Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2002) 75 - 81

УДК 514

О.И. Рудницкий

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИКИХ ГРУПП КОСЫХ СИММЕТРИЙ, ИМЕЮЩИХ ЧЕТЫРЕ ОРБИТЫ НАПРАВЛЕНИЙ СИММЕТРИИ

Пусть G есть бесконечная группа, порожденная косыми отражениями относительно $(m-1)$-мерных плоскостей в вещественном пространстве E^m и, имеющая четыре бесконечные $G(\vec{u})$-орбиты направлений симметрии $\vec{u}$; μ_j-плоскости $\prod^{\mu_j} = \prod^{d_j} \oplus \prod^{\gamma_j}$ $(j = \overline{0,3})$ линейные оболочки указанных орбит ($\vec{u}$ не параллельны $\prod^{\gamma_j}$). Взаимное расположение плоскостей $\prod^{\mu_j}$ определяется расположением $\prod^{\gamma_j}$, причем размерность пересечения любых двух из них не превосходит единицы [1]. Введем такие обозначения: $\gamma_0 = \lambda,\ \gamma_1 = \mu,\ \gamma_2 = \nu,\ \gamma_3 = \sigma, (\lambda \geq \mu \geq \nu \geq \sigma)$, $\prod^{r_1} = \prod^{\lambda} + \prod^{\mu}$, $\prod^{r} = \prod^{r_1} + \prod^{\nu}$, $\prod^{g} = \prod^{\nu} \cap \prod^{r_1}$, $\prod^{v} = \prod^{\sigma} \cap \prod^{r}$ $(v = \sigma)$; $\prod^{r_1} = \prod^{v} \cap \prod^{r_1}$, $\varepsilon = \dim(\prod^{\lambda} \cap \prod^{\mu}) = 0$ или 1, $d_j = 1$; F_n - нецилиндрическая алгебраическая $(m-1)$-мерная поверхность порядка $n > 2$ с группой симметрии G.

В работе [2] дана компактная систематизация результатов теории инвариантов групп G, если плоскости $\prod^{\gamma_j}$ имеют $q \geq 2$ различных прямых пересечения p_l, $(l = \overline{1,q})$. При этом выделены еще не изученные случаи при $q = 3$ прямых пересечения (см. п.п. 1.2.6-1.2.23 таблицы 3 работы [2]). Частичному рассмотрению данных случаев посвящена работа [3]. Данная статья является продолжением работы [3]. В ней завершается рассмотрение указанных случаев, а именно, установлены условия существования групп G в классе ФОТ, если $\prod^{\gamma_j}$ пересекаются по трем различным прямым. Доказана, с учетом работ [2,3], анонсированная в [4], следующая теорема.

Теорема. *Пусть γ_j - плоскости $\prod^{\gamma_j}$ $(j = \overline{0,3})$ пересекаются по трем различным прямым, не принадлежащим одной из $\prod^{\gamma_j}$. Тогда при любом расположении $\prod^{\gamma_j}$ существует поверхность F_n с группой симметрии G, если $\prod^{\nu} \cap \prod^{v} = 0$ или прямая их пересечения не принадлежит $\prod^{r_1}$ и $g + v \leq \mu + 2(1-\varepsilon)$. Далее, число $v_1 = 1$, если плоскости $\prod^{g}$ и $\prod^{v}$ пересекаются по прямой.*

Доказательство. В декартовой системе координат $Oy_1..y_4z_1..z_rx_1..x_t$ $(m = 4 + r + t)$ поверхность F_n зададим уравнением

$$R(y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda} \xi_i z_i) + S(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu-\varepsilon} \zeta_j z_{\lambda+j}) + T(y_3^2 + \sum_{k=1}^{\rho} \chi_{r_1+k} z_{r_1+k}) + P y_4^2 = c, \qquad (1)$$

где многочлены R, S, T, P (не имеющие общего множителя) и линейные функции ξ_i, ζ_j, χ_{r_1+k} зависят только от x_ω $(\omega = \overline{1,t} \geq 2)$. $\rho = \nu - g$ [3].

