Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2002) 82 – 88

УДК 517.98

П.А. Старков

СЛУЧАЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ

1. Случай общего положения для спектрального параметра μ.

В произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ рассмотрим задачу на собственные значени

$$L(\mu)u := (I + \lambda A - \mu B)u = 0, \tag{1}$$

где I – единичный оператор, а операторы A и B обладают следующими свойствами

$$0 < A \in \mathfrak{S}_\infty, \qquad 0 \leq B \in \mathfrak{S}_\infty, \tag{2}$$

$$\dim\ker B = \infty, \qquad \dim\overline{\mathcal{R}(B)} = \infty. \tag{3}$$

В пучке $L(\mu)$ число $\mu \in \mathbb{C}$ играет роль спектрального параметра, а число $\lambda \in \mathbb{C}$ – постоянный параметр задачи.

Очевидно, $L(\mu)$ линейно зависит как от спектрального параметра μ, так и фиксированного параметра λ.

Рассмотрим случай общего положения, когда

$$\operatorname{Im}\lambda \neq 0. \tag{4}$$

Лемма 1. *При выполнении условия* (4) *оператор $I + \lambda A$ имеет ограниченный обратный, причём*

$$(I + \lambda A)^{-1} = I + T(\lambda),$$

где $T(\lambda)$ принимает компактные значения. Если оператор A принадлежит классу компактных операторов $\mathfrak{S}_p$, то $T(\lambda)$ принадлежит тому же классу $\mathfrak{S}_p$.

Доказательство. Докажем сначала, что оператор $I + \lambda A$ имеет обратный оператор. В самом деле, если $(I + \lambda A)u = 0$, то

$$0 = ((I + \lambda A)u, u) = \|u\|^2 + \operatorname{Re}\lambda\|A^{1/2}u\|^2 + i\operatorname{Im}\lambda\|A^{1/2}u\|^2,$$

откуда следует, что

$$\operatorname{Im}\lambda\|A^{1/2}u\|^2 = 0.$$

Так как выполнено условие $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ и $A > 0$, отсюда получаем, что $u = 0$.

Так как $A \in \mathfrak{S}_\infty$, то по теореме Фредгольма $(I+\lambda A)^{-1} = I+T(\lambda)$, где $T(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty$. Докажем, что $T(\lambda)$ принадлежит тому же классу $\mathfrak{S}_p$, что и оператор A. В самом деле, из тождества

$$(I + \lambda A)(I + T(\lambda)) = I.$$

имеем

$$T(\lambda) = -\lambda A(I + T(\lambda))$$

и потому $T(\lambda) \in \mathfrak{S}_p$, если $A \in \mathfrak{S}_p$. □

Лемма 2. *Задача* (1) *имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных изолированных собственных значений* $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *с возможной предельной точкой на бесконечности. Собственные элементы, отвечающие этим собственным значениям, имеют конечные кратности. Резольвента* $L^{-1}(\mu)$ *является мероморфной во всей комплексной плоскости оператор-функцией, имеющей полюса в точках, совпадающих с собственными значениями. Кратность полюса совпадает с максимальной кратностью собственных элементов, отвечающих собственному значению.*

Доказательство. Пучок $L(\mu)$ представляет собой так называемую фредгольмову голоморфную оператор-функцию, т. е. имеющую вид $I + \Phi(\mu)$, где $\Phi(\mu)$ голоморфна и принимает компактные значения. В рассматриваемом случае $\Phi(\mu) = \lambda A - \mu B$, причём $\Phi(\mu)$ голоморфна во всей комплексной плоскости, за исключением бесконечно удалённой точки. Кроме того, при $\mu = 0$ имеем $I + \Phi(0) = I + \lambda A$, и согласно лемме 1 этот оператор имеет ограниченный обратный.

