Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2002) 65 - 74

УДК 517.95-517.98

И.В. Орлов

ТЕОРЕМА ЮНГА ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ЯДЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

0. ВВЕДЕНИЕ

Задачи об экстремумах интегральных функционалов играют важную роль в нелинейном анализе. Для их исследования применяются многообразные методы (см., например, [1]-[3]). В работах автора ([4],[5]) к исследованию на экстремум функционала Эйлера-Лагранжа применялся аппарат нормального дифференцирования, опирающийся на разложения операторных пространств в индуктивные шкалы пространств. В настоящей работе этот аппарат применяется к экстремальным задачам для функционалов от двух переменных.

Работа состоит из четырех разделов. В первом разделе в обзорном порядке приведены необходимые сведения о нормальных индексах и нормальной дифференцируемости в локально выпуклых пространствах (ЛВП). Подробное изложение смотри в ([6],[7]).

Во втором разделе на нормальные производные второго порядка переносится теорема Юнга о симметричности второй производной как билинейного оператора и, как следствие, теорема Шварца о равенстве смешанных производных с точностью до симметрии аргументов.

В третьем разделе получено обобщение достаточной части известного критерия Сильвестра положительной определенности непрерывных квадратичных форм на случай квадратичных форм в произведении ядерных ЛВП. порожденных симметричными билинейными формами.

В заключительном, четвертом разделе, на базе результатов пп. 2-3. классические достаточные условия экстремума функции двух переменных обобщаются на случай дважды нормально дифференцируемой функции, заданной в произведении ядерных пространств. Полученные результаты применяются к широкому классу интегральных функционалов.

Всюду далее E, F - ЛВП с соответствующими определяющими системами преднорм $\{\|\cdot\|^s\}_{s\in S}$, индуктивно упорядоченными в соответствии с возрастанием преднорм; $(E;F)$ — пространство непрерывных линейных операторов, действующих из E в F; $(E_1, E_2; F)$ - пространство непрерывных билинейных операторов, действующих из $E_1 \times E_2$ в F. Приведём также определение играющего важную роль в дальнейшем понятия индуктивной шкалы ЛВП.

Определение 0.1. Система ЛВП $\overrightarrow{X} = \{X_i\}_{i\in J}$, индуктивно упорядоченная по непрерывному вложению: $(i_1 \preceq i_2) \Rightarrow (X_{i_1} \hookrightarrow X_{i_2})$, называется индуктивной шкалой ЛВП. Сходимость в шкале есть сходимость в каком-либо из пространств шкалы: отображение $\varphi : E \to \overrightarrow{X}$ непрерывно в точке $x_0 \in E$, если $(x \to x_0) \Rightarrow (\varphi(x) \to \varphi(x_0)$ в некотором $X_i)$. Шкалы $\overrightarrow{X}$ и $\overrightarrow{Y}$ изометрически изоморфны, если изометрически изоморфны соответствующие пространства шкал: $X_i \cong Y_i, i \in J$.

Более подробные сведения о шкалах пространств см. в ([8],[9]).

1. Нормальные индексы и нормальные производные (обзор)

Определение 1.1. Пусть $A \in (E;F)$. Для любого $s \in S$ положим

$$n_A(s) = \left\{ t \in T \,\middle|\, \|A\|_t^s := \sup_{\|x\|_t \le 1} \|Ax\|^s < +\infty \right\}$$

Многозначное отображение n_A назовем нормальным индексом или n-индексом оператора A, величины $\|A\|_t^s$ - конормами.

Отметим, что любой нормальный индекс является возрастающим отображением S во множество $ray(T)$ лучей в T, индуктивно упорядоченное противоположно включению.

Определение 1.2. Пусть отображение $\varphi : E \to F$ определено в некоторой окрестности нуля в E. Будем говорить, что $\varphi(h) = o(h)$, если

$$\forall s \in S \exists t \in T : (\|\varphi(h)\|^s/\|h\|_t) \to 0 \text{ при } h \to 0. \tag{1}$$

Обозначим через $\nu_\varphi(s)$ множество всех $t \in T$, удовлетворяющих условию (1). Многозначное отображение $s \to \nu_\varphi(s)$ назовем относительным нормальным индексом или o-индексом отображения φ.