С учетом результатов работы [3], достаточно изучить случаи, описанные в
п.п. 1.2.11 1.2.23 таблицы 3 работы [2].

1. Первоначально рассмотрим случаи, когда $\prod^{\nu} \cap \prod^{v} = 0$ или прямая их пересечения не принадлежит $\prod^{r_1}$.

1.1 Пусть $p_1 = \prod^{\lambda} \cap \prod^{\mu} = Oz_{\lambda}$ $p_2 = \prod^{\mu} \cap \prod^{g} = Oz_{\lambda+1}$, $p_3 = \prod^{v} \cap \prod^{\nu} = Oz_{r_1+1} \notin \prod^{r_1}$, (случай 1.2.12 в классификации работы [2]). На основании леммы 3 [1], многочлены R, S, T, P удовлетворяют условиям

$$R = R_0\zeta_{\lambda}, \quad S = R_0\xi_{\lambda} = S_0\chi_{\lambda+1},$$
$$T = S_0\zeta_1 = T_0\vartheta_{r_1+1}, \quad P = T_0\chi_{r_1+1};$$

здесь $\zeta_{\lambda} \neq c\xi_{\lambda}$, $\chi_{\lambda+1} \neq c\zeta_1$, $\vartheta_{r_1+1} \neq c\chi_{r_1+1}$ — некоторые линейные функции от x_{ω}. Тогда

$$\frac{R_0}{S_0} = \frac{\chi_{\lambda+1}}{\xi_{\lambda}} \quad \text{и} \quad \frac{S_0}{T_0} = \frac{\vartheta_{r_1+1}}{\zeta_1}$$

Перемножив данные соотношения получим равенство $\frac{R_0}{T_0} = \frac{\chi_{\lambda+1}\cdot\vartheta_{r_1+1}}{\xi_{\lambda}\cdot\zeta_1}$; оно возможно, если $R_0 = R_1 \cdot \chi_{\lambda+1} \cdot \vartheta_{r_1+1}$ и $T_0 = R_1 \cdot \xi_{\lambda} \cdot \zeta_1$. Таким образом,

$$R = \chi_{\lambda+1}\vartheta_{r_1+1}\zeta_{\lambda}, \quad S = \chi_{\lambda+1}\vartheta_{r_1+1}\xi_{\lambda}, \quad T = \xi_{\lambda}\zeta_1\vartheta_{r_1+1}, \quad P = \xi_{\lambda}\zeta_1\chi_{r_1+1}, \tag{2}$$

Если $g > 1$ $(v > v_1 = 0)$, то, как и в [3], многочлен

$$T = \lambda_0 R + \lambda_1 S \tag{3}$$

при вещественных λ_0, λ_1. Поэтому, учитывая (2), $\xi_{\lambda}\zeta_1 = \chi_{\lambda+1}(\lambda_0\zeta_{\lambda} + \lambda_1\xi_{\lambda})$. Это возможно лишь в случае

$$\begin{aligned} \chi_{\lambda+1} &= c_1\xi_{\lambda}, \\ \zeta_1 &= c_1(\lambda_0\zeta_{\lambda} + \lambda_1\xi_{\lambda}), \end{aligned} \tag{4}$$

где c_1 — вещественное число.

