Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2002) 49 – 61

УДК 517.98

М.А. Муратов[1]

РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ СХОДИМОСТИ В КОЛЬЦАХ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

Сходимость почти всюду последовательностей операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, была впервые рассмотрена в работе Сигала И. Е. [17]. Там же была неявно введена и сходимость по мере как звездная к сходимости почти всюду. В этой работе был получен целый ряд обобщений важнейших результатов теории меры и интегрирования для алгебр фон Неймана со следом, а также выдвинута идея изучения свойств операторов и последовательностей операторов, принадлежащих алгебре фон Неймана или присоединенных к ней, при помощи методов теории меры и теории вероятностей. Впоследствии сходимости почти всюду и по мере и их различные вариации рассматривались и изучались многими авторами (Stinespring W. E. [18] Sankaran S. [16],Padmanabhan A. R. [13], Yeadon F. J. [19], [20], Paszkewicz [14],[15], Муратов М. А. [9], [10], [11], Чилин В. И. [12] и другие), установившими ряд важных и полезных соотношений между ними. В частности, в работах [7], [8] были рассмотрены двусторонние аналоги сходимостей почти всюду и по мере, позволяющие исследовать порядковые свойства сходящихся последовательностей и связь этих сходимостей с (o)-сходимостью. Настоящая работа посвящена описанию соотношений между двусторонними и односторонними сходимостями почти всюду и по мере в случае, когда алгебра фон Неймана конечна. Используется терминология и обозначения теории алгебр фон Неймана из [2], [3], теории некоммутативного интегрирования [4], [17], [13], теории упорядоченных алгебр [5].

1. Топологии односторонней и двусторонней сходимости по мере в кольце $S(\mathcal{A})$.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство , $B(\mathcal{H})$ – кольцо всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$, $\mathcal{A}$ конечная алгебра фон Неймана в $B(\mathcal{H})$, $Z = Z(\mathcal{A}) = \{B \in \mathcal{A} : \ BA = AB \ \forall A \in \mathcal{A}\}$ центр алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$, m – точный нормальный конечный след на $\mathcal{A}$ такой. чо $m(I) = 1$, где I - единичный оператор в $\mathcal{A}$.

Обозначим через $\mathcal{A}_\mathcal{P}$ множество всех ортопроекторов алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}_\mathcal{P}$ является полной структурой с ортодополнением, относительно порядка и дополнения, определенных следующим образом:

$$P \leq Q \iff P(\mathcal{H}) \subseteq Q(\mathcal{H}); \ P^\perp = I - P,$$

где $P, \ Q \in \mathcal{A}_\mathcal{P}$, а $P(\mathcal{H})$ и $Q(\mathcal{H})$ замкнутые подпространства, на которые проектируют операторы P и Q соответственно. Порядок на $\mathcal{A}_\mathcal{P}$ согласован с порядком

[1]Таврический Национальный Университет, Симферополь.

в $\mathcal{A}_h = \{A \in \mathcal{A} : A^* = A\}$, определяемым конусом положительных элементов $\mathcal{A}_+ = \{A^*A : A \in \mathcal{A}\}$.

Линейное подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ называется присоединенным к алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$ ($\mathcal{D}\eta\mathcal{A}$), если $A'(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ для всех $A' \in \mathcal{A}'$, где $\mathcal{A}' = \{A' \in B(\mathcal{H}) : A'A = AA',\ \forall A \in \mathcal{A}\}$ — коммутант алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$.

Линейный оператор T с плотной областью определения $\mathcal{D}(T)$ называется присоединенным к алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$ ($T\eta\mathcal{A}$), если

1) $\mathcal{D}(T)\eta\mathcal{A}$,

2) $TA'\xi = A'T\xi$

для всех $A' \in \mathcal{A}'$ и $\forall \xi \in \mathcal{D}(T)$.

Замкнутый линейный оператор T с плотной областью определения $\mathcal{D}(T)$, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$, называется измеримым относительно $\mathcal{A}$. Обозначим через $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ множество всех линейных операторов в $\mathcal{H}$, измеримых относительно $\mathcal{A}$. Если $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, то T^*, $\lambda T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Кроме того, если $T,\ S \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, то операторы $T + S$ и TS определены на плотных подпространствах и допускают замыкания, которые являются операторами, измеримыми относительно $\mathcal{A}$. Эти операторы называют сильной суммой и сильным произведением операторов T и S и обозначают также $T + S$ и $T \cdot S$. Относительно введенных операций $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ является кольцом с инволюцией. На множестве $\mathcal{S}(\mathcal{A})_h$ эрмитовых операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ можно ввести частичный порядок, согласованный с алгебраическими операциями:

$$A \geq 0 \iff (A\xi, \xi) \geq 0\ \forall \xi \in \mathcal{D}(A),$$
$$A \geq B \iff A - B \geq 0.$$

Множество всех положительных операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A})_h$ обозначается $\mathcal{S}(\mathcal{A})_+$.

