Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2002) 89 - 94

УДК 517.4

А.С. Тихонов

"ИСКРИВЛЕННЫЕ"КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Введение

Различные функциональные исчисления для операторов хорошо известны. Например, если мы ограничимся вполне неунитарными сжатиями T_0, действующими в гильбертовом пространстве H, то функциональное исчисление С.-Надя-Фояша [1] позволяет определить функцию от оператора $\varphi(T_0)$ для произвольной аналитической и ограниченной в единичном круге $\mathbb{D}$ функции φ.

Предположим теперь, что $\mathfrak{A}_0 = \begin{pmatrix} T_0 & N_0 \\ M_0 & L_0 \end{pmatrix} \in [H \oplus \mathfrak{N}_{in}, H \oplus \mathfrak{N}_{out}]$ является простым унитарным узлом [2] (т.е. $\mathfrak{A}_0^*\mathfrak{A}_0 = I$, $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0^* = I$ и оператор T_0 есть вполне неунитарное сжатие). Каждому такому узлу мы можем поставить в соответствие линейную консервативную систему с дискретным временем [3]:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= T_0\, x(n) + N_0\, \varphi_{in}(n) \\ \varphi_{out}(n) &= M_0\, x(n) + L_0\, \varphi_{in}(n) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем расматривать только системы, для которых $\mathfrak{N}_{in} = \mathfrak{N}_{out} = \mathfrak{N}$.

В таком контексте естественно задать вопросы: *Что такое функция от системы? Каков класс допустимых функций?*

В случае дробно-линейных функций $\varphi(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $|a| < 1$ ответ довольно ясен. Функцией от системы $\mathfrak{A}_0$ является система $\mathfrak{A}_a = \begin{pmatrix} T_a & N_a \\ M_a & L_a \end{pmatrix}$, для которой

$$\begin{aligned} T_a &= (T_0 - a)(I - \bar{a}T_0)^{-1}, & N_a &= (1 - |a|^2)^{1/2}(I - \bar{a}T_0)^{-1}N_0, \\ M_a &= (1 - |a|^2)^{1/2}M_0(I - \bar{a}T_0)^{-1}, & L_a &= L_0 + aM_0(I - \bar{a}T_0)^{-1}N_0. \end{aligned}$$

Можно заметить, что $T_a = \varphi(T_0)$, $N_a = (\sqrt{\varphi'})(T_0)N_0$, $M_a = M_0(\sqrt{\varphi'})(T_0)$. В связи с этим мы определим преобразование

$$(T_0,\ M_0,\ N_0) \mapsto (\varphi(T_0),\ M_0(\sqrt{\varphi'})(T_0),\ (\sqrt{\varphi'})(T_0)N_0)$$

и будем называть набор операторов $(\varphi(T_0),\ M_0(\sqrt{\varphi'})(T_0),\ (\sqrt{\varphi'})(T_0)N_0)$ *"искривленной" линейной консервативной системой* (или функцией от укороченной системы $(T_0,\ M_0,\ N_0)$). Наша цель - показать, что такое определение разумно и содержательно. Мы будем рассматривать класс аналитических функций, которые являются конформными отображениями единичного круга на области, ограниченные простыми замкнутыми $C^{2+\varepsilon}$-гладкими кривыми. Для такого класса функций мы покажем, что "искривленные" линейные консервативные системы: 1) возникают естественным образом в вопросах, связанных с функциональными моделями; 2) допускают содержательное определение передаточной функции; 3) имеют нетривиальные приложения в теории возмущений, теории рассеяния и для экстремальных факторизаций оператор-функций.