При выполнении (4) многочлены R, S, T, P, с точностью до общего множителя, имеют вид

$$R = c_1\vartheta_{r_1+1}\zeta_{\lambda}, \quad S = c_1\vartheta_{r_1+1}\xi_{\lambda}, \quad T = \zeta_1\vartheta_{r_1+1}, \quad P = \zeta_1\chi_{r_1+1}. \tag{5}$$

Если $v > v_1 > 0$ $(g = 1)$, то $P = h_0R + h_1S$ (см.[3]) при вещественных h_0, h_1. Тогда, с учетом (2) и нецилиндричности поверхности F_n,

$$\xi_{\lambda} = d_2\chi_{\lambda+1}, \quad \chi_{r_1+1} = d_1(h_0\zeta_{\lambda} + h_1\xi_{\lambda}), \quad \vartheta_{r_1+1} = d_1d_2\zeta_1 \tag{6}$$

и

$$R = \zeta_{\lambda}, \quad S = \xi_{\lambda}, \quad T = d_2\zeta_1, \quad P = d_1^{-1}\chi_{r_1+1}. \tag{7}$$

Пусть теперь $g > 1$, $v_1 > 0$, и $g + v \leq \mu$ (см.[3]). Тогда $d_2 = c_1^{-1}$, а многочлены R, S, T, P имеют вид (7). При этом

$$\Delta\xi_{\lambda} = \lambda_0 d_1^{-1}\chi_{r_1+1} - d_2h_0\zeta_1, \tag{8}$$

$\Delta = \lambda_0h_1 - \lambda_1h_0 \neq 0$.

Таким образом, если $g + v \leq \mu$, существует поверхность F_n с уравнением (1) и групной симметрий G. При этом многочлены R, S, T, P имеют вид (5) при выполнении соотношений (4), и $g > 1$, или вид (7) при выполнении соотношений (6) и (8), если $g > 1$ и $v_1 > 0$.

1.2 Если $p_1 = \prod^{\lambda} \cap \prod^{\mu} = Oz_{\lambda}$, $\quad p_2 = \prod^{\mu} \cap \prod^{v} = Oz_{\lambda+1}$, $\quad p_3 = \prod^{v} \cap \prod^{v} = Oz_{r_1+1} \notin \prod^{r_1}$ (случай 1.2.14), то как и в п. 1.1, имеют место равенства

$$R = R_0\zeta_\lambda, \quad S = R_0\xi_\lambda = S_0\vartheta_{\lambda+1},$$
$$T = T_0\vartheta_{r_1+1}, \quad P = S_0\zeta_1 = T_0\chi_{r_1+1},$$

где $\xi_\lambda \neq c\zeta_\lambda$, $\quad \vartheta_{\lambda+1} \neq c\zeta_1$, $\quad \vartheta_{r_1+1} \neq c\chi_{r_1+1}$.

Отсюда $R_0 = R_1\vartheta_{\lambda+1}\chi_{r_1+1}$, $\quad T_0 = R_1\xi_\lambda\zeta_1$ и

$$R = \vartheta_{\lambda+1}\chi_{r_1+1}\zeta_\lambda, \quad S = \vartheta_{\lambda+1}\chi_{r_1+1}\xi_\lambda, \quad T = \xi_\lambda\zeta_1\vartheta_{r_1+1}, \quad P = \chi_{r_1+1}\xi_\lambda\zeta_1. \tag{9}$$

Таким образом, существует поверхность F_n с групной симметрий G: многочлены R, S, T, P имеют вид (9) при $g = 0$, $\quad v_1 = 1$.

Если $g > 0$, то из (3) и (9) получим равенство $\zeta_1\xi_\lambda\vartheta_{r_1+1} = \vartheta_{\lambda+1}\chi_{r_1+1}(\lambda_0\zeta_\lambda + \lambda_1\xi_\lambda)$, которое справедливо только при

$$\vartheta_{r_1+1} = c_1(\lambda_0\zeta_\lambda + \lambda_1\xi_\lambda), \quad \zeta_1 = c_2\chi_{r_1+1}, \quad \vartheta_{\lambda+1} = c_1c_2\xi_\lambda. \tag{10}$$

Поэтому,

$$R = c_1c_2\zeta_\lambda, \quad S = c_1c_2\xi_\lambda, \quad T = c_2\vartheta_{r_1+1}, \quad P = \zeta_1. \tag{11}$$

Если теперь и $v_1 > 1$, а $g + v \leq \mu$, $\quad (P = h_0R + h_1S)$, то многочлены R, S, T, P имеют вид (11), а к соотношениям (10) добавляется условие $\zeta_1 = c_1c_2(h_0\zeta_\lambda + h_1\xi_\lambda)$ или

$$h_0\vartheta_{r_1+1} = \lambda_0\chi_{r_1+1} - c_1\Delta\xi_\lambda. \tag{12}$$

Следовательно, при $g > 0$, $\quad v_1 > 1$ и $g + v < \mu$, в уравнении (1) многочлены R, S, T, P определяются формулами (11) при выполнении условий (10),(12).