Поэтому для $L(\mu)$ справедливы утверждения теоремы 1.5.1 из [2], см. также [5], сс. 74-75, т. е. сформулированные выше утверждения. □

Лемма 3. *Для собственных зачений* μ *задачи* (1) *выполнено свойство*

$$\operatorname{sign}(\operatorname{Im}\mu) = \operatorname{sign}(\operatorname{Im}\lambda) \neq 0$$

Доказательство. Если для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ задача (1) имеет решение $u \neq 0$, отвечающее собственному значению μ, то имеет место равенство

$$\|u\|^2 + \lambda\|A^{1/2}u\|^2 - \mu\|B^{1/2}u\|^2 = 0.$$

Вычисляя мнимую часть слева, имеем

$$\operatorname{Im}\lambda\|A^{1/2}u\|^2 = \operatorname{Im}\mu\|B^{1/2}u\|^2. \tag{5}$$

В этом соотношении для решения $u \neq 0$ обязательно выполнено свойство

$$B^{1/2}u \neq 0. \tag{6}$$

В самом деле, если $B^{1/2}u = 0$, то $Bu = 0$, и из (1) получаем уравнение

$$(I + \lambda A)u = 0. \tag{7}$$

Однако при выполнении условия (4) оператор $I+\lambda A$ имеет ограниченный обратный, и потому из (7) следует, что $u = 0$.

Пользуясь свойством (6), из (5) получаем

$$\operatorname{Im}\mu = \operatorname{Im}\lambda\frac{\|A^{1/2}u\|^2}{\|B^{1/2}u\|^2}.$$

Так как при $u \neq 0$ всегда $\|A^{1/2}u\|^2 > 0$, то получаем утверждение леммы.□

В операторном пучке $L(\mu)$ из (1) оператор B не является полным, т. е. $\ker B \neq \{0\}$. Поэтому непосредственно к задаче (1) нельзя применять известные теоремы М. В. Келдыша о полноте системы собственных и присоединённых элементов этой задачи, а также соответствующие результаты об асимптотическом поведении ветви собственных значений.

Чтобы воспользоваться теоремами М. В. Келдыша применительно к задаче (1), введём ортогональное разложение

$$H = H_0 \oplus H_1, \quad H_0 := \ker B, \quad H_1 = H \ominus H_0 = \overline{\mathcal{R}(B)} \tag{8}$$

Согласно свойствам оператора B,

$$\dim H_0 = \infty, \qquad \dim H_1 = \infty.$$

Пусть P_0 и P_1 – взаимно дополнительные ортопроекторы, отвечающие разложению (8), т. е.

$$P_0 + P_1 = I, \qquad P_0P_1 = P_1P_0 = 0.$$

Разыскивая решение задачи (1) в виде

$$u = u_0 + u_1, \qquad u_0 = P_0u = P_0u_0, \; u_1 = P_1u = P_1u_1,$$

и применяя к обеим частям (1) ортопроекторы P_0 и P_1, получим взамен (1) равносильную систему уравнений

$$\left.\begin{array}{rcl} (I_0 + \lambda P_0AP_0)u_0 + \lambda P_0AP_1u_1 & = & 0, \\ \lambda P_1AP_0u_0 + (I_1 + \lambda P_1AP_1)u_1 - \mu B_1u_1 & = & 0, \end{array}\right\} \tag{9}$$

где $I_0 = P_0$ и $I_1 = P_1$ – единичные операторы в H_0 и H_1 соответственно, а B_1 – сужение оператора B на подпространство H_1. При выводе уравнений (9) были использованы соотношения

$$P_0BP_1 = 0, \qquad BP_0 = 0,$$

следующие из определений подпространств H_0 и H_1. Отметим ещё, что оператор B_1 теперь является полным оператором в H_1, т. е.

$$\ker B_1 = \{0\}.$$

Как сейчас будет установлено, в системе уравнений (9) можно исключить неизвестную u_0 и получить уравнение для неизвестной u_1 в форме, к которой применимы теоремы М. В. Келдыша.

Лемма 4. *Если выполнено условие* $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, *то оператор* $F_0(\lambda) := I_0 + \lambda P_0AP_0$ *имеет ограниченный обратный оператор*

$$F_0^{-1}(\lambda) = (I_0 + \lambda P_0AP_0)^{-1} = I_0 + T_0(\lambda), \qquad T_0(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty.$$

Оператор

$$F_1(\lambda) := I_1 + \lambda P_1AP_1 - \lambda^2 P_1AP_0(I_0 + \lambda P_0AP_0)P_0AP_1$$

также имеет ограниченный обратный оператор.

$$F_1(\lambda) = I_1 + T_1(\lambda), \quad T_1(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty.$$

Доказательство. Сначала докажем существование ограниченного обратного оператора $(I_0 + \lambda P_0AP_0)^{-1}$ при условии $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Оно в точности повторяет доказательство леммы 1, если учесть, что оператор P_0AP_0 положителен в H_0 в силу того, что A положителен в H.