Определение 1.3. Будем говорить, что отображение $f : E \to F$, определенное в окрестности точки $x \in E$, (нормально) дифференцируемо в точке x, если $\triangle f(x,h) = A_x h + \varphi_x(h)$, где $A_x \in (E;F), \varphi(h) = o(h)$. Оператор A_x назовем (нормальной) производной f в точке x и обозначим обычным символом $f'(x)$.

Отметим, что определение первой нормальной производной равносильно определению производной по Хайерсу-Ленгу [10]. Однако, начиная с непрерывной дифференцируемости, наш подход связан с разложением операторного пространства $(E;F)$ в индуктивную шкалу пространств и приводит к новым понятиям и результатам.

Определение 1.4. Пусть $N = N(E;F)$ - множество всех нормальных индексов в $(E;F)$. Для каждого $n \in N$ положим

$$(E;F)_n = \left\{ A \in (E;F) \,\middle|\, n_A \preceq n \right\}$$

Снабдим каждое пространство $(E;F)_n$ проективной топологией τ_n относительно топологий с определяющими системами преднорм $\{\|\cdot\|_t^s\}_{t\in n(s)}, s \in S$. Систему ЛВП

$$\overrightarrow{(E;F)} := \{((E;F)_n, \tau_n)\}_{n\in N} \tag{2}$$

назовем нормальным разложением пространства $(E; F)$.

Заметим, что система (2) образует индуктивную шкалу ЛВП. Шкала $\overrightarrow{(E; F)}$, в частности, обеспечивает непрерывность вычисления $(x, A) \mapsto Ax$, чего, как известно, нельзя добиться в небанаховом случае введением топологии в $(E; F)$.

Предложение 1.5. Отображение вычисления

$$(x, A) \mapsto Ax; (E \times \overrightarrow{(E; F)} \to F)$$

непрерывно по совокупности переменных. В частности, при нормальном разложении $\overrightarrow{E^*}$ сопряженного пространства, двойственность $\langle x, f\rangle = f(x)$ непрерывна по совокупности переменных.

Всюду далее мы рассматриваем производное отображение как отображение $f' : E \to \overrightarrow{(E; F)}$. В частности, f непрерывно дифференцируемо, если отображение f' непрерывно как отображение в шкалу $\overrightarrow{(E; F)}$. В качестве примера применения приведем "нормальную форму теоремы о среднем":

Предложение 1.6. Пусть отображение $f : E \supset [a; b] \to F$ непрерывно на $[a; b]$ и нормально дифференцируемо внутри $[a; b]$, причем $n_{f'(x)} \preceq n$, где n — некоторый нормальный индекс. Тогда для всех $s \in S$ и $t \in n(s)$:

$$\|f(b) - f(a)\|^s \leq \sup_{x \in [a;b]} \|f'(x)\|_t^s \cdot \|b - a\|_t.$$

При этом основное условие $n_{f'(x)} \preceq n$ автоматически выполняется, если f' непрерывно дифференцируемо как отображение в шкалу $\overrightarrow{(E; F)}$, поскольку, ввиду компактности $[a; b]$, f' отображает $[a; b]$ в некоторое фиксированное пространство $(E; F)_n \in \overrightarrow{(E; F)}$. Перейдем к определению второй нормальной производной.

Определение 1.7. Пусть отображение $f : E \to F$ непрерывно нормально дифференцируемо в точке $x \in E$ (а значит, f' можно рассматривать в окрестности x как отображение в некоторое ЛВП $(E; F)_{n_1}, n_1 \in N$). Если $f' : E \to (E; F)_{n_1}$ нормально дифференцируемо в точке x, то будем говорить, что f дважды нормально дифференцируемо в точке x; при этом $f''(x) := (f')'(x)$. Если n_{12} — нормальный индекс оператора $f''(x) \in (E; (E; F)_{n_1})$, то пару $n_2^1 = (n_1, n_{12})$ назовем нормальным индексом второго порядка $f''(x)$.