1.3 Пусть $p_1 = \prod^{\lambda} \cap \prod^{\mu} = Oz_\lambda, p_2 = \prod^{\lambda} \cap \prod^{g} = Oz_{\lambda-1}, p_3 = \prod^{\mu} \cap \prod^{v} = Oz_{\lambda+1}$ (случай 1.2.15). Тогда, как и ранее, приходим к следующим соотношениям

$$R = R_0\zeta_\lambda = T_0\chi_{\lambda-1}, \quad S = R_0\xi_\lambda = S_0\vartheta_{\lambda+1},$$
$$T = T_0\xi_{\lambda-1}, \quad P = S_0\zeta_1$$

и

$$S_0 = S_1\chi_{\lambda-1}\xi_\lambda, \quad T_0 = S_1\zeta_\lambda\vartheta_{\lambda+1}.$$

Отсюда, при $g = v_1 = 1$, имеем

$$R = \zeta_\lambda\vartheta_{\lambda+1}\chi_{\lambda-1}, \quad S = \chi_{\lambda-1}\vartheta_{\lambda+1}\xi_\lambda,$$
$$T = \zeta_\lambda\vartheta_{\lambda+1}\xi_{\lambda-1}, \quad P = \chi_{\lambda-1}\xi_\lambda\zeta_1.$$

Если $g > 1$, $\quad (v_1 = 1)$, то при выполнении соотношений

$$\chi_{\lambda-1} = c\zeta_\lambda, \quad \xi_{\lambda-1} = c(\lambda_0\zeta_\lambda + \lambda_1\xi_\lambda). \tag{13}$$

многочлены R, S, T, P имеют вид

$$R = \zeta_\lambda \vartheta_{\lambda+1}, \quad S = \vartheta_{\lambda+1}\xi_\lambda,$$
$$T = c^{-1}\vartheta_{\lambda+1}\xi_{\lambda-1}, \quad P = \xi_\lambda\zeta_1.$$

Если теперь и $v_1 > 1$, $\quad g+v < \mu$, то к соотношениям (3) добавляются условия

$$\xi_\lambda = d\vartheta_{\lambda+1} \quad \text{и} \quad \Delta\xi_\lambda = \lambda_0 d\zeta_1 - c^{-1}h_0\xi_{\lambda-1}, \tag{14}$$

а многочлены R, S, T, P имеют вид

$$R = \zeta_\lambda, \quad S = \xi_\lambda, \quad T = c^{-1}\xi_{\lambda-1}, \quad P = d\zeta_1. \tag{15}$$

Таким образом, существует поверхность F_n с группой симметрий G. При этом если $g > 1$, $\quad v_1 > 1$, $\quad g + v < \mu$, $\quad R, S, T, P$ определяются формулами (15) при выполнении соотношений (13), (14).