Далее, так как по лемме 1 оператор $I+\lambda A$ имеет ограниченный обратный, то задача $(I+\lambda A)u=0$ или равносильная ей задача

$$\begin{aligned}(I_0+\lambda P_0AP_0)u_0+\lambda P_0AP_1u_1 &= 0,\\ \lambda P_1AP_0u_0+(I_1+\lambda P_1AP_1)u_1 &= 0,\end{aligned} \tag{10}$$

должна иметь лишь тривиальное решение. Находя из первого уравнения

$$u_0=\lambda F_0^{-1}(\lambda)P_0AP_0u_1$$

и подставляя его во второе, переходим к уравнению

$$F_1(\lambda)u_1=0.$$

Это уравнение должно иметь лишь тривиальное решение, из чего следует, что оператор $F_1(\lambda)$ обратим. Тогда так же, как в лемме 1, устанавливается, что оператор F_1^{-1} ограничен и имеет структуру как в формулировке леммы, поскольку оператор $A\in\mathfrak{S}_\infty$. □

Учитывая доказанную лемму, исключим в системе уравнений (9) неизвестную u_0; приходим к уравнению

$$(F_1(\lambda)-\mu B_1)u_1=0,\qquad u_1\in H_1. \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть в задаче* (11) *выполнено условие*

$$B_1\in\mathfrak{S}_p.$$

Тогда задача (11) *имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений* $\{\mu_k(\lambda)\}_{k=1}^\infty$ *с единственной предельной точкой на бесконечности. Сколь бы мало ни было* $\varepsilon>0$, *все собственные значения* $\mu_k(\lambda)$ *задачи* (11), *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в угле*

$$\Lambda_\varepsilon(\lambda):=\{\mu\in\mathbb{C}:|\arg\mu|<\varepsilon,\ \operatorname{sign}\operatorname{Im}\mu=\operatorname{sign}\operatorname{Im}\lambda\}.$$

Система собственных и присоединённых элементов $\{\mu_k(\lambda)\}_{k=1}^\infty$ *задачи* (11), *является полной в* H_1.

Доказательство. Так как согласно лемме 4 оператор $F_1(\lambda)$ имеет ограниченный обратный, то задача (11) равносильна задаче

$$(I_1+T_1(\lambda))B_1u_1=\nu u_1,\qquad \nu=\mu^{-1}, \tag{12}$$

т. е. задаче на собственные значения для слабовозмущённого самосопряжённого оператора

$$(I_1+T_1(\lambda))B_1,\quad T_1(\lambda)\in\mathfrak{S}_\infty,\quad B_1=B_1^*\in\mathfrak{S}_p,\quad \ker B_1=\{0\}.$$

Поэтому для задачи (12) выполнены все условия теоремы М. В. Келдыша ([2] теор. 5.8.1, сс. 314-317), а потому имеют место и сформулированные выше утверждения. □

Теорема 2. *Пусть для оператора* $B_1\in\mathfrak{S}_\infty$ *задачи* (11) *выполнено условие*

$$\lambda_k(B_1)=c_B^\beta k^{-\beta}(1+o(1)),\quad c_B>0,\ \beta>0,\ k\to\infty. \tag{13}$$

Тогда собственные значения $\mu_k(\lambda)$ *этой задачи имеют асимптотическое поведение*

$$\mu_k(\lambda)=\lambda_k^{-1}(B_1)(1+o(1))\quad(k\to\infty). \tag{14}$$

Доказательство. Утверждение данной теоремы непосредственно следует из теоремы М. В. Келдыша, сформулированной в форме теоремы 5.11.1 в ([2], сс. 343-346), а также из следующих за её доказательством замечаний на с. 345.