2. Функциональная модель

Пусть $\mathcal{H}, \mathfrak{N}$ – сепарабельные гильбертовы пространства, $\mathbb{T}$ – единичный круг. Рассмотрим отображения $\pi_\pm \in [L^2(\mathbb{T},\mathfrak{N}),\mathcal{H}]$, удовлетворяющие условиям:

$$(i)\ \ \pi_\pm^*\pi_\pm = I\,; \qquad (ii)_1\ \ z(\pi_-^*\pi_+) = (\pi_-^*\pi_+)z\,;$$
$$(ii)_2\ \ P_-\pi_-^*\pi_+P_+ = 0\,; \qquad (iii)\ \ \operatorname{Ran}\pi_+ \vee \operatorname{Ran}\pi_- = \mathcal{H}\,.$$

Здесь P_+ ортопроектор на пространство Харди $H^2(\mathfrak{N})$ векторнозначных функций, P_- ортопроектор на его ортогональное дополнение $H^2_-(\mathfrak{N}) = L^2(\mathbb{T},\mathfrak{N})\ominus H^2(\mathfrak{N})$ (как обычно, мы отождествляем функции из $H^2(\mathfrak{N})$ и $H^2_-(\mathfrak{N})$ с их граничными значениями изнутри и извне единичной окружности). В пространстве $\mathcal{H}$ мы определим модельное подпространство

$$\mathcal{K}_\Theta = \{\, f\in\mathcal{H} : P_+\pi_+^*f = 0,\ P_-\pi_-^*f = 0\,\}$$

и операторы $\widehat{T}\in[\mathcal{K}_\Theta]$, $\widehat{M}\in[\mathcal{K}_\Theta,\mathfrak{N}]$, $\widehat{N}\in[\mathfrak{N},\mathcal{K}_\Theta]$, где для $f\in\mathcal{K}_\Theta$, $n\in\mathfrak{N}$

$$\widehat{T}f = Uf - \pi_+\widehat{M}f,\quad \widehat{M}f = (\pi_+^*Uf)(\infty),\quad \widehat{N}n = (I-\pi_+P_+\pi_+^*)\pi_-n,$$

Здесь U унитарный оператор, однозначно задаваемый соотношениями $U\pi_\pm = \pi_\pm z$. Приведенная выше конструкция есть функциональная модель С.-Надя-Фояша [1] для унитарных узлов [2] в бескоординатной форме [4]. Как легко проверить, $\begin{pmatrix}\widehat{T} & \widehat{N}\\ \widehat{M} & (\pi_+^*\pi_-)(0)\end{pmatrix}$ – простой унитарный узел. Обратно, для любого простого унитарного узла существует модель, указанного выше вида.

Конструкция функциональной модели С.-Надя-Фояша легко может быть распространена на случай $C^{2+\varepsilon}$-гладкой простой замкнутой кривой C. Мы снова будем использовать отображения $\pi_\pm \in [L^2(C,\mathfrak{N}),\mathcal{H}]$, удовлетворяющие условиям (i), (ii), (iii). Однако теперь мы предполагаем, что $P_\pm$ – (неортогональные) проекторы на пространства Харди-Смирнова $E^2(G_\pm,\mathfrak{N})$, где $G_+ = \operatorname{Int}C$, $G_- = \operatorname{Ext}C$. Сразу же возникает задача: дать описание для всех наборов операторов вида $(\widehat{T},\ \widehat{M},\ \widehat{N})$. Решающим для этого вопроса является следующее наблюдение:

Если $\varphi\in CM(G_{1+},G_{2+})$ (т.е. φ – конформное отображение G_{1+} на G_{2+}) и $\pi_{2\pm} = \pi_{1\pm}C_\varphi$, то

$$\widehat{T}_2 = Z\varphi(\widehat{T}_1)Z^{-1},\quad \widehat{M}_2 = \widehat{M}_1(\sqrt{\varphi'})(\widehat{T}_1)Z^{-1},\quad \widehat{N}_2 = Z(\sqrt{\varphi'})(\widehat{T}_1)\widehat{N}_1,$$

где $C_\varphi f = \sqrt{\varphi'}\,(f\circ\varphi)$, $Z = (I-\pi_{2+}P_{2+}\pi_{2+}^*)(I-\pi_{2-}P_{2-}\pi_{2-}^*)|\mathcal{K}_{1\Theta}$, .