1.4 Если $p_1 = \prod^\lambda \cap \prod^g = Oz_\lambda, p_2 = \prod^\mu \cap \prod^g = Oz_{\lambda+1}, p_3 = \prod^\mu \cap \prod^v = Oz_{\lambda+2}$ (случай 1.2.16), то

$$R = R_0\chi_\lambda, \quad S = S_0\chi_{\lambda+1} = P_0\vartheta_{\lambda+2},$$
$$T = R_0\xi_\lambda = S_0\zeta_1, \quad P = P_0\zeta_2$$

и

$$R_0 = R_1\vartheta_{\lambda+2}\zeta_1, \quad P_0 = R_1\chi_{\lambda+1}\xi_\lambda.$$

Тогда, так как $g \geq 2$, то с учетом (3), $\quad R = \vartheta_{\lambda+2}\chi_\lambda$, $\quad S = c\chi_{\lambda+1}\vartheta_{\lambda+2}$, $T = \vartheta_{\lambda+2}\xi_\lambda$, $\quad P = c\chi_{\lambda+1}\zeta_2$, при выполнении соотношений

$$\xi_\lambda = c\zeta_1, \quad \xi_\lambda = \lambda_0\chi_\lambda + c\lambda_1\chi_{\lambda+1}. \tag{16}$$

Если теперь и $v_1 > 1$, а $g + v < \mu + 2$, то

$$R = \chi_\lambda, \quad S = c\chi_{\lambda+1}, \quad T = \xi_\lambda, \quad P = cd\zeta_2 \tag{17}$$

при выполнении условий (16), и

$$\chi_{\lambda+1} = d\vartheta_{\lambda+2}, \quad \Delta\chi_\lambda = h_1\xi_\lambda - cd\lambda_1\zeta_2. \tag{18}$$

Следовательно, и в данном случае, существует поверхность F_n с группой симметрий G; многочлены R, S, T, P имеют вид (17), при выполнении соотношений (16),(18), если $g \geq 2$, $\quad v_1 > 1$, $\quad g + v < \mu + 2$.

1.5 Пусть $p_1 = \prod^\lambda \cap \prod^v = Oz_\lambda, p_2 = \prod^\mu \cap \prod^v = Oz_{\lambda+1}, p_3 = \prod^g \cap \prod^\mu = Oz_{\lambda+2}$ (случай 1.2.17). Тогда

$$R = \chi_{\lambda+2}\zeta_1\vartheta_\lambda, \quad S = \vartheta_{\lambda+1}\xi_\lambda\chi_{\lambda+2},$$
$$T = \vartheta_{\lambda+1}\xi_\lambda\zeta_2, \quad P = \chi_{\lambda+2}\zeta_1\xi_\lambda.$$

Поскольку, $v_1 \geq 2$, то $P = h_0R + h_1S$ и, следовательно, $\zeta_1(\xi_\lambda - h_0\vartheta_\lambda) = h_1\vartheta_{\lambda+1}\xi_\lambda$. Данное равенство справедливо при выполнении условий

$$\xi_\lambda = c\zeta_1, \quad \xi_\lambda - h_0\vartheta_\lambda = ch_1\vartheta_{\lambda+1}. \tag{19}$$

Тогда, $R = \chi_{\lambda+2}\vartheta_\lambda$, $\quad S = c\vartheta_{\lambda+1}\chi_{\lambda+2}$, $\quad T = c\vartheta_{\lambda+1}\zeta_2$, $\quad P = \chi_{\lambda+2}\xi_\lambda$.

Если теперь и $g > 1$, а $g + v < \mu + 2$, то к условиям (19) добавляются соотношения $\chi_{\lambda+2} = cd\vartheta_{\lambda+1}$, $\zeta_2 = d(\lambda_0\vartheta_\lambda + \lambda_1 c\vartheta_{\lambda+1})$ или $\Delta d\vartheta_\lambda = h_1\zeta_1 - d\lambda_1\xi_\lambda$, а многочлены R, S, T, P имеют вид $R = \vartheta_\lambda$, $S = c\vartheta_{\lambda+1}$, $T = d^{-1}\zeta_2$, $P = \xi_\lambda$.

Следовательно, существует поверхность F_n с группой симметрий G и уравнением (1), в котором многочлены R, S, T, P определяются приведенными формулами и соотношениями.