В самом деле, усли выполнено условие (13), то для функции распределения $N(r; B_1)$ характеристических чисел оператора B_1, т. е. собственных значений невозмущённой задачи (11), когда $T_1(\lambda) = 0$, выполнено условие

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r; B_1)}{r^{1/\beta}} = const > 0.$$

Поэтому выполнены условия упомянутой выше теоремы 5.11.1, а следствием её утверждения является формула

$$\mu_k(\lambda) = \lambda_k^{-1}(B_1)(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).\square$$

Итогом рассмотрения спектральной задачи (1) при условии $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ является следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть в задаче* (1) *выполнены условия* $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ *и условие* $B \in \mathfrak{S}_p$, $0 < p < \infty$. *Тогда задача* (1) *имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений* $\{\mu_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$ *с единственной предельной точкой на бесконечности. Сколь бы мало ни было* $\varepsilon > 0$, *все собственные значения* $\mu_k(\lambda)$, *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в угле*

$$\Lambda_\varepsilon(\lambda) := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg\mu| < \varepsilon,\ \operatorname{sign}\operatorname{Im}\mu = \operatorname{sign}\operatorname{Im}\lambda\}.$$

Система собственных и присоединённых элементов $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, *отвечающая собственным значениям* $\{\mu_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$ *задачи* (1), *после их проектирования на подпространство* $H_1 = \overline{\mathcal{R}(B)}$, *т. е. система элементов* $\{P_1u_k\}_{k=1}^{\infty}$, *является полной в подпространстве* H_1.

Если выполнено асимптотическое условие

$$\lambda_k(B) = c_B^{\beta}k^{-\beta}(1 + o(1)), \quad c_B > 0,\ \beta > 0,\ k \to \infty, \tag{15}$$

для ненулевых собственных значений оператора B, *то для собственных значений* $\mu_k(\lambda)$ *задачи* (1) *справедлива асимптотическая формула*

$$\mu_k(\lambda) = \lambda_k^{-1}(B_1)(1 + o(1)), \quad (k \to \infty).$$

Доказательство этой теоремы основано на теоремах 1 и 2. Если оператор $B \in \mathfrak{S}_p$, то $B_1 = P_1BP_1 \in \mathfrak{S}_p$ и потому справедливы выводы теоремы 1 по отношению к задаче (11), а потому по отношению к задаче (1): их спектры совпадают, а собственные элементы связаны соотношениями

$$u_k = u_{1k} + u_{0k}, \quad u_{0k} = \lambda_k F_0^{-1}(\lambda_k)P_0AP_1u_{1k},\ k = 1, 2, \dots .$$

Условие (15) совпадает с условием (14), так как ненулевые собственные значения оператора B совпадают с собственными значениями оператора B_1. Отсюда и из теоремы 2 следует последнее утверждение данной теоремы. $\square$

Замечание 1. Для справедливости теоремы 3 кроме условия (4) достаточно потребовать лишь выполнение условия (15). В самом деле, из этого условия следует, что s-числа оператора B, совпадающие с его ненулевыми собственными значениями, суммируются со степенью $p > 1/\beta$, т. е. $B \in \mathfrak{S}_p$ при этих значениях p.

2. Случай общего положения для спектрального параметра λ.

Рассмотрим теперь задачу (1), считая, что $\mu \in \mathbb{C}$ – фиксированный параметр, а $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр. При этом по-прежнему предполагаем, что A и B обладают свойствами (2) и (3).

Итак, изучается задача

$$M(\lambda)u := (I - \mu B + \lambda A)u = 0, \qquad u \in H, \tag{16}$$

в случае общего положения

$$\operatorname{Im} \mu \neq 0. \tag{17}$$

Решения задачи (16), (17) обладают многими свойствами решений задачи (1)–(4), причём новая задача исследуется проще, чем в предыдущем параграфе, поскольку в данном случае $A > 0$ и потому $\ker A = \{0\}$. Последовательно повторяя схему предыдущего пункта, приходим к следующим свойствам решений задачи (16), (17).

Лемма 5. *При выполнении условия* (17) *оператор* $I - \mu B$ *имеет ограниченный обратный, причём*

$$(I - \mu B)^{-1} = I + G(\mu),$$

где $G(\mu)$ *принимает компактные значения. Если оператор* B *принадлежит классу* $\mathfrak{S}_p$, *то* $G(\mu)$ *также принадлежит этому классу.*

Доказательство проведём лишь для первого утверждения леммы, так как дальнейшая схема повторяет доказательство леммы 1.

Рассмотрим уравнение $(I - \mu B)u = 0$. Учитывая ортогональное разложение (8), получим для $u = u_1 + u_0$ аналогично выводу системы уравнений (9) соотношения

$$u_0 = 0, \qquad u_1 - \mu B_1 u_1 = 0. \tag{18}$$

Отсюда, как и в лемме 1, получаем

$$0 = ((I_1 - \mu B_1)u_1, u_1) = \|u_1\|^2 - \operatorname{Re}\mu \|B_1^{1/2} u_1\|^2 - i \operatorname{Im}\mu \|B_1^{1/2} u_1\|^2,$$

$$\operatorname{Im}\mu \|B_1^{1/2} u_1\|^2 = 0.$$

Так как теперь $\ker B_1 = \{0\}$ в H_1 и $\operatorname{Im}\mu \neq 0$, то $u_1 = 0$, и лемма доказана.□

Лемма 6. *Для задачи* (16) *имеют место утверждения лемм 2 и 3, причём конечнократные изолированные собственные значения* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *могут иметь в качестве предельной лишь точку* $\lambda = \infty$. *Для решений задачи* (16) *выполнено свойство* $\operatorname{sign}(\operatorname{Im}\mu) = \operatorname{sign}(\operatorname{Im}\lambda) \neq 0$.

Теорема 4. *Пусть в задаче* (16) *выполнено условие*

$$A \in \mathfrak{S}_p \tag{19}$$

Тогда эта задача имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений $\{\lambda_k(\mu)\}_{k=1}^{\infty}$ *с единственной предельной точкой* $\lambda = \infty$. *Сколь бы мало ни было* $\varepsilon > 0$, *все собственные значения* $\lambda_k(\mu)$, *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в угле*

$$\Lambda_\varepsilon(\mu) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \pi)| < \varepsilon,\ \operatorname{sign}\operatorname{Im}\mu = \operatorname{sign}\operatorname{Im}\lambda\}. \tag{20}$$

Система собственных и присоединённых элементов $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, *отвечающая собственным значениям* $\{\lambda_k(\mu)\}_{k=1}^{\infty}$ *задачи* (16), *является полной в пространстве* H.

Доказательство этой теоремы повторяет схему доказательства аналогичного утверждения в теореме 1 для уравнения (9).

Так как оператор $I-\mu B$ имеет ограниченный обратный $(I-\mu B)^{-1}=I+G(\mu)$, $G(\mu)\in\mathfrak{S}_\infty$, то задача (16) равносильна спектральной задаче

$$(I+G(\mu))Au=\nu u, \qquad \nu=-\lambda^{-1}, \quad u\in H, \tag{21}$$

для слабовозмущённого самосопряжённого оператора $Z:=(I+G(\mu))A$, $\ker Z=\{0\}$, $A\in\mathfrak{S}_p$. Поэтому по теореме М. В. Келдыша ([2], теорема 5.8.1. сс. 314-317) система собственных и присоединённых элементов задачи (21) полна в H, а собственные значения $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ для любого $\varepsilon>0$ локализованы в области

$$\{\nu\in\mathbb{C}:|\arg\nu|<\varepsilon\}$$

и имеют предельную точку $\nu=0$. Значит собственные значения $\lambda_k=-\nu_k^{-1}$ попадают в угол (20), кроме, быть может, конечного их числа, и имеют предельную точку $\lambda=\infty$. □

Теорема 5. *Пусть для оператора* $A\in\mathfrak{S}_\infty$ *задачи* (16) *выполнено условие*

$$\lambda_k(A)=c_A^{\alpha}k^{-\alpha}(1+o(1)), \qquad c_A>0,\ \alpha>0,\ k\to\infty. \tag{22}$$

Тогда собственные значения $\lambda_k(\mu)$ *этой задачи имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k(\mu)=-\lambda_k^{-1}(A)(1+o(1)) \qquad (k\to\infty).$$

Замечание 2. Если выполнены условия (17), (18) и (22), то справедливы выводы теорем 4 и 5. Взамен условия (19) достаточно потребовать выполнение условия (22). Тогда $A\in\mathfrak{S}_p$, $p>1/\alpha$.

Автор выражает благодарность Н. Д. Копачевскому за руководство работой.

Список литературы

[1] Агранович М.С., Менникен Р. *Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности.* // Математич. сборник. 1999, Т.190, N1, с. 29-68.

[2] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов.* - Москва: Наука, 1965.-448с.

[3] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. - К.:Наукова думка, 1965, - 800 с.

[4] Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции.– М.:Наука, 1977, – 416 с.

[5] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи.– М.:Наука, 1989, – 416 с.

E-mail: pstarksci@aport.ru