Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2002) 62 – 64

УДК 513

В.И. Мягков

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЗАИМНОСТИ НА ПЛОСКОСТИ

В 1968 году профессор Н.И.Кованцов сформулировал задачу об отыскании пары взаимных гиперповерхностей в n-мерном евклидовом пространстве. Для евклидовой плоскости эта задача формулируется таким образом.

Пусть дана кривая γ, Q — фиксированная точка плоскости. Присоединим к каждой точке M кривой γ два вектора: радиус-вектор этой точки $\overrightarrow{QM}$ и единичный вектор нормали $\vec{n}$.

Две кривые γ и γ^* называются взаимными с центром взаимности в точке Q, если между этими кривыми установлено такое взаимно однозначное точечное соответствие, при котором в соответствующих точках M и M^* радиус-вектор $\overrightarrow{QM}$ первой кривой будет параллелен вектору нормали $\vec{n}^*$ второй кривой и, наоборот, вектор нормали $\vec{n}$ первой кривой будет параллелен радиус-вектору $\overrightarrow{QM}^*$ второй кривой γ^*, то есть, для кривых γ и γ^* в соответствующих точках должны выполняться два условия

$$\overrightarrow{QM} \,||\, \vec{n}^*, \quad \overrightarrow{QM}^* \,||\, \vec{n}. \tag{1}$$

Пару кривых γ и γ^*, для которых выполняются условия параллельности (1), называют парой взаимных кривых с центром взаимности в точке Q.

В статье [1], опубликованной в 1990 году, было получено решение этой задачи, методом безынтегрального представления [2]-[7] был найден переход от точки M кривой γ к соответствующей точке M^* взаимной кривой γ^*:

$$\overrightarrow{QM}^* = k \cdot \frac{\vec{n}}{\left(\overrightarrow{QM}, \vec{n}\right)}, \qquad k = \text{const} \neq 0. \tag{2}$$

В [1] преобразование (2) было названо преобразованием взаимности H_Q с центром взаимности в точке Q.

В [1] была доказана теорема о том, что действительные нераспадающиеся кривые γ второго порядка под действием преобразования взаимности H_Q с центром взаимности в точке Q переходят только в действительные нераспадающиеся кривые второго порядка, т.е. было доказано, что класс действительных нераспадающихся коник является инвариантным относительно преобразования взаимности H_Q.

Вид взаимной кривой $\gamma^* = H_Q(\gamma)$ зависит от положения центра взаимности Q относительно исходной коники γ. В зависимости от этого кривая γ^* может быть или эллипсом, или гиперболой или параболой. Все возможные случаи подробно описаны в [1].

Настоящая заметка посвящена существенному упрощению достаточно громоздкого доказательства основной теоремы статьи [1].

Пусть γ – действительная нераспадающаяся кривая второго порядка

$$\gamma:\ a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{3}$$

Пусть Q – центр взаимности. Пусть $M(x,y)$ – точка, лежащая на γ. Запишем (2) в эквивалентном виде:

$$\overrightarrow{QM}^* = k \cdot \frac{\vec{N}}{\left(\overrightarrow{QM},\, \vec{N}\right)} \tag{4}$$

Вектор нормали $\vec{N}$ к γ в точке $M(x,y)$ имеет координаты:

$$L_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \quad L_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}. \tag{5}$$

Учитывая (3) и (5) запишем скалярное произведение $\left(\overrightarrow{QM},\, \vec{N}\right)$ в виде

$$\left(\overrightarrow{QM},\, \vec{N}\right) = u_{31}x + u_{32}y + u_{33} = L_3, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} u_{31} &= A \cdot a_{11} + B \cdot a_{21} + a_{31},\\ u_{32} &= A \cdot a_{12} + B \cdot a_{22} + a_{32},\\ u_{33} &= A \cdot a_{13} + B \cdot a_{23} + a_{33}. \end{aligned} \tag{7}$$

Внесём найденные (6) и (5) в (4). Получим

$$x^* - A = k\frac{L_1}{L_3}, \quad y^* - B = f\frac{L_2}{L_3}. \tag{8}$$

Перейдём теперь от евклидовых координат точек $M(x,y)$ и $M^*(x^*,y^*)$ к их однородным координатам на расширенной евклидовой плоскости [9]:

$$\begin{aligned} x = t_1 : t_3, &\quad x^* = t_1^* : t_3^*,\\ y = t_2 : t_3, &\quad y^* = t_2^* : t_3^*. \end{aligned}$$