Таким образом, наряду с функциональными моделями (т.е. парами вида (π_+,π_-)), мы можем рассматривать их преобразования $\pi_{2\pm} = \pi_{1\pm}C_\varphi$. Тогда вполне естественно использовать язык теории категорий. Введем категорию Mod, объектами которой являются пары $\Pi = (\pi_+, \pi_-)$, а морфизмы $\pi_{2\pm} = \pi_{1\pm} C_\varphi$ определяются конформными отображениями $\varphi \in CM(G_{1+}, G_{2+})$. Мы будем обозначать эти морфизмы символом m_φ. Указанное выше наблюдение реализуется в следующей теореме.

Теорема 1. *Преобразование* $\Pi \mapsto (\widehat{T}, \widehat{M}, \widehat{N})$ *определяет ковариантный функтор* $\mathcal{F}_{ms}$ *из категории* Mod *в категорию* Sys.

Обьектами в категории Sys являются "искривленные" консервативные системы:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(Sys) \; = \; & \{ (T, M, N) : \exists \varphi \in CM(\mathbb{D}, G_+), \exists Z \in [H_0, H], \; Z^{-1} \in [H, H_0], \\ & \exists \; \mathfrak{A}_0 = \begin{pmatrix} T_0 & N_0 \\ M_0 & L_0 \end{pmatrix} \in [H_0 \oplus \mathfrak{N}], \; T_0 \; c.n.u., \; \mathfrak{A}_0^* \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_0^* = I, \\ & T = Z\varphi(T_0) Z^{-1}, \; M = M_0 \sqrt{\varphi'}(T_0) Z^{-1}, \; N = Z\sqrt{\varphi'}(T_0) N_0 \} \end{aligned}$$

(здесь c.n.u. = вполне неунитарный). Мы будем говорить, что $s_{\varphi,z}$ есть морфизм в категории Sys и записывать $s_{\varphi,z} \in \mathrm{Mor}(\alpha_1, \alpha_2)$, если

$$T_2 = Z\varphi(T_1)Z^{-1}, \quad M_2 = M_1(\sqrt{\varphi'})(T_1)Z^{-1}, \quad N_2 = Z(\sqrt{\varphi'})(T_1)N_1,$$

где $\alpha_1 = (T_1, M_1, N_1)$, $\alpha_2 = (T_2, M_2, N_2)$, $\varphi \in CM(G_{1+}, G_{2+})$.

Мы используем язык теории категорий с целью более компактных формулировок. Одно утверждение для категорий есть набор нескольких элементарных утверждений. Некоторые из них - простые технические упражнения. Например, чтобы установить, что Mod и Sys есть категории, мы должны проверить, что композиция морфизмов опять является морфизмом, т.е. $m_{\varphi_{32}} \circ m_{\varphi_{21}} = m_{\varphi_{31}}$, $s_{\varphi_{32}, z_{32}} \circ s_{\varphi_{21}, z_{21}} = s_{\varphi_{31}, z_{31}}$, где $\varphi_{21} \in CM(G_{1+}, G_{2+})$, $\varphi_{32} \in CM(G_{2+}, G_{3+})$, $\varphi_{31} = \varphi_{32} \circ \varphi_{21}$, $Z_{31} = Z_{32} Z_{21}$. Другие же, напротив, составляют суть ("серцевину") проблемы. В нашем случае таковыми являются утверждение $\mathcal{F}_{ms}(m_{32} \circ m_{21}) = \mathcal{F}_{ms}(m_{32}) \circ \mathcal{F}_{ms}(m_{21})$ и упомянутое выше наблюдение.

Используя преобразования (морфизмы), мы можем свести проблему к случаю единичной окружности. Следующая теорема, вместе с Теоремой 1, дают полный ответ на поставленный вопрос (дать описание $\mathcal{F}_{ms}(\mathrm{Ob}(Mod))$).