Определение 1. Последовательность операторов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathcal{A})$ сходится к оператору $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ по мере ($T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T$), если для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется номер N такой, что для каждого $n \geq N$ существует проектор $P_n \in \mathcal{A}_\mathcal{P}$ такой, что $m(P_n) > 1 - \delta$, $(T_n - T)P_n \in \mathcal{A}$ и $\|(T_n - T)P_n\| < \varepsilon$.

Сходимость по мере в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ совпадает со сходимостью в топологии τ, базис окрестностей нуля которой образуют множества вида:

$$U_{\varepsilon,\delta} = \{T \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) : \exists P \in \mathcal{A}_\mathcal{P} \text{ такой, что } m(P) > 1 - \delta,$$
$$TP \in \mathcal{A},\ \|TP\| < \varepsilon\},$$

где ε и δ произвольные положительные числа. При этом, $(\mathcal{S}(\mathcal{A}), \tau)$ является полным метризуемым топологическим векторным пространством [13], [19].

Сходимость по мере может быть введена следующим более симметричным образом. Определим топологию τ_d в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Для каждой пары положительных чисел ε и δ рассмотрим множества:

$$\Omega_{\varepsilon,\delta} = \{T \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) : \exists P \in \mathcal{A}_\mathcal{P} \text{ такой, что } m(P) > 1 - \delta,$$
$$PTP \in \mathcal{A},\ \|PTP\| < \varepsilon\}.$$

Свойство 1. *Семейство* $\{\Omega_{\varepsilon,\delta}\}_{\varepsilon>0,\delta>0}$ *обладает следующими свойствами:*

1) $\alpha\Omega_{\varepsilon,\delta} = \Omega_{|\alpha|\varepsilon,\delta}$, *для всех* $\alpha \in \mathbb{C}$,

2) $\Omega_{\varepsilon,\delta} + \Omega_{\varepsilon,\delta} \subset \Omega_{2\varepsilon,2\delta}$,

3) $\Omega^*_{\varepsilon,\delta} = \Omega_{\varepsilon,\delta}$, *4)* $\bigcap\{\Omega_{\varepsilon,\delta},\ \varepsilon > 0,\ \delta > 0\} = \{0\}$.

Доказательство. Свойства 1) и 3) следуют непосредственно из определения множеств $\{\Omega_{\varepsilon,\delta}\}$.

2). Пусть T, $S \in \Omega_{\varepsilon,\delta}$. Тогда существуют такие проекторы P и Q, что $m(P) > 1-\delta$, $m(Q) > 1-\delta$, $PTP \in \mathcal{A}$, $QSQ \in \mathcal{A}$, $\|PTP\| < \varepsilon$ и $\|QSQ\| < \varepsilon$.

Рассмотрим проектор $R = P \wedge Q$. Так как след m конечен, то

$$m(R) = m(P \wedge Q) = m(P) + m(Q) - m(P \vee Q) >$$
$$> 1 - \delta + 1 - \delta - 1 = 1 - 2\delta.$$

Кроме того, $R(T+S)R = RTR + RSR = RPTPR + RQSQR \in \mathcal{A}$ и $\|R(T+S)R\| \le \|RPTPR\| + \|RQSQR\| < 2\varepsilon$.

Поэтому $T + S \in \Omega_{2\varepsilon,2\delta}$.

4) Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ произвольные, сходящиеся к нулю последовательности положительных чисел. Ясно, что $\bigcap\{\Omega_{\varepsilon,\delta},\ \varepsilon > 0,\ \delta > 0\} = \bigcap\{\Omega_{\varepsilon_k,\delta_n},\ k,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Рассмотрим $X \in \bigcap\{\Omega_{\varepsilon_k,\delta_n}\}$. Тогда $\forall \varepsilon_k$ найдется последовательность проекторов $\{P_n^{(k)}\}$ такая, что $m(P_n^{(k)}) > 1 - \delta_n$, $P_n^{(k)} X P_n^{(k)} \in \mathcal{A}$ и $\|P_n^{(k)} X P_n^{(k)}\| < \varepsilon_k$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} m(P_n^{(k)}) = 1.$$

Покажем, что $X \in \mathcal{A}$ и $\|X\| \le \varepsilon_k\sqrt{2}$.

Действительно, пусть сначала $X \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$ и $\{E_\lambda\}$ его спектральное семейство. Предположим, что при $\lambda > \varepsilon_k$ $E_\lambda \ne I$. Тогда $Q = E_\lambda^{\perp} \ne 0$. Кроме того, $QXQ > \lambda Q > \varepsilon_k Q$.

Рассмотрим проекторы $Q_n = P_n \wedge Q$.

Ясно, что $m(Q_n) \to m(Q) \ne 0$. Поэтому найдется такой номер n_0, что при $n \ge n_0$ $Q_n \ne 0$.

Так как $Q_n \le Q$, то $Q_n X Q_n > \lambda Q_n > \varepsilon_k Q_n$.