Тогда (после ряда элементарных преобразований) систему (8) можно записать в таком матричном виде

$$\begin{pmatrix} t_1^* \\ t_2^* \\ t_3^* \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где

$$\begin{array}{lcccccccc} u_{11} & = & A^2 \cdot a_{11} & + & A \cdot B \cdot B \cdot a_{21} & + & A \cdot a_{31} & - & k \cdot a_{11},\\ u_{12} & = & A^2 \cdot a_{12} & + & A \cdot B \cdot B \cdot a_{22} & + & A \cdot a_{32} & - & k \cdot a_{12},\\ u_{13} & = & A^2 \cdot a_{13} & + & A \cdot B \cdot B \cdot a_{23} & + & A \cdot a_{33} & - & k \cdot a_{13},\\ u_{21} & = & A \cdot B \cdot a_{11} & + & B^2 \cdot B \cdot a_{21} & + & B \cdot a_{31} & - & k \cdot a_{21},\\ u_{22} & = & A \cdot B \cdot a_{12} & + & B^2 \cdot B \cdot a_{22} & + & B \cdot a_{32} & - & k \cdot a_{22},\\ u_{23} & = & A \cdot B \cdot a_{13} & + & B^2 \cdot B \cdot a_{23} & + & B \cdot a_{33} & - & k \cdot a_{23}. \end{array}$$

элементы u_{3i} совпадают с (8).

Вычислим определитель матрицы (u_{ij}), получим

$$\det(u_{ij}) = k^2 \cdot \det(a_{ij}),$$

а это означает, что значение $\det(u_{ij})$ совершенно не зависит от выбора центра взаимности точки Q.

Так как $\det(u_{ij}) \neq 0$, то на (9) можно смотреть как на некоторое проективное преобразование F на расширенной плоскости. А под действием проективного преобразования F каждая овальная действительная квадрика переходит только в овальную действительную квадрику [9]. Поэтому на евклидовой плоскости взаимной кривой γ^* для действительной нераспадающейся кривой (3) может быть только кривая одного из трёх видов: эллипс, гипербола, парабола.

Интересен смысл уравнения

$$u_{31}t_1 + u_{32}t_2 + u_{33}t_3 = 0. \tag{10}$$

Можно показать [9], что (10) является уравнением поляры точки Q относительно исходной кривой γ.

Вид взаимной кривой γ^* на евклидовой плоскости (эллипс, гипербола или парабола) можно было бы выяснить по анализу точек пересечения кривой γ с полярой (10), но более простой критерий для определения вида взаимной кривой γ^* содержится в [1].

Список литературы

[1] Мягков В.И., Таранина Е.И.*Характеристическое свойство действительных нераспадающихся кривых второго порядка* // Симфероп. гос. ун-т. - Симферополь, 1989. - 16 с. - Деп. в УкрНИИНТИ 19.02.90, № 248-УК90.

[2] Кованцов Н.И.*Расслоение комплекса прямых в трёхмерном евклидовом пространстве в нормальные конгруэнции* // Укр. геом. сб. - 1973. - Вып. 14. - С. 23-44.

[3] Кованцов Н.И.*Расслоение комплекса прямых в нормальные конгруэнции, ортогональные к поверхностям нулевой кривизны* // Укр. геом. сб. - 1975. - Вып. 18. - С.28-44.

[4] Кованцов Н.И.*Расслоение комплекса прямых в нормльные конгруэнции, ортогональные к поверхностям постоянной средней кривизны* // Укр. геом. сб. - 1976. - Вып. 19 - С.65 - 77.

[5] Кованцов Н.И., Мягков В.И.*О К-расслоении комплекса прямых* // Укр. геом. сб. - 1975. - Вып 18. - С. 74 -84.

[6] Мягков В. И. *H/K - расслоение комплекса прямых в нормальные конгруэнции* // Укр. геом. сб. - 1980. Вып. 23. - Харьков, С.107-120.

[7] Мягков В.И.*Второе безынтегральное представление комплекса, допускающего H/K расслоение* // Укр. геом. сб. - 1981. - Вып. 24. - С. 85-90.

[8] Рашевский П.К.*Курс дифференциальной геометрии.* - М.: 1956. - 420 с.

[9] Кованцов М.І. *Проеткивна геометрія.* - Київ: Видавництво "Вища школа", 1969. - 411