\gamma}_n = G^*$. b) Для операторов A и $\tilde{\gamma}_n$ следующие включения имеют место:*

$$D(A) \subset D(A^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega,\rho_0) \subset D(\tilde{\gamma}_n).$$

Определение 1. Функции $\vec{u}(t,x)$, $\zeta(t,\hat{x})$, $\rho(t,x)$ назовем сильным решением задачи (3) — (6), если выполнено (10) и $(\vec{u},\zeta,\rho)$ есть сильное решение задачи Коши (12) в пространстве $\mathcal{H} := \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0) \oplus H_0 \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega)$. Это значит, что для $\forall t \ge 0$ функции $\vec{u} = \vec{u}(t) \in D(A)$, $\zeta = \zeta(t) \in D(G)$, $\rho = \rho(t) \in \mathfrak{L}_2(\Omega)$ и функции $\partial\vec{u}/\partial t$, $\partial\zeta/\partial t$, $\partial\rho/\partial t$, $A\vec{u}(t)$, $G\zeta(t)$, $C\rho(t)$, $G^*\vec{u}$, $C^*\vec{u}$ есть непрерывные по t, кроме того, уравнение (12) и начальное условие (13) выполнены.

Свяжем с задачей (12) оператор-матрицу (с учетом замены $g^{\frac{1}{2}}\zeta \to \zeta$, $g^{\frac{1}{2}}G \to G$, $\mu A \to A$)

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A & G & C \\ -G^* & 0 & 0 \\ -C^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

которая имеет плотную в $\mathcal{H} = \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0) \oplus H_0 \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega)$ область определения

$$D(\mathcal{A}_0) = D(A) \oplus D(G) \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega). \tag{15}$$

Лемма 3. *Оператор $\mathcal{A}_0$ с областью определения* (15) *есть аккретивный оператор, то есть для любых $(\vec{u},\zeta,\rho)^t \in D(\mathcal{A}_0)$ имеет место неравенство $Re(\mathcal{A}_0(\vec{u},\zeta,\rho)^t,(\vec{u},\zeta,\rho)^t)_\mathcal{H} = (A\vec{u},\vec{u}) \ge 0$.*

Отметим, что оператор $\mathcal{A}_0$ не является максимально аккретивным оператором. Представим $(\vec{u},\zeta,\rho)^t = e^{at}(\vec{v},\eta,\sigma)^t$, $a > 0$, и, подставляя в (12), получаем следующую задачу Коши:

$$dy/dt + \mathcal{A}_a y = f(t), \quad y(0) = y^0, \tag{16}$$

$$y(t) = (\vec{v}(t),\eta(t),\sigma(t))^t, \quad f(t) = (\vec{f}_{0,S}(t),0,0)^t e^{-at},$$

$\mathcal{A}_a = \mathcal{A}_0 + a\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ — единичный оператор в $\mathcal{H}$.

Введем операторы: $Q_1 := G^*A_a^{-\frac{1}{2}}$, $Q^+ := A_a^{-\frac{1}{2}}G$.

Лемма 4. *Следующие соотношения имеют место:*

$$Q_1^+ \subset Q_1^*,\ Q_1^+ = Q_1^*|_{D(G)},\ \overline{Q_1^+} = Q_1^*.$$

Теорема 2. *Замыкание* $\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}_a}$ *оператора* $\mathcal{A}_a$ *есть максимально аккретивный оператор. При этом*

$$D(\mathcal{A}) = \{(\vec{v}, \eta, \sigma)^t \in \mathcal{H} : \ \vec{v} \in D(A_a^{\frac{1}{2}}),\ \vec{v} + A_a^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \eta \in D(A_a)\}, \tag{17}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_a^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & Q_1^* & Q_2^* \\ -Q_1 & aI & 0 \\ -Q_2 & 0 & aI \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_a^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где $A_a = A + aI$, $Q_2 := C^* A_a^{-\frac{1}{2}}$.

Доказательство. Можно проверить, что оператор $\mathcal{A}_a$ представим в виде:

$$\mathcal{A}_a = \begin{pmatrix} A_a^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & Q_1^+ & Q_2^* \\ -Q_1 & aI & 0 \\ -Q_2 & 0 & aI \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_a^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Замыкание оператора $\mathcal{A}_a$ состоит в замене в среднем блоке оператора Q_1^+ на Q_1^*. Действительно, оператор $\mathcal{A}$ представим в виде произведения $\mathcal{A} = T_1 T_2 T_1$ (см. (18)) замкнутых операторов. При этом T_1^{-1} – ограничен, так как ограничен оператор $A_a^{-\frac{1}{2}}$, а T_2^{-1} ограничен потому, что

$$T_2^{-1} = \begin{pmatrix} M & -a^{-1} M Q_1^* & -a^{-1} M Q_2^* \\ a^{-1} Q_1 M & a^{-1} - a^{-2} Q_1 M Q_1^* & -a^{-2} Q_1 M Q_2^* \\ a^{-1} Q_2 M & -a^{-2} Q_2 M Q_1^* & a^{-1} - a^{-2} Q_2 M Q_2^* \end{pmatrix}.$$

где Q_i, Q_i^* $(i = 1, 2)$ и $M = (I + a^{-1} Q_1^* Q_1 + a^{-1} Q_2^* Q_2)^{-1}$ ограниченные операторы. Далее непосредственно проверяется, что элементы $y \in D(\mathcal{A})$ определяются условиями (17). □

ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотренные выше свойства оператор-матритрицы $\mathcal{A}$ позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}_0 \in D(A),\ \ \zeta^0 \in H_\Gamma^{\frac{1}{2}},\ \ \rho_0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega),\ \ \vec{f}(t) \in C^1([0,T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)) \tag{19}$$

для задачи Коши (16). *Тогда она имеет единственное сильное решение на промежутке* $[0, T]$.

Доказательство. Наметим доказательство теоремы. Вместо задачи (16) рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{A} = f(t), \quad y(0) = y^0. \tag{20}$$

При этом $y^0 \in D(\mathcal{A}_a) \subset D(\mathcal{A})$, $f(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{H})$.

Так как опертор $\mathcal{A}$ есть максимально аккретивный оператор, то задача (20) имеет единственное решение $y(t)$ на $[0,T]$ (см. [2]). При этом для $y(t)$ (20) выполнено для $\forall t \in [0,T]$, то есть следующие уравнения имеют место:

$$\begin{cases} d\vec{v}/dt + A_a(\vec{v} + A_a^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \eta) + C\sigma = \vec{f}_{0,S}(t)e^{-at}, \quad \vec{v}(0) = \vec{u}^0, \\ d\eta/dt - Q_1 A_a^{\frac{1}{2}} \vec{v} + a\eta = 0, \quad \eta(0) = \zeta^0, \\ d\sigma/dt - Q_2 A_a^{\frac{1}{2}} \vec{v} + a\sigma = 0, \quad \sigma(0) = \rho^0. \end{cases} \tag{21}$$

Возможность раскрыть скобки в первом уравнении (21) (этот факт основывается на приведении выражения, стоящего в скобках, к интегральному уравнению Вольтера второго рода в гильбертовом пространстве) позволяет утверждать, что (16) выполнено для $y(t)$. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Если условия* (19) *выполнены, то задача* (3) — (6) *имеет единственное сильное решение (в смысле определения 1) для* $\forall t \in [0,T]$.

Автор благодарит Н. Д. Копачевского за постановку задачи и полезные дискуссии.

Список литературы

[1] Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.*— М.: Наука, 1989.

[2] С.Г. Крейн *Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах.*— М.: Наука, 1967.