1.6 Если $p_1 = \prod^\lambda \cap \prod^g = Oz_\lambda, p_2 = \prod^\lambda \cap \prod^v = Oz_{\lambda-1}, p_3 = \prod^\mu \cap \prod^g = Oz_{\lambda+1}$ (случай 1.2.18) и так как $g \geq 2$, то

$$\xi_\lambda = c\zeta_1, \quad \lambda_0\chi_\lambda = c(\zeta_1 - \lambda_1\chi_{\lambda+1}), \tag{20}$$

а многочлены R, S, T, P имеют вид

$$R = \chi_\lambda\vartheta_{\lambda-1}, \quad S = c\vartheta_{\lambda-1}\chi_{\lambda+1},$$
$$T = c\vartheta_{\lambda-1}\zeta_1, \quad P = \chi_\lambda\xi_{\lambda-1}.$$

Пусть теперь и $v_1 > 1$, а $g+v < \mu+2$. Тогда к соотношениям (20) добавляем соотношения $\chi_\lambda = d\vartheta_{\lambda-1}$ и $d\xi_{\lambda-1} = h_0\chi_\lambda + ch_1\chi_{\lambda+1}$ (или $\Delta\chi_\lambda = ch_1\zeta_1 - d\lambda_1\xi_{\lambda-1}$). При этом многочлены R, S, T, P имеют вид: $R = \chi_\lambda$; $S = c\chi_{\lambda-1}$, $T = c\zeta_1$, $P = d\xi_{\lambda+1}$.

Таким образом, и в данном случае, существует поверхность F_n с группой симметрий G.

1.7 Пусть $p_1 = \prod^\lambda \cap \prod^g = Oz_\lambda, p_2 = \prod^\lambda \cap \prod^v = Oz_{\lambda-1}, p_3 = \prod^\mu \cap \prod^v = Oz_{\lambda+1}$ (случай 1.2.19). Тогда, так как $v_1 \geq 2$, то $\xi_{\lambda-1} = c\zeta_1$, $ch_1\vartheta_{\lambda+1} = \xi_{\lambda-1} - h_0\vartheta_{\lambda-1}$ и

$$R = \vartheta_{\lambda-1}\chi_\lambda, \quad S = c\chi_\lambda\vartheta_{\lambda+1},$$
$$T = \vartheta_{\lambda-1}\xi_\lambda, \quad P = \chi_\lambda\xi_{\lambda-1}.$$

Если теперь и $g \geq 1$, а $g + v < \mu + 2$, то к вышеуказанным соотношениям добавляются $\vartheta_{\lambda-1} = d\chi_\lambda$ и $\Delta\vartheta_{\lambda-1} = h_1 d\xi_\lambda - \lambda_0\xi_{\lambda-1}$.

Многочлены R, S, T, P при этом имеют вид

$$R = \vartheta_{\lambda-1}, \quad S = c\vartheta_{\lambda+1},$$
$$T = d\xi_\lambda, \quad P = \xi_{\lambda-1}.$$

Следовательно, существует поверхность F_n с группой симметрий G и уравнением (1), в котором многочлены R, S, T, P определяются приведенными в данном пункте формулами, при выполнении указанных соотношений.

1.8 Если $p_1 = \prod^\lambda \cap \prod^\mu = Oz_\lambda, p_2 = \prod^\lambda \cap \prod^v = Oz_{\lambda-1}$, (случай 1.2.21), то

$$R = \vartheta_{\lambda-1}\chi_{r_1+1}\zeta_\lambda, \quad S = \vartheta_{\lambda-1}\chi_{r_1+1}\xi_\lambda,$$
$$T = \zeta_\lambda\xi_{\lambda-1}\vartheta_{r_1+1}, \quad P = \zeta_\lambda\xi_{\lambda-1}\chi_{r_1+1}.$$