С другой стороны, $Q_n \le P_n$. Поэтому

$$\|Q_n X Q_n\| \le \|P_n X P_n\| \le \varepsilon_k.$$

Противоречие показывает, что $E_\lambda = I$ при $\lambda > \varepsilon_k$. Аналогично доказывается, что при $\lambda < -\varepsilon_k$ $E_\lambda = 0$. Поэтому $X \in \mathcal{A}$ и $\|X\| \le \varepsilon_k$.

Пусть теперь $X = X_1 + iX_2$, где $X_1 = \frac{1}{2}(X + X^*) = ReX$, $X_2 = \frac{1}{2i}(X - X^*) = ImX$. Тогда $P_n X_1 P_n = \frac{1}{2}(P_n X P_n + P_n X^* P_n)$, $P_n X_2 P_n = \frac{1}{2i}(P_n X P_n - P_n X^* P_n)$.

Поэтому $\|P_n X_1 P_n\| \le \varepsilon_k$ и $\|P_n X_2 P_n\| \le \varepsilon_k$. Следовательно, X_1, $X_2 \in \mathcal{A}$, $\|X_1\| \le \varepsilon_k$ и $\|X_2\| \le \varepsilon_k$, откуда $X \in \mathcal{A}$ и

$$\|X\|^2 = \|X^*X\| = \|X_1^2 + X_2^2\| \le \|X_1^2\| + \|X_2^2\| = \|X_1\|^2 + \|X_2\|^2 \le 2\varepsilon_k^2.$$

Таким образом, $\|X\| \le \varepsilon_k\sqrt{2}$.

Так как k – произвольное и $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $\|X\| = 0$, то есть $X = 0$. □

Из доказанного предложения следует, что множества $\{T + \Omega_{\varepsilon,\delta}\}$, где $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ определяют на $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ топологию τ_d, относительно которой $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ является отделимым топологическим векторным пространством. При этом множества $\{\Omega_{\varepsilon,\delta},\ \varepsilon > 0,\ \delta > 0\}$ образуют базис окрестностей нуля в $(\mathcal{S}(\mathcal{A}), \tau_d)$.

Определение 2. Топология τ_d называется топологией двусторонней сходимости по мере, а сходимость последовательности операторов из $S(\mathcal{A})$ в этой топологии – двусторонней сходимостью по мере.

Итак, последовательность операторов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathcal{A})$ сходится к оператору $T \in S(\mathcal{A})$ двусторонне по мере ($T_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} T$), если для любых положительных чисел ε и δ найдется номер N такой, что $\forall n \geq N$ существует проектор P_n такой, что $m(P_n) > 1 - \delta$, $P_n(T_n - T)P_n \in \mathcal{A}$ и $\|P_n(T_n - T)P_n\| < \varepsilon$.

Из построения топологии τ_d видно, что множества $\{\Omega_{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}}, \ n \in \mathbb{N}\}$ образуют счетный базис окрестностей нуля. Поэтому топологическое пространство $(S(\mathcal{A}), \tau_d)$ метризуемо.

Укажем некоторые свойства двусторонней сходимости по мере.

Свойство 2. *1) Если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathcal{A})$, $T \in S(\mathcal{A})$ и $T_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} T$, то $T_n^* \xrightarrow{\text{д.п.м.}} T^*$.*

2) Если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathcal{A})$, и $T_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$, то $|T_n| \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$.

3) Если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathcal{A})_+$, $T \in S(\mathcal{A})$ и $T_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} T$, то $T \geq 0$.

4) Если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathcal{A})_+$, $S_n \leq T_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $T_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$, то $S_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$.

5) Если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathcal{A})$, $T, S \in S(\mathcal{A})$, $T_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} T$ и $S_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} S$, то $T_nS_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} TS$.

6) Если $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ и $P_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} m(P_n) = 0.$$

7) Если $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ и $P_n \downarrow 0$ то $P_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$.

8) Если $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ и $P_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$, то для любой последовательности $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathcal{A}, m)$

$$T_nP_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0.$$

9) Топологическое пространство $(S(\mathcal{A}), \tau_d)$ полное.

Доказательство. Для односторонней сходимости по мере перечисленные свойства хорошо известны [19], [13]. Ниже мы покажем, что топологии τ и τ_d совпадают. Поэтому ограничимся доказательством свойств 2), 4), 6).

2). Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathcal{A})$ и $T_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует такой номер N, что $\forall n \geq N$ найдется такой проектор $P_n \in \mathcal{A}_P$, что $m(P_n) > 1 - \frac{\delta}{2}$, $P_nT_nP_n \in \mathcal{A}$ и $\|P_nT_nP_n\| < \varepsilon$.