Теорема 2. $\forall \, (T, M, N) \in \mathrm{Ob}(Sys) \;\; \exists \, \Pi \in \mathrm{Ob}(Mod) \;\; \exists \, Z \in [H, \mathcal{K}_\Theta]$: $Z^{-1} \in [\mathcal{K}_\Theta, H]$, $ZT = \hat{T} Z$, $M = \hat{M} Z$, $ZN = \hat{N}$, *где* $(\hat{T}, \hat{M}, \hat{N}) = \mathcal{F}_{ms}(\Pi)$.

Это означает, что для любой простой "искривленной" консервативной системы существует линейно подобная функциональная модель.

3. Передаточные функции

Пусть $\alpha = (T, M, N) \in \mathrm{Ob}(Sys)$. Для таких систем мы определим передаточную функцию

$$\Upsilon(z) = M(T - z)^{-1} N, \qquad z \in \rho(T).$$

Как будет показано ниже, для достаточно широкого класса "искривленных" систем укороченная передаточная функция $\Upsilon(z)$ несет такой же объем инфрмации о системе α, что и обычная передаточная функция $W(z) = L_0 + zM_0(I - zT_0)^{-1} N_0$, $1/z \in \rho(T_0)$ о системе $\mathfrak{A}_0$. Нас будет интересовать следующая подкатегория Sys_1:

$$\mathrm{Ob}(Sys_1) = \{ (T, M, N) \in \mathrm{Ob}(Sys) : M, N \in \mathfrak{S}_2, \; \rho(T) \cap G_+ \neq \emptyset \},$$

где $\mathfrak{S}_2$ – класс операторов Гильберта-Шмидта. Передаточные функции для систем класса Sys_1 обладают граничными значениями $\Upsilon_{\pm}(z)$ для п.в. точек на кривой C изнутри и извне соответственно. Нашей следующей задачей является описание класса передаточных функций для таких систем. Ключевую роль при этом играет следующее утверждение:

Пусть $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathrm{Ob}(Sys_1)$, $s_{\varphi,z} \in \mathrm{Mor}(\alpha_1,\ \alpha_2)$. Тогда для п.в. $z \in C_2$

$$(\Upsilon_{2+} - \Upsilon_{2-})(z) = ((\Upsilon_{1+} - \Upsilon_{1-}) \circ \varphi^{-1})(z), \quad \Upsilon_{2-}(z) = (P_{2-}(\Upsilon_{1-} \circ \varphi^{-1}))(z).$$

Остановимся подробнее на случае, когда $G_+ = \mathbb{D}$. Здесь укороченная передаточная функция может быть легко выражена через обычную: $\Upsilon(1/z) = W(0) - W(z)$. Будем обозначать соответствующее отображение через $\Psi : \Upsilon \mapsto W$. Обратно, оператор $L_0 = W(0)$ может быть выражен (с точностью до несущественной изометрической части) через укороченную передаточную функцию: $L_0 = \Upsilon(0)(\,I - (L_0^* L_0)^{-1})^{-1}$, где $L_0^* L_0 = \psi(\Upsilon(0)^*\Upsilon(0))$, $\psi(z) = (1/2)\,(2+z-\sqrt{z^2+4z})$. Следовательно, мы можем рассматривать обратное преобразование $W = \Psi^{-1}(\Upsilon)$. Определим теперь преобразование $\Upsilon_2 = \Phi(\Upsilon_1, \varphi)$ согласно формулам:

$$\Upsilon_{2-} = P_{2-}\Upsilon_{1-} \circ \varphi^{-1}, \qquad \Upsilon_{2+} = \Upsilon_{2-} + (\Upsilon_{1+} - \Upsilon_{1-}) \circ \varphi^{-1},$$

где $\varphi \in CM(G_{1+}, G_{2+})$. В связи с этим, нам хотелось бы отметить, что отображение $\Upsilon_{1-} \mapsto P_{2-}\Upsilon_{1-} \circ \varphi^{-1}$ является аналогом хорошо известного в комплексном анализе преобразования Фабера.