При $g > 0$, $v > v_1 > 1$ и $g + v < \mu$, имеют место соотношения

$$\xi_{\lambda-1} = c\chi_{r_1+1}, \quad \vartheta_{\lambda-1} = d\zeta_\lambda, \quad \vartheta_{r_1+1} = c(\lambda_0\zeta_\lambda + \lambda_1\xi_\lambda).$$

$$\xi_{\lambda-1} = d(h_0\zeta_\lambda + h_1\xi_\lambda), \quad c_2h_0\vartheta_{r_1+1} = \lambda_0\xi_{\lambda-1} - d\Delta\xi_\lambda,$$

а многочлены R, S, T, P определяются формулами

$$R = \zeta_\lambda, \quad S = \xi_\lambda, \quad T = d^{-1}c\vartheta_{r_1+1}, \quad P = d^{-1}\xi_{\lambda-1}.$$

Таким образом, и в данном случае, существует поверхность F_n с группой симметрий G.

1.9 Пусть $p_1 = \prod^\lambda \cap \prod^\mu = Oz_\lambda, p_2 = \prod^\lambda \cap \prod^g = Oz_{\lambda-1}, p_3 = \prod^\nu \cap \prod^v = Oz_{r_1+1} \notin \prod^{r_1}$ (случай 1.2.23). Поскольку

$$R = R_0\zeta_\lambda = T_0\chi_{\lambda-1}, \quad S = R_0\xi_\lambda,$$
$$T = T_0\xi_{\lambda-1} = P_0\vartheta_{r_1+1}, \quad P = P_0\chi_{r_1+1},$$

то $R_0 = R_1\chi_{\lambda-1}\vartheta_{r_1+1}, \quad P_0 = R_1\zeta_\lambda\xi_{\lambda-1}$ и

$$R = \chi_{\lambda-1}\vartheta_{r_1+1}\zeta_\lambda, \quad S = \chi_{\lambda-1}\vartheta_{r_1+1}\xi_\lambda,$$
$$T = \zeta_\lambda\xi_{\lambda-1}\vartheta_{r_1+1}, \quad P = \zeta_\lambda\xi_{\lambda-1}\chi_{r_1+1}.$$

Если $g \geq 1$, то $R = c\vartheta_{r_1+1}\zeta_\lambda, \quad S = c\zeta_\lambda\vartheta_{r_1+1}, \quad T = \xi_{\lambda-1}\vartheta_{r_1+1}, \quad P = \xi_{\lambda-1}\chi_{r_1+1}$ при выполнении соотношений $\chi_{\lambda-1} = c\zeta_\lambda, \quad \xi_{\lambda-1} = c(\lambda_0\zeta_\lambda + \lambda_1\xi_\lambda)$.

Если теперь и $v_1 > 0$, а $g + v < \mu$, то к вышеуказанным соотношениям добавляются равенства $\vartheta_{r_1+1} = dc^{-1}\xi_{\lambda-1}, \quad \Delta\xi_\lambda = \lambda_0 d^{-1}\chi_{r_1+1} - h_0c^{-1}\xi_{\lambda-1}$, а многочлены R, S, T, P имеют вид $R = \zeta_\lambda, \quad S = \xi_\lambda, \quad T = c^{-1}\xi_{\lambda-1}, \quad P = d^{-1}\chi_{r_1+1}$.

Таким образом, при выполнении указанных соотношений, существует поверхность F_n с группой симметрии G.

2. Пусть плоскости $\prod^\nu$ и $\prod^v$ пересекаются по прямой, принадлежащей $\prod^{r_1}$. Рассмотрим следующие случаи.

2.1. Пусть прямые p_1 и p_2 те же, что и в п. 1.1, а $p_3 = \prod^\nu \cap \prod^v \in \prod^{r_1}$ (случай 1.2.11). Тогда, так как $g \geq 2$, поместим в плоскости $\prod^{g-1}$ новые координатные оси $Oz'_p \quad (p = \overline{1, g-1})$ так, что p_3 параллельна Oz'_1, и положим

$$\chi_p = \lambda_0^{-1}\left(\xi_p + \sum_{\tau=1}^{\lambda-g+1} A_{\tau p}\zeta_{g+\tau-1}\right) = \lambda_1^{-1}\sum_{j=1}^{\mu} B_{jp}\zeta_j, \tag{21}$$

$p = \overline{1, g-1}$ (см. [5]). Тогда, как и ранее имеем

$$R = \chi_{\lambda-1}\vartheta_1\zeta_\lambda, \quad S = \chi_{\lambda+1}\vartheta_1\xi_\lambda,$$
$$T = \vartheta_1\xi_\lambda\zeta_1, \quad P = \chi_1\xi_\lambda\zeta_1.$$

При этом, так как $g \geq 2$, то имеет место соотношение (3), которое справедливо при

$$\chi_{\lambda+1} = c\xi_\lambda, \quad \zeta_1 = c(\lambda_0\zeta_\lambda + \lambda_1\xi_\lambda). \tag{22}$$

Отсюда,

$$R = c\vartheta_1\zeta_\lambda, \quad S = c\vartheta_1\xi_\lambda, \quad T = \vartheta_1\zeta_1, \quad P = \chi_1\zeta_1. \tag{23}$$

Если и $v_1 > 0$, то выполняется равенство $P = h_0R + h_1S$, которое с учетом (22), приводит к соотношению

$$\lambda_1 d\chi_1 = h_1\zeta_1 - c\Delta\zeta_\lambda.$$

Это равенство, совместно с (21), требует цилиндричности F_n, что исключается. Таким образом, в уравнении (1) многочлены R, S, T, P имеют вид (23) при выполнении условий (22), лишь при $v_1 = 1$.

2.2 Если прямые p_1 и p_2 те же, что и в п. 1.9, а $p_3 \in \prod^{r_1}$ (случай 1.2.22), то, как и в п. 2.1, получим $R = c\vartheta_1\zeta_\lambda$, $S = c\vartheta_1\xi_\lambda$, $T = \vartheta_1\xi_{\lambda-1}$, $P = \chi_1\xi_{\lambda-1}$, при выполнении соотношений $\chi_{\lambda-1} = c\zeta_\lambda$; $\xi_{\lambda-1} = c(\lambda_0\zeta_\lambda+\lambda_1\xi_\lambda)$, $g \geq 2$, $v_1 = 1$.

Неравенство $v_1 > 1$ требует цилиндричности F_n, что исключается.

2.3 Рассмотрим случаи, описанные в п.п. 1.2, 1.8, с условием, что $p_3 \in \prod^{r_1}$ (случаи 1.2.13, 1.2.20). Тогда $v = v_1 = 2$, $g \leq \mu$ [5], а неравенство $g > 1$, как и в п.п. 2.1, 2.2, требует цилиндричности F_n, что невозможно.

Следовательно, при данных расположениях $\prod^{r_j}$ $(j = \overline{0,3})$ не существует поверхность F_n с группой симметрий G.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Игнатенко В.Ф. *О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями* // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии - М.: ВИНИТИ АН СССР. 1989. Т.21. с. 155-208.

[2] Игнатенко В.Ф., Рудницкий О.И. *О диких группах косых симметрий, имеющих четыре орбиты направлений симметрии* / Симферон. гос. ун-т: Симферополь, 1998. 26с. Деп. В ГНТБ Украины 23.03.98. №159 - Ук 98.

[3] Игнатенко В.Ф., Рудницкий О.И., Плышевская С.П. *О трех прямых пересечения четырех линейных оболочек орбит направлений симметрии диких групп симметрии.* // Учёные записки СГУ. - Симферополь: Изд-во Симферопол. ун-та, 1998. № 7(46). С.66-69.

[4] Рудницкий О.И. *О бесконечных группах косых симметрий, имеющих четыре орбиты направлений симметрии* // Тезисы докладов 3^{й} Международной конференции по геометрии "в целом". Черкассы, 1999. - С.98.

[5] Ignatenko V.F. *Invariants of finite and infinite groups generated by reflections* // J. Math. Sc. - 1996. - 76, №3. - P. 334-361.