Рассмотрим проекторы $P_{T_n} = I - r(P_n^{\perp}T_n)$ и $Q_n = P_n \wedge P_{T_n}$, где $r(T) = I - \vee\{P \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}} : \ TP = 0\}$ – правый носитель оператора T [2]. Тогда

$$m(Q_n^{\perp}) = m(P_n^{\perp} \vee P_{T_n}^{\perp}) = m(P_n^{\perp}) + m(P_{T_n}^{\perp}) - m(P_n^{\perp} \wedge P_{T_n}^{\perp}) \leq m(P_n^{\perp}) + m(P_{T_n}^{\perp}) = \\ = m(P_n^{\perp}) + m(r(P_n^{\perp}T_n)) \leq m(P_n^{\perp}) + m(P_n^{\perp}) < \delta.$$

Кроме того,

$$T_nQ_n = T_nP_{T_n}Q_n = T_n(I - r(P_n^{\perp}T_n))Q_n = (P_n + P_n^{\perp})T_n(I - r(P_n^{\perp}T_n))Q_n = \\ = P_nT_nQ_n = P_nT_nP_nQ_n.$$

Поэтому $\|Q_n|T_n|Q_n\| = \|Q_n U_n^* T_n Q_n\| = \|Q_n U_n^* P_n T_n P_n Q_n\| \leq \|P_n T_n P_n\| < \varepsilon$, где $T_n = U_n|T_n|$ — полярное разложение оператора T_n с унитарным U_n. Таким образом, $|T_n| \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$.

4). Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathcal{A})_+$, $S_n \leq T_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $T_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется такой номер N, что $\forall n \geq N$ существует проектор P_n такой, что $m(P_n) > 1 - \delta$, $P_n T_n P_n \in \mathcal{A}$ и $\|P_n T_n P_n\| < \varepsilon$. Поэтому $0 \leq P_n S_n P_n \leq P_n T_n P_n$, откуда $P_n S_n P_n \in \mathcal{A}$ и $\|P_n S_n P_n\| \leq \|P_n T_n P_n\| < \varepsilon$. Следовательно $S_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$.

6). Пусть $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ и $P_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$. Предположим, что $m(P_n) \not\to 0$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что существует такое число $\varepsilon > 0$, что $m(P_n) \geq \varepsilon$ для всех n.

Полагая, $\varepsilon_k = \delta_k = \frac{\varepsilon}{k}$, построим последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $n_k \uparrow \infty$ и соответствующую ей последовательность проекторов $\{Q_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $m(Q_{n_k}) > 1 - \frac{\varepsilon}{k}$ и $\|Q_{n_k} P_{n_k} Q_{n_k}\| < \frac{\varepsilon}{k}$.

Следовательно, $Q_{n_k} P_{n_k} Q_{n_k} < \frac{\varepsilon}{k} I$, откуда

$$\begin{aligned}\tfrac{\varepsilon}{k} = m(\tfrac{\varepsilon}{k} I) > m(Q_{n_k} P_{n_k} Q_{n_k}) = m(P_{n_k} Q_{n_k}) = \\ = m(P_{n_k}) - m(P_{n_k} Q_{n_k}^{\perp}) \geq \varepsilon - m(P_{n_k} Q_{n_k}^{\perp}).\end{aligned}$$

С другой стороны, $m(P_{n_k} Q_{n_k}^{\perp}) = m(Q_{n_k}^{\perp} P_{n_k} Q_{n_k}^{\perp}) \leq m(Q_{n_k}^{\perp}) < \frac{\varepsilon}{k}$, то есть

$$\lim_{k\to\infty} m(P_{n_k} Q_{n_k}^{\perp}) = 0.$$

Полученное противоречие показывает, что

$$\lim_{n\to\infty} m(P_n) = 0.$$

□

Теорема 1. *Если $\mathcal{A}$ - конечная алгебра фон Неймана и m - точный нормальный конечный след на $\mathcal{A}$, то топология τ сходимости по мере и топология τ_d двусторонней сходимости по мере совпадают.*

Доказательство. Так как обе топологии метризуемы, то достаточно показать, что

$$(T_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0) \iff (T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} 0).$$

Ясно, что $\tau_d \leq \tau$. Поэтому если $T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} 0$, то $T_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$.

Обратно, пусть $T_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$. Рассмотрим полярное разложение $T_n = U_n|T_n|$ операторов T_n с унитарными U_n. По предложению 2 2) $|T_n| \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим последовательность проекторов

$$E_{n,\varepsilon} = \{|T_n| \geq \varepsilon\} = \vee\{P \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}} : \ P|T_n| = |T_n|P \geq \varepsilon P\}.$$

Тогда $E_{n,\varepsilon}|T_n|E_{n,\varepsilon} \geq \varepsilon E_{n,\varepsilon}$ и потому $E_{n,\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon}|T_n|$. Следовательно, $E_{n,\varepsilon} \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$ (см. предложение 2.). Отсюда $m(E_{n,\varepsilon}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Для произвольного $\delta > 0$ найдется номер N такой, что $m(E_{n,\varepsilon}) < \delta$ при $n \geq N$.