Отметим в заключение этого параграфа, что по аналогии с нормальным разложением $\overrightarrow{(E; F)}$ можно ввести нормальные разложения $\overrightarrow{(E_1; \overrightarrow{(E_2; F)})}$ пространства линейных непрерывных операторов из E_1 в шкалу $\overrightarrow{(E_2; F)}$ и $\overrightarrow{(E_1, E_2; F)}$ пространства билинейных непрерывных операторов из $E_1 \times E_2$ в F. При этом канонический изоморфизм $(Ax)y = \widetilde{A}(x, y)$ является изометрическим изоморфизмом соответствующих пространств этих шкал ([11]). В частности, вторую нормальную производную можно рассматривать как билинейный непрерывный оператор из $E \times E$ в F, при этом конормы $f''(x)$ как элемента $\overrightarrow{(E; \overrightarrow{(E; F)})}$ и как элемента $\overrightarrow{(E, E; F)}$ совпадают:

$$\|f''(x)\|_{t_1 t_2}^s := \sup_{\|h_1\|_{t_1} \leq 1, \|h_2\|_{t_2} \leq 1} \|f''(x)(h_1, h_2)\| =$$

$$= \sup_{\|h_1\|_{t_1}\le 1, \|h_2\|_{t_2}\le 1} \|(f''(x)h_1)h_2\| =: \|f''(x)\|_{t_2}^{st_1}$$

Отметим случай скалярной функции f: здесь $f''(x) \in \overrightarrow{(E;\overrightarrow{E^*})} \cong \overrightarrow{(E,E)}^*$; $\|f''(x)\|_{t_1t_2} = \|f''(x)\|_{t_2}^{t_1}$

2. Теорема Юнга и теорема Шварца в ЛВП

Теорема 2.1. Если отображение $f : E \to F$ дважды нормально дифференцируемо в точке $x \in E$, то $f''(x)$ — симметрический билинейный оператор из $E \times E$ в F.

Доказательство. Следуя стандартной схеме доказательства теоремы Юнга в банаховых пространствах ([12]), введем вспомогательное отображение

$$A(h,k) = f(x+h+k) - f(x+h) + f(x+k) = f(x); A(h,k) = A(k,h).$$

Пусть $n_2^1 = (n_1, n_{12})$ — нормальный индекс 2-го порядка $f''(x)$; таким образом, мы рассматриваем $f''(x)$ как линейный оператор, действующий из E в $\overrightarrow{(E;F)}$. При этом, в соответствии с определением 1.7, $f''(x) : E \to (E;F)_{n_1}$, и n_{12} — нормальный индекс $f''(x)$ в этой паре пространств.

Пусть $s \in S$. Имеем:

$$\begin{aligned} \|A(h,k) - (f''(x)k)h\|^s \le \|A(h,k) - f'(x+k)h + f'(x)h\|^s + \\ \|f'(x+k)h - f'(x)h - (f''(x)k)h\|^s. \end{aligned} \tag{3}$$

Фиксируем $t_1 \in n_1(s)$ и оценим каждое из слагаемых справа в (3).

а). Поскольку, ввиду непрерывности f' в точке x, $f' : E \to (E;F)_{n_1}$ в окрестности x, то нормальные индексы операторов $f'(x+k)$, $f'(x)$ и $f''(x)k$ не превосходят n_1 при достаточно малых k. Следовательно,

$$\|f'(x+k)h - f'(x)h - (f''(x)k)h\|^s \le \|f'(x+k) - f'(x) - f''(x)k\|_{t_1}^s \cdot \|h\|_{t_1} \tag{4}$$