Теперь мы в состоянии определить (формально независимо от категории Sys_1) категорию всех укороченных передаточных функций Tfn_1:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ob}(Tfn_1) = \{\, \Upsilon : \exists\, \varphi \in CM(\mathbb{D}, G_+) : \ \ \Psi^{-1}(\Phi(\Upsilon, \varphi^{-1})) \in S_1(\mathbb{D}, [\mathfrak{N}])\,\}, \\ &t_\varphi \in \mathrm{Mor}(\Upsilon_1, \Upsilon_2) \quad if \quad \Upsilon_2 = \Phi(\Upsilon_1, \varphi), \quad \varphi \in CM(G_{1+}, G_{2+}), \end{aligned}$$

где $S_1(\mathbb{D}, [\mathfrak{N}])$ – класс всех аналитических в $\mathbb{D}$ сжимающих оператор-функций $W(z)$, таких что $\exists\ W(0)^{-1}$ и $I - W(0)^*W(0) \in \mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_1$ – класс ядерных операторов.

Определим также ковариантный функтор $\mathcal{F}_{st}$, действующий из категории Sys_1 в категорию Tfn_1:

$$\mathcal{F}_{st}(T,\ M,\ N) = M(T-z)^{-1}N, \qquad \mathcal{F}_{st}(s_{\varphi,z}) = t_\varphi.$$

Теорема 3. *1) Sys_1 и Tfn_1 являются категориями; 2) $\mathcal{F}_{st}$ – ковариантный функтор; 3) $\mathcal{F}_{st}(\mathrm{Ob}(Sys_1)) = \mathrm{Ob}(Tfn_1)$.*

Отметим, что одним из следствий этой теоремы является тот факт, что укороченная передаточная функция $\Upsilon(z)$ определяет простую "искривленную" консервативную систему $(T,\ M,\ N)$ с точностью до подобия.

4. Приложения к теории возмущений

В основе приложений к теории возмушений лежит следующий интересный факт [5]:

Пусть заданы нормальный оператор U (т.е., $U^*U = UU^*$), простая заскнутая $C^{1+\varepsilon}$-гладкая кривая C, $\sigma(U) \subset C$, $S - U \in \mathfrak{S}_1$, $\rho(S) \cap G_+ \neq \emptyset$. Тогда существуют (обобщенная) функциональная модель $\Pi = (\pi_+, \pi_-)$ и операторы $Z \in [H, \mathcal{K}_\Theta]$, $\varkappa \in [\mathfrak{N}]$, такие что $S = Z^{-1}(\widehat{T} + \widehat{N}\varkappa\widehat{M})Z$, где $\widehat{M}$, $\widehat{N} \in \mathfrak{S}_2$ и $(\widehat{T}, \widehat{M}, \widehat{N}) = \mathcal{F}_{ms}(\Pi)$.

Это позволяет распространить на случай ядерных возмущений нормальных операторов функциональную модель С.-Надя-Фояша-Набоко и установить теорему о двойственности спектральных компонент. Мы приведем здесь следующий результат (подробности см. в [5]):

Теорема 4. *Пусть* $(T, M, N) \in \mathrm{Ob}(Sys)$, $M, N \in \mathfrak{S}_2$, $\varkappa \in [\mathfrak{N}]$, $S = T + N\varkappa M$. *Тогда*

1) $\mathrm{clos}\,(\widetilde{N}_+(S, M) \bigcap \widetilde{N}_-(S, M)) \oplus M(S^*, N^*) = H$;
2) $D_\pm(S, M) \oplus \mathrm{clos}\,(\widetilde{N}_\mp(S^*, N^*) \bigcap M(S^*, N^*)) = H$;
3) $N_\pm(S, M) \oplus \mathrm{clos}\,(\widetilde{D}_\mp(S^*, N^*) \bigcap M(S^*, N^*)) = H$.

Здесь $M(S, M)$, $N_\pm(S, M)$, $D_\pm(S, M)$ – спектральные компоненты для оператора S:

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}(S, M) &= \{ f \in H : \gamma_+(f) = \gamma_-(f) \}, & M(S, M) &= \mathrm{clos}\,\widetilde{M}(S, M);\\
\widetilde{N}_\pm(S, M) &= \{ f \in H : \gamma_\pm(f) \in E^2(G_\pm, \mathfrak{N})\}, & N_\pm(S, M) &= \mathrm{clos}\,\widetilde{N}_\pm(S, M);\\
\widetilde{D}_\pm(S, M) &= \{ f \in H : \gamma_\pm(f) \in D^2(G_\pm, \mathfrak{N})\}, & D_\pm(S, M) &= \mathrm{clos}\,\widetilde{D}_\pm(S, M),
\end{aligned}$$

где $\gamma_\pm(f)(z)$, $z \in C$ угловые граничные значения для $M(S - z)^{-1}f$ из $G_\pm$, $D^2(G, \mathfrak{N}) = \{ u : u(z) = (1/\delta(z))g(z),\ g \in E^2(G, \mathfrak{N}),\ \delta$ - внешняя $\}$.

Двойственность спектральных компонент играет существенную роль в несамосопряженной теории рассеяния [6, 7] и для экстремальных (J-внешне-внутреняя, A-регулярно-сингулярная и др. [8, 9, 10, 11]) факторизаций J-сжимающих оператор-функций. Эти приложения были главным стимулом для автора, чтобы разрабатывать представленное выше понятие "искривленной" консервативной системы.

Список литературы

[1] B.Szökefalvi-Nagy, C.Foiaş, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*. North-Holland, Amsterdam-London, 1970.

[2] М.С. Бродский, *Унитарные операторные узлы и их характеристические функции*. Успехи Матем.Наук. 33 (1978), no.4, 141-168.

[3] M.A. Arbib, P.L. Falb, R.E. Kalman, *Topics in Mathematical System Theory*, McGraw-Hill, New York, 1969.

[4] N.K. Nikolski, V.I. Vasyunin, *Elements of spectral theory in terms of the free functional model. Part I: Basic constructions*, Holomorphic spaces, Sh.Axler, J.McCarthy, D.Sarason eds., MSRI Publications 33, 1998, 211-302.

[5] А.С. Тихонов, *Функциональная модель и двойственность спектральных компонент для операторов с непрерывным спектром на кривой*, Алгебра и анализ, 14 (2002), no.4, 158-195; English transl. in St.Petersburg Math.J., 14 (2003), no.4.

[6] С.Н. Набоко, *Функциональная модель в теории возмущений и ее приложения к теории рассеяния*, Труды матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 147 (1980), 84-114; English transl. in Proc.Steklov Inst.Math., 1981, no.2

[7] А.С. Тихонов, *Абсолютно непрерывный спектр и теория рассеяния для операторов со спектром на кривой*, Алгебра и анализ, 7 (1995), no.1, 200-220; English transl. in St.Petersburg Math.J., 7 (1996), no.1, 169-184.

[8] A.S. Tikhonov, *Extreme factorizations of transfer functions for conservative transmission linear systems*, Proceedings CD of MTNS Symposium, Perpignan, 2000.

[9] A.S.Tikhonov, *Inner-outer factorization of J-contractive-valued functions*. Operator Theory: Adv. and Appl., 118 (2000), 405-415.

[10] D.Z. Arov, *Three problems about J-inner matrix functions*, Lect. Notes in Math., 1043 (1984), 164-168.

[11] D.Z. Arov, H. Dym, *J-inner matrix functions, interpolation and invers problems for canonical systems, I*, IEOT, 29 (1997), 373-454.