Рассмотрим проекторы $F_n = I - r(E_{n,\varepsilon}|T_n|)$. Тогда

$$m(F_n) = 1 - m(r(E_{n,\varepsilon}|T_n|)) \geq 1 - m(E_{n,\varepsilon}) > 1 - \delta.$$

Кроме того

$$T_nF_n = U_n|T_n|F_n = U_n(E_{n,\varepsilon} + E_{n,\varepsilon}^{\perp})|T_n|F_n =$$
$$= U_nE_{n,\varepsilon}|T_n|(I - r(E_{n,\varepsilon}|T_n|)) + U_nE_{n,\varepsilon}^{\perp}|T_n|F_n = U_nE_{n,\varepsilon}^{\perp}|T_n|E_{n,\varepsilon}^{\perp}F_n.$$

Поэтому, $\|T_nF_n\| = \|U_nE_{n,\varepsilon}^{\perp}|T_n|E_{n,\varepsilon}^{\perp}F_n\| \leq \|E_{n,\varepsilon}^{\perp}|T_n|E_{n,\varepsilon}^{\perp}\| < \varepsilon$.

Таким образом, $T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} 0$.

Следовательно, топологии τ и τ_d совпадают. □

2. Сходимости почти всюду в кольце $S(\mathcal{A})$.

Определение 3. Последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из $S(A)$ сходится к оператору T из $S(A)$ почти всюду ($T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$) , если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ проекторов из $\mathcal{A}_P$ такая, что $P_n \uparrow I$, $(T_n - T)P_n \in \mathcal{A}$ и $\|(T_n - T)P_n\| < \varepsilon$.

Известно,что если $T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$, то $T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T$. Обратно, если $T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T$, то существует такая подпоследовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $T_{n_k} \xrightarrow{\text{п.в.}} T$ [13]. Свойства сходимости почти всюду хорошо известны [17], [19]. Следующий пример показывает, что в общем случае из $T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$ не следует, что $T_n^* \xrightarrow{\text{п.в.}} T^*$.

Пример Пусть $\mathcal{A}$ — фактор типа II_1 и $\mathcal{B}$ — максимальная коммутативная подалгебра в $\mathcal{A}$. Как известно, $\mathcal{B}$ $*$-изоморфна W^* алгебре $L = L_{\infty}([0,\, 1],\, \lambda)$ всех измеримых по Лебегу функций на $[0,\, 1]$ [17]. Поэтому в $\mathcal{B}$ существует последовательность проекторов $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $m(G_n) \to 0$ при $n \to \infty$, но $G_n \overset{\text{п.в.}}{\not\longrightarrow} 0$. Рассмотрим последовательность проекторов $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{A}_P$ такую, что $E_n \downarrow 0$ и $m(G_n) = m(E_n)$.

Пусть $M^Z : \mathcal{A} \to Z(\mathcal{A})$ математическое ожидание алгебры $\mathcal{A}$ на центр Z [6]. Так как $\mathcal{A}$ — фактор, то

$$M^Z(E_n) = m(E_n)I = m(G_n)I = M^Z(G_n).$$

Поэтому $E_n \sim G_n$. Тогда существует последовательность частичных изометрий $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $V_nV_n^* = G_n$ и $V_n^*V_n = E_n$.

Покажем, что $V_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$, но $V_n^* \overset{\text{п.в.}}{\not\longrightarrow} 0$.

Рассмотрим проекторы $P_n = E_n^{\perp}$. Ясно, что $P_n \uparrow I$ и $\|V_nP_n\| = 0$. Следовательно, $V_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$.

Кроме того, $G_nV_n = V_n$, $EV_n^* = V_n^*$, $V_n = V_nE_n$. Допустим, что $V_n^* \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$. Тогда $\forall\varepsilon > 0$ существует проектор H такой, что $m(H) > 1 - \varepsilon$ и $\|HV_n\| \to 0$ при $n \to \infty$ [13]. Следовательно, $\|HV_nV_n^*\| \to 0$, то есть $\|HG_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $\Phi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ математическое ожидание алгебры $\mathcal{A}$ на подалгебру $\mathcal{B}$ [6]. Тогда

$$\|\Phi(H)G_n\| = \|\Phi(HG_n)\| \leq \|HG_n\| \to 0,$$

при $n \to \infty$ и $m(\Phi(H)) = m(H) > 1 - \varepsilon$.

Положим $R = \{\Phi(H) \geq \frac{1}{2}\} = \vee\{F \in \mathcal{B}_P :\ \Phi(H)F \geq \frac{1}{2}F\}$. Тогда

$$1 - \varepsilon \leq m(\Phi(H)R) + m(\Phi(H)R^{\perp}) \leq m(\Phi(HR)) + \tfrac{1}{2}m(R^{\perp}) = m(HR) + \tfrac{1}{2}m(R^{\perp}) =$$
$$m(RHR) + \tfrac{1}{2}m(R^{\perp}) \leq m(R) + \tfrac{1}{2}m(R^{\perp}) = m(R) + \tfrac{1}{2}m(I - R) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}m(R).$$

Следовательно, $m(R) > 1 - 2\varepsilon$. Кроме того, $R \leq 2\Phi(H)$.

Поэтому, $G_nRG_n \leq 2G_n\Phi(H)G_n$ и

$$\|G_nRG_n\| \leq 2\|G_n\Phi(H)G_n\| = 2\|\Phi(H)G_n\| \to 0.$$

то есть $\|G_nR\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Мы получили, что $G_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$ вопреки предположению. Следовательно, $V_n^* \overset{\text{п.в.}}{\not\longrightarrow} 0$.