Далее, по определению второй нормальной производной 1.7,

$$f'(x+k) - f'(x) - f''(x)k = o(k). \tag{5}$$

Пусть ν_{12} — соответствующий o-индекс; тогда при $t_1 \in \nu_{12}(s)$ из (5) следует

$$(\|f'(x+k) - f'(x) - f''(x)k\|^s / \|k\|_{t_1}) \to 0 \text{ при } k \to 0. \tag{6}$$

Следовательно, при $t_1 \in (n_1 \vee \nu_{12})(s)$, из (4) и (6) вытекает

$$\|f'(x+k)h - f'(x)h - (f''(x)k)h\|^s / \|k\|_{t_1} < \varepsilon \tag{7}$$

при $\|k\|_{t_1} < \delta_1(\varepsilon)$.

б). Рассмотрим вспомогательное отображение:

$$B(h) = f(x+k+h) - f(x+h) - f'(x+k)h + f'(x)h.$$

Применяя к $B(\cdot)$ на отрезке $[0;h]$ нормальную форму теоремы о среднем 1.6 при $t_1 \in n_1(s)$, имеем:

$$\|A(h,k) - f'(x+k)h + f'(x)h\|^s = \|B(h) - B(0)\|^s \le \sup_{0\le\lambda\le 1} \|B'(\lambda h)\|_{t_1}^s \cdot \|h\|_{t_1} =$$
$$= \sup_{0\le\lambda\le 1} \|f'(x+k+\lambda h) - f'(x+\lambda h) - f'(x+k) + f'(x)\|_{t_1}^s \cdot \|h\|_{t_1}$$
$$= \sup_{0\le\lambda\le 1} \|[f'(x+k+\lambda h) - f'(x) - f''(x)(k+\lambda h)] - [f'(x+\lambda h) - f'(x)$$
$$-f''(x)(\lambda h)] - [f'(x+k) - f'(x) - f''(x)k]\|_{t_1}^s \cdot \|h\|_{t_1}. \tag{8}$$

Поскольку

$$\begin{cases} f'(x+k+\lambda h) - f'(x) - f''(x)(k+\lambda h) = o(k+\lambda h); \\ f'(x+\lambda h) - f'(x) - f''(x)(\lambda h) = o(\lambda h); \\ f'(x+k) - f'(x) - f''(x)k = o(k); \end{cases} \tag{9}$$

причем за o-индекс в каждом из этих равенств можно принять ν_{12}, то при $t_1 \in \nu_{12}(s)$ из (8) и (9) получаем

$$(\|A(h,k) - f'(x+k)h + f'(x)h\|^s / (\|h\|_{t_1} + \|k\|_{t_1})) < \varepsilon \cdot \|h\|_{t_1} \tag{10}$$

при $\|h\|_{t_1} < \delta_2(\varepsilon)$, $\|k\|_{t_1} < \delta_2(\varepsilon)$. Из (3), (7) и (10) следует

$$(\|A(h,k) - (f''(x)k)h\|^s / (\|h\|_{t_1} + \|k\|_{t_1})) < \varepsilon\|h\|_{t_1} < \varepsilon(\|h\|_{t_1} + \|k\|_{t_1}) \tag{11}$$

при $t_1 \in (n_1 \vee \nu_{12})(s))$, $\|h\|_{t_1} < \delta_2$, $\|k\|_{t_1} < \min(\delta_1, \delta_2)$. Последняя оценка означает, что

$$A(h,k) - (f''(x)k)h = o((h,k)^2). \tag{12}$$

Аналогичным образом получаем

$$A(k,h) - (f''(x)h)k = o((k,h)^2). \tag{13}$$

Из (12) и (13), наконец, следует

$$(f''(x)h)k - (f''(x)k)h = o((h,k)^2)$$

Заменяя в последнем равенстве $h \mapsto \lambda h$, $k \mapsto \lambda k$, получаем

$$(f''(x)h)k - (f''(x)k)h = (o(\lambda^2 \cdot (h,k)^2)/\lambda^2) \to 0$$

при $\lambda \to 0$, откуда $f''(x)h)k = f''(x)k)h$.

Перейдем теперь к выводу теоремы Шварца. Пусть отображение $f : E = E_1 \times E_2 \to F$ дважды нормально дифференцируемо в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in E_1 \times E_2$. Тогда, в силу ([7],(16)), в окрестности x^0

$$f'(x)(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)h_2,$$

откуда

$$f''(x^0)(k_1,k_2) = \frac{\partial f'}{\partial x_1}(x^0)k_1 + \frac{\partial f'}{\partial x_2}(x^0)k_2, \tag{14}$$

и значит

$$(f''(x^0)\cdot(k_1,k_2))\cdot(h_1,h_2) = \left(\frac{\partial f'}{\partial x_1}(x^0)k_1 + \frac{\partial f'}{\partial x_2}(x^0)k_2\right)\cdot(h_1,h_2). \tag{15}$$

Дифференцируя (15) по x_i ($i = 1,2$), и используя непрерывность вычисления $\overrightarrow{E^*} \times E \to \mathbb{R}$ (предложение 1.5), получаем

$$\left(\frac{\partial f'}{\partial x_i}(x^0)k_i\right)\cdot(h_1,h_2) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(x^0)k_i\right)h_1 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2}(x^0)k_i\right)h_2 \qquad (16)$$

Отметим, что здесь, в силу канонического изоморфизма [11],

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)(x^0) \in \overrightarrow{(E_i;\overrightarrow{(E_j;F)})} \cong \overrightarrow{(E_i,E_j;F)}. \qquad (i,j=1,2)$$

Подставляя (16) в (14), получаем

$$(f''(x^0)\cdot(k_1,k_2))(h_1,h_2) = \sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)k_i\right)h_j. \qquad (17)$$

Применяя теорему Юнга 2.1, из (17) находим

$$\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)k_i\right)h_j = \sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)h_j\right)k_i,$$

откуда для любых $i,j = 1,2$ и любых $k_i \in E_i, h_j \in E_j$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)(k_i,h_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)(h_j,k_i) \qquad (18)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2.2. Если отображение $f : E = E_1 \times E_2 \to F$ дважды нормально дифференцируемо в точке x^0, то для любых $i,j = 1,2$ имеет место равенство (18), т.е. смешанные производные совпадают с точностью до симметрии аргументов.

Заметим в заключение, что нормальные индексы смешанных производных также совпадают с точностью до симметрии аргументов:

$$\left((t_i,t_j) \in n_{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}(x^0)(S)\right) \Leftrightarrow \left((t_j,t_i) \in n_{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}}(x^0)(S)\right)$$

3. Условие положительной определенности в произведении ядерных пространств

Напомним ([13]), что полное ядерное ЛВП изоморфно проективному пределу гильбертовых пространств. Поэтому вначале мы получим условие положительной определенности в произведении гильбертовых пространств.

Предложение 3.1. Пусть H_i ($i = 1,2$) — вещественные гильбертовы пространства, $H_1 \cong H_2$, $B = (B_{ij})$, где $B_{ij} : H_j \to H_i$ ($i,j = 1,2$), — самосопряженный непрерывный линейный оператор в $H_1 \times H_2$. Следовательно, $B_{11} = B_{11}^*$, $B_{22} = B_{22}^*$, $B_{12} = B_{21}^*$. Если

$$\begin{cases} 1) B_{11} \gg 0 \text{ и } B_{11} \text{ коммутирует с } B_{12}, B_{21} \text{ и } B_{22}; \\ 2) B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} \gg 0; \end{cases}$$

то B положительно определен на $H_1 \times H_2$.

Доказательство. Пусть

$$A_{11} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{11} \end{pmatrix}; \qquad \text{тогда } A_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & B_{11}^{-1} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим оператор

$$A_{11}B = \begin{pmatrix} B_{11}^2 & B_{11}B_{12} \\ B_{11}B_{21} & B_{11}B_{22} \end{pmatrix}.$$

При $h = (h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$ имеем:

$$\begin{aligned} &\langle A_{11}Bh, h\rangle = \langle B_{11}^2 h_1, h_1\rangle + 2\langle B_{11}B_{12}h_2, h_1\rangle + \langle B_{11}B_{22}h_2, h_2\rangle = \\ &(\langle B_{11}h_1, B_{11}h_1\rangle + 2\langle B_{12}h_2, B_{11}h_1\rangle + \langle B_{12}h_2, B_{12}h_2\rangle) + \\ &+ \langle (B_{11}B_{22} - B_{21}B_{12})h_2, h_2\rangle = \|B_{11}h_1 + B_{12}h_2\|^2 + \\ &+ \langle (B_{11}B_{22} - B_{21}B_{12})h_2, h_2\rangle \geq \langle (B_{11}B_{22} - B_{21}B_{12})h_2, h_2\rangle \geq \\ &\geq C \cdot \|h_2\|^2, \text{ где } C > 0. \end{aligned}$$

Аналогично, при $h' = (h_2, h_1)$ получаем:

$$\langle A_{11}Bh', h'\rangle = \langle A_{11}Bh, h\rangle \geq C\|h_1\|^2,$$

откуда

$$\langle A_{11}Bh, h\rangle \geq C \cdot \max(\|h_1\|^2, \|h_2\|^2) \geq \frac{C}{2}\|h\|^2,$$

т.е. $A_{11}B \gg 0$

Отметим теперь, что оператор A_{11}^{-1} положительно определен и самосопряжен вместе с $A_{11}B$. При этом операторы A_{11}^{-1} и $A_{11}B$ коммутируют в силу равенств

$$(B_{11}B_{ij}B_{11}^{-1} = B_{ij}) \Leftrightarrow (B_{11}B_{ij} = B_{ij}B_{11}).$$

Эти условия, как хорошо известно, гарантируют положительную определенность произведения:

$$A_{11}^{-1}(A_{11}B) = B \gg 0.$$

Введем понятие положительно определенной квадратичной формы в ЛВП ([4]).

Определение 3.2. Пусть φ — непрерывная квадратичная форма в ЛВП E, порожденная билинейной формой g наE^2. Назовем форму φ невырожденной, если

$$\inf_{\|h\|_{t_1} \neq 0} \frac{\|g(h, \cdot)\|^{t_2}}{\|h\|_{t_1}} > 0$$

для некоторых $t_1, t_2 \in T$. Если φ невырождена и неотрицательна, то назовем форму φ положительно определенной на $E : \varphi \gg 0$.

В([14]) получен следующий критерий положительной определенности в ЛВП.

Предложение 3.3. Непрерывная квадратичная форма φ положительно определена в ЛВП E тогда и только тогда, когда найдется такой индекс $t \in T$ и такая константа $C_t > 0$, что для всех $h \in E$:

$$\varphi(h) \geq C_t \cdot \|h\|_t^2.$$

Опираясь на этот результат и на предложение 3.1, а также канонический изоморфизм между линейными операторами и билинейными формами в ЛВП, получим теперь основной результат этого параграфа — достаточное условие положительной определенности квадратичной формы на произведении ядерных пространств.

Теорема 3.4. Пусть E_i $(i = 1, 2)$— вещественные полные ядерные ЛВП, $E_1 \cong E_2$, $E = E_1 \times E_2$, φ – непрерывная квадратичная форма на E, порожденная симметричной билинейной формой g на E^2, B – ассоциированный с g линейный оператор из E в E^* $(g(h,k) = \langle k, Bh \rangle)$, $B = (B_{ij})$, где $B_{ij} : E_j \to E_i$. Если

$$1).\quad B_{11} \gg 0 \text{ и } B_{11} \text{ коммутирует с } B_{12}, B_{21} \text{ и } B_{22};$$
$$2).\quad B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} \gg 0;$$

то $\varphi \gg 0$ на E.

Доказательство. Так как полное ядерное ЛВП изоморфно проективному пределу гильбертовых пространств ([13]), то можно, не уменьшая общности, считать, что

$$E_1 = E_2 = \varprojlim_{t \in T} H_t,$$

где H_t — гильбертовы пространства.

Далее, по теореме о каноническом изоморфизме ([11]), B – непрерывный линейный оператор из E в $\overrightarrow{E^*}$. Таким образом, B можно рассматривать как непрерывный линейный оператор из $H_{t_1} \times H_{t_2}$ в $H^*_{t'_1} \times H^*_{t'_2} \cong H_{t'_1} \times H_{t'_2}$ при некоторых $t'_1, t'_2 \in T$, самосопряженный в силу симметричности g. Аналогично, условия 1) и 2) теоремы выполняются, соответственно, на некоторых $H_{t''_1} \times H_{t''_2}$ и $H_{t'''_1} \times H_{t'''_2}$. Выбрав $t_i \succeq t'_i, t''_i, t'''_i$ $(i = 1, 2)$, мы придем к выполнению условий предложения 3.1 на $H_{t_1} \times H_{t_2}$. Следовательно, B положительно определен на $H_{t_1} \times H_{t_2}$, откуда

$$\varphi(h) = \langle h, Bh \rangle \ge C_t \cdot \|h\|_t^2; \quad (C_t > 0)$$

при $h \in E^t = H_{t_1} \times H_{t_2}$, $t = (t_1, t_2)$. Применяя предложение 3.3, получаем, наконец, что форма φ положительно определена на всем E.

4. Достаточное условие экстремума в произведении ядерных пространств

Теорема 4.1. Пусть E_i $(i = 1, 2)$ — вещественные полные ядерные ЛВП, $E_1 \cong E_2$, и вещественная функция $f(x_1, x_2)$ дважды непрерывно дифференцируема в точке $(x_1^0, x_2^0) \in E_1 \times E_2$, причем $\partial_1 f(x_1^0, x_2^0) = \partial_2 f(x_1^0, x_2^0) = 0$. Если в точке (x_1^0, x_2^0):

$$\begin{cases} 1).\quad \partial_{11} f \gg 0 \text{ и коммутирует с } \partial_{12} f, \partial_{21} f, \partial_{22} f; \\ 2).\quad \partial_{11} f \cdot \partial_{22} f - \partial_{12} f \cdot \partial_{21} f \gg 0; \end{cases}$$

то f имеет строгий минимум в данной точке.

Доказательство. Поскольку, в силу теоремы 2.1, $f''(x_1^0, x_2^0)$ — симметричная билинейная форма на $(E_1 \times E_2)^2$, и для ассоциированного с ней гессиана $B = (B_{ij})$, где $B_{ij} = \partial_{ij} f(x_1^0, x_2^0)$, выполнены условия теоремы 3.4, то форма $f''(x_1^0, x_2^0)$ положительно определена.

Как показано в [4], условия $f' = 0$ и $f'' \gg 0$ для дважды нормально дифференцируемых функций в ЛВП (как ив банаховом случае для дифференцируемых по Фреше функций [12]) обеспечивают минимум f в данной точке.

Следствие 4.2. Если, в условиях теоремы 4.1, $\partial_{11} f \ll 0$, то f имеет строгий максимум в данной точке.

Очевидно также, что в формулировках теоремы 4.1 и следствия 4.2 требования к $\partial_{11}f$ можно заменить аналогичными требованиями к $\partial_{22}f$. Рассмотрим в заключение пример применения теоремы 4.1 к исследованию на экстремум интегральных функционалов.

Пример 4.3. Пусть $f(x_1, x_2)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция в $\mathbb{R}^2$, Ω — компактная область в $\mathbb{R}^n$, $S(\Omega)$ — соответствующее пространство быстро убывающих функций (см. [15]). Рассмотрим интегральный функционал

$$F(x_1, x_2) = \int\limits_{\Omega} f(x_1(t), x_2(t))dt; \quad (x_i(\cdot) \in S(\Omega)) \tag{19}$$

Прямой подсчет показывает, что

$$\partial_i F(x_1, x_2)h_i = \int\limits_{\Omega} \partial_i f(x_1(t), x_2(t))h_i(t)dt; \quad (i = 1, 2) \tag{20}$$

$$\partial_{ij} F(x_1, x_2)(h_j, h_i) = \int\limits_{\Omega^2} \partial_{ij} f(x_1(t_1), x_2(t_2))h_j(t_j)h_i(t_i)dt_1dt_2; \quad (i, j = 1, 2) \tag{21}$$

Отсюда, используя теорему Фубини, находим

$$(\partial_{ij}F \circ \partial_{kl}F)(h^l, h_i) = \int\limits_{\Omega^3} (\partial_{ij}f(t_1, t_2)\partial_{kl}f(t_1, u_2))h_i(t_1)h^l(u_2)dt_1dt_2du_2. \tag{22}$$

Следовательно, частные производные $\partial_{ij}F$ коммутируют. Наконец, из (20) (22) ясно, с учетом ядерности пространства $S(\Omega)$ [15], что неравенства

$$\partial_{11}f > 0; \quad \partial_{11}f \cdot \partial_{22}f - \partial_{12}f \cdot \partial_{21}f > 0; \tag{23}$$

выполненные на множестве $(x_1^0(t), x_2^0(t))$, $t \in \Omega$, обеспечивают условия 1) 2) теоремы 4.1. Таким образом, вместе с необходимыми условиями

$$\partial_1 f(x_1^0(t), x_2^0(t)) = 0; \quad \partial_2 f(x_1^0(t), x_2^0(t)) = 0; \quad (t \in \Omega)$$

неравенства (23) гарантируют минимум интегрального функционала (19) в точке $(x_1^0, x_2^0) \in S(\Omega) \times S(\Omega)$.

Список литературы

[1] И. В. Скрыпник *Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка.* Наукова Думка, Киев (1973).

[2] М. З. Згуровский, В. С. Мельник *Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами.* Наукова Думка, Киев (1999).

[3] А. В. Угланов *Вариационное исчисление на банаховых пространствах.* Математический сборник РАН, т.191, №10(2000), с. 105-118.

[4] И. В. Орлов *Нормальная дифференцируемость и экстремумы функционалов в локально-выпуклом пространстве.* — Кибернетика и системный анализ, №4(2002), с. 23-34.

[5] И. В. Орлов *К-дифференцируемость функционала Эйлера-Лагранжа.* - Доклады НАН Украины, в печати.

[6] И. В. Орлов *Нормальные индексы линейных и нелинейных отображений в локально выпуклых пространствах и шкалах пространств.* — Spectral and Evolution Problems, V.11, TNU Publ., Simferopol (2001), p. 18-29.

[7] И. В. Орлов *Нормальные индексы и нормальное дифференцирование в локально выпуклых пространствах.* — Ученые Записки ТНУ им. В. И. Вернадского, т.15(54), №1(2002), с. 112-121.

[8] Х. Трибель *Теория функциональных пространств.* Мир, Москва (1986).

[9] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин *Обобщённые функции и уравнения в свертках.* Наука, Москва (1994).

[10] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов *Различные определения производной в линейных топологических пространствах.* Успехи математических наук, т.23, №4 (1968), с. 67-116.

[11] И. В. Орлов *Нормальные индексы и нормальные разложения операторных пространств над ЛВП.* — Proceedings of Ukrainian Congress of Mathematicians, в печати.

[12] А. Картан *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.* Мир, Москва (1971).

[13] Х. Шефер *Топологические векторные пространства.* Мир, Москва (1971).

[14] И. В. Орлов *Квадратичные формы в локально выпуклых пространствах.* — Динамические системы, вып.17, КФТ, Симферополь (2001), с. 196-205.

[15] Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель *Функциональный анализ.* Вища Школа, Киев, 1990.