Приведенный пример показывает, что естественным является такое обобщение понятия сходимости почти всюду, которое было бы $*$-инвариантно и согласовано с порядком. Такой сходимостью является двусторонняя сходимость почти всюду [7].

Определение 4. Последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из $S(A)$ сходится к оператору T из $S(A)$ двусторонне почти всюду ($T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$) , если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ проекторов из $\mathcal{A}_P$ такая, что $P_n \uparrow I$, $P_n(T_n - T)P_n \in \mathcal{A}$ и $\|P_n(T_n - T)P_n\| < \varepsilon$.

Двусторонняя сходимость почти всюду обладает следующими свойствами:

Свойство 3. *1). Если $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$ и λ — комплексное число, то $\lambda T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} \lambda T$.*

2). Если $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$, то $T_n^* \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T^*$.

3). Если $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$, $S_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} S$, то $T_n + S_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T + S$.

4). $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$ тогда и только тогда, когда $ReT_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} ReT$ и $ImT_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} ImT$.

5). Если $A_n, B_n, T_n, T \in S(A)_h$ и $A_n \leq T_n \leq B_n$, $A_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$, $B_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$, то $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$.

6). Пусть $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность попарно ортогональных центральных проекторов из центра $Z(\mathcal{A})$ алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$, такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} E_n = I$ и $T_n, T \in S(A)$. Тогда

$$T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T \iff E_kT_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} E_kT \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

7). Если $T_n, T \in S(\mathcal{A})_n$ и $T_n \uparrow T$, то $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$.

Доказательство. Свойства 1) - 5) проверяются непосредственно. Докажем 6) и 7).

6). Пусть $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность попарно ортогональных проекторов из $Z(\mathcal{A})$ такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} E_n = I$ и пусть $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_P$, такая, что

$$P_n \uparrow I,\ P_n(T_n - T)P_n \in \mathcal{A},\ \|P_n(T_n - T)P_n\| < \varepsilon.$$

Тогда $\forall k$

$$\|P_n(E_kT_n - E_kT)P_n\| = \|E_kP_n(T_n - T)P_nE_k\| \leq \|P_n(T_n - T)P_n\| < \varepsilon.$$

то есть $E_kT_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} E_kT\ \forall k$.

Обратно, пусть $E_kT_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} E_kT\ \forall k$ и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\forall k \in \mathbb{N}$ существует последовательность $\{P_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_P$ такая, что $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P_n^{(k)} \uparrow I,\ P_n^{(k)}E_k(T_n - T)P_n^{(k)} \in \mathcal{A},\ \|P_n^{(k)}E_k(T_n - T)P_n^{(k)}\| < \varepsilon.$$

Рассмотрим проекторы $Q_n = \sum_{k=1}^{\infty} P_n^{(k)} E_k$. Так как $\sum_{k=1}^{\infty} E_k = I$ и $P_n^{(k)} E_k = E_k P_n^{(k)} E_k \uparrow E_k$, то $Q_n \uparrow I$.

Кроме того

$$\|Q_n(T_n - T)Q_n\| = \| \sum_{k=1}^{\infty} P_n^{(k)} E_k(T_n - T) \sum_{k=1}^{\infty} P_n^{(k)} E_k\| =$$
$$\| \sum_{k=1}^{\infty} P_n^{(k)} E_k(T_n - T)E_k P_n^{(k)}\| = \sup_k \|P_n^{(k)} E_k(T_n - T)P_n^{(k)}\| < \varepsilon.$$

Следовательно, $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$.

7). Пусть $T_n, T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$ и $T_n \uparrow T$. Тогда для любого натурального n оператор $T - T_n \geq 0$ и $(T - T_n) \downarrow 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим проекторы $E_{n,\varepsilon} = \{(T - T_n) \geq \varepsilon\} = \vee\{E \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}} : E(T - T_n) = E(T - T_n)E \geq \varepsilon E\}$.

Тогда $E_{n,\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon}(T - T_n)$.

Покажем, что $\frac{1}{\varepsilon}(T - T_n) \xrightarrow{\text{п.м.}} 0$. Для этого рассмотрим в $\mathcal{S}(A)$ обратимый оператор $S = I + \frac{1}{\varepsilon}(T - T_1)$ и положим $S_n = S^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{\varepsilon}(T - T_n))S^{-\frac{1}{2}}$. Тогда $S_n \in \mathcal{A}$, $\|S_n\| \leq 1$ и $S_n \downarrow 0$.

Следовательно, $S_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$ в $L_1(\mathcal{A})$ и потому $S_n \xrightarrow{\text{п.м.}} 0$ [17], [20]. Операция умножения непрерывна относительно сходимости по мере. Поэтому

$$\frac{1}{\varepsilon}(T - T_n) = S^{\frac{1}{2}} S_n S^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{п.м.}} 0.$$

Следовательно, $E_{n,\varepsilon} \xrightarrow{\text{п.м.}} 0$ и значит, $m(E_{n,\varepsilon}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим проекторы $P_n = E_{n,\varepsilon}^{\perp}$. Тогда $m(P_n) \to 1$ при $n \to \infty$. Поэтому существует такая возрастающая последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ индексов, что

$$m(P_{n_k}) > 1 - \frac{1}{2^k}.$$

Обозначим $Q_l = \wedge_{k=l}^{\infty} P_{n_k}$. Покажем, что $Q_l \uparrow I$. Для этого рассмотрим проекторы $Q_l^r = \wedge_{k=l}^{r} P_{n_k}$.

Ясно, что $Q_l^r \downarrow Q_l$ при $r \to \infty$ и $m(Q_l^l) = m(P_{n_l}) > 1 - \frac{1}{2^l}$. Далее,

$$m(Q_l^{l+1}) = m(Q_l^l \wedge P_{n_{l+1}}) = m(Q_l^l) + m(P_{n_{l+1}}) - m(Q_l^l \vee P_{n_{l+1}}) >$$
$$> 1 - \tfrac{1}{2^l} + 1 - \tfrac{1}{2^{l+1}} - 1 = 1 - \left(\tfrac{1}{2^l} + \tfrac{1}{2^{l+1}}\right).$$

Рассуждая аналогично, получим

$$m(Q_l^{l+2}) > 1 - \left(\frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^{l+1}} + \frac{1}{2^{l+2}}\right).$$

Переходя к пределу при $r \to \infty$, получим:

$$m(Q_l) \geq 1 - \sum_{k=l}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

откуда $m(Q_l) \to 1$, при $l \to \infty$.

След m — точный, поэтому $Q_l \uparrow I$. Кроме того $Q_l \leq P_{n_l}$. Значит

$$Q_l(T - T_{n_l})Q_l = Q_l P_{n_l}(T - T_{n_l})P_{n_l} Q_l \in \mathcal{A}$$

и

$$\|Q_l(T-T_{n_l})Q_l\| = \|Q_l E^{\perp}_{n_l,\varepsilon}(T-T_{n_l})E^{\perp}_{n_l,\varepsilon}Q_l\| < \varepsilon.$$

Так как при $n \geq n_l$ $T - T_{n_l} \geq T - T_n$, то $\|Q_l(T-T_n)Q_l\| < \varepsilon$.

Рассмотрим проекторы

$$R_n = \begin{cases} 0, & n < n_1; \\ Q_l, & n_l \leq n < n_{l+1}. \end{cases}$$

Тогда $R_n \uparrow I$, $R_n(T-T_n)R_n \in \mathcal{A}$ и $\|R_n(T-T_n)R_n\| < \varepsilon$.

Таким образом, $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$. □

Непосредственно из определений следует, что если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, $T \subset \mathcal{S}(A)$, то

$$(T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T) \Longrightarrow (T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T) \Longrightarrow (T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T).$$

В работе [13] было доказано, что если $T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T$, то существует подпоследовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $T_{n_k} \xrightarrow{\text{п.в.}} T$. Отсюда, в частности, следует, что если $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$, то существует подпоследовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $T_{n_k} \xrightarrow{\text{п.в.}} T$.

В общем случае сходимости почти всюду и двусторонняя почти всюду не эквивалентны. Ниже будут приведены необходимые и достаточные условия эквивалентности этих сходимостей.

Так как $\mathcal{A}$ – конечная алгебра фон Неймана, то существует единственная последовательность $E_0, E_1, E_2, \dots$ попарно ортогональных проекторов из центра Z алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$ такая, что $\sum_{k=0}^{\infty} E_k = I$, $\mathcal{A}E_n = E_n\mathcal{A}E_n$ – алгебра типа I_n, $(n = 1, 2, \dots)$, $\mathcal{A}E_0 = E_0\mathcal{A}E_0$ - алгебра типа II_1.

Если $E_0 = 0$, то $\mathcal{A}$ называется алгеброй типа I.

Если $E_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{A}$ называется алгеброй типа II [1], [2].

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1). Если $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z(\mathcal{A})$ такая, что $P_n \uparrow I$, $(T_n - T)P_n \in \mathcal{A}$ и $\|(T_n - T)P_n\| < \varepsilon$.

2). $(T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T) \iff (T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T)$

3). $(T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T) \Longrightarrow (T_n^* \xrightarrow{\text{п.в.}} T^*)$

4). $\mathcal{A}$ является алгеброй типа I.

Доказательство. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) очевидны. Импликацию 3) $\Rightarrow$ 4) докажем от противного. Пусть условие 3) выполнено, но $\mathcal{A}$ не является алгеброй типа I. Тогда существует центральный проектор $E_0 \neq 0$, такой, что $\mathcal{A}E_0$ – алгебра типа II_1.

В силу пункта 6) предложения 3.4. без ограничения общности можно считать, что $E_0 = I$, то есть сама алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ является алгеброй типа II_1. Тогда существует проектор $P_1 \in \mathcal{A}_P$ такой, что $P_1 \sim I - P_1$.

Обозначим $P_1^{(1)} = P_1$, $P_2^{(1)} = I - P_1$ и $\sigma_1 = \{P_1^{(1)}, P_2^{(1)}\}$.

Пусть $M^Z : \mathcal{A} \to Z$ математическое ожидание алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$ на ее центр Z. Тогда $M^Z(P_1^{(1)}) = M^Z(P_2^{(1)}) = \frac{1}{2}I$.

Так как проекторы $P_1^{(1)}$ и $P_2^{(1)}$ ненулевые, то существуют такие проекторы P_2 и Q_2, что

$$P_2 < P_1^{(1)},\ P_2 \sim P_1^{(1)} - P_2,\ Q_2 < P_2^{(1)},\ Q_2 \sim P_2^{(1)} - Q_2.$$

Обозначим

$$P_1^{(2)} = P_2,\ P_2^{(2)} = I - P_2,\ P_3^{(2)} = Q_2,\ P_4^{(2)} = I - Q_2$$

и $\sigma_2 = \{P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, P_3^{(2)}, P_4^{(2)}\}$.

Ясно, что $M^Z(P_k^{(2)}) = \frac{1}{2^2}I$, $(k = 1, 2, 3, 4.)$

Продолжая процесс, мы по каждому натуральному числу n построим семейство проекторов

$$\sigma_n = \{P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, \dots, P_{2^n}^{(n)}\}$$

такое, что проекторы из σ_n попарно ортогональны, попарно эквивалентны, $\sum_{k=1}^{2^n} P_k^{(n)} = I$ и $M^Z(P_k^{(n)}) = \frac{1}{2^n}I$, $(k = 1, 2, \dots, 2^n.)$

Семейство $\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ порождает в $\mathcal{A}$ коммутативную подалгебру фон Неймана $\mathcal{B}$.

Рассмотрим коммутативную W^* алгебру $L = L_\infty([0, 1], \lambda)$ всех измеримых по Лебегу функций на $[0, 1]$. Пусть $\chi_k^{(n)}$ — характеристическая функция отрезка $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$.

Соответствие $P_k^{(n)} \longleftrightarrow \chi_k^{(n)}$ однозначно продолжается до $*$-изоморфизма алгебр $\mathcal{B}$ и L. Кроме того, для любых n и k и любого центрального проектора E

$$m(P_k^{(n)}E) = m(M^Z(P_k^{(n)}E)) = m(M^Z(P_k^{(n)})E) =$$
$$= m\left(\tfrac{1}{2^n}IE\right) = \tfrac{1}{2^n}m(E) = m(P_k^{(n)})m(E).$$

Поэтому, для любых $P \in \mathcal{B}_P$ и $E \in Z_{\mathcal{P}}$

$$m(PE) = m(P)m(E).$$

В частности, $M^Z(P) = m(P)I$ для любого $P \in \mathcal{B}_P$.

Так как $\mathcal{B}$ $*$-изоморфна $L = L_\infty([0, 1], \lambda)$, то в $\mathcal{B}$ существует последовательность проекторов $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $m(G_n) \downarrow 0$, но $G_n \overset{\text{п.в.}}{\not\longrightarrow} 0$ в $\mathcal{B}$.

Рассмотрим последовательность проекторов $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}_P$ такую, что $E_n \downarrow 0$ и $m(E_n) = m(G_n)$. Тогда

$$M^Z(E_n) = m(E_n)I = m(G_n)I = M^Z(G_n).$$

Поэтому $E_n \sim G_n$ и значит существует последовательность частичных изометрий $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $V_nV_n^* = G_n$, $V_n^*V_n = E_n$, $V_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$, но $V_n \overset{\text{п.в.}}{\not\longrightarrow} 0$ (см. пример).

Противоречие показывает, что $\mathcal{A}$ — алгебра типа I.

Докажем импликацию 4) $\Rightarrow$ 1).

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра фон Неймана типа I, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, $T \subset \mathcal{S}(A)$ и $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность проекторов $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_P$, что $Q_n \uparrow I$ при $n \to \infty$, $Q_n(T_n - T)Q_n \in \mathcal{A}$ и $\|Q_n(T_n - T)Q_n\| < \varepsilon$.

Так как $\mathcal{A}$ — алгебра типа I, то существует последовательность $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ попарно ортогональных проекторов из центра $Z(\mathcal{A})$ такая, что $\sum_{k=1}^{\infty} E_k = I$ и $\mathcal{A}E_k$ — алгебра типа I_k.

В силу п.6) предложения 3 можно считать, что сама алгебра $\mathcal{A}$ типа I_k. Тогда существует k попарно ортогональных, эквивалентных друг другу абелевых проектора $F_1, \ldots, F_k$ таких, что их центральные носители $Z(F_i) = I$ и $\sum_{i=1}^{\infty} F_i = I$.

Пусть $M^Z : \mathcal{A} \to Z$ математическое ожидание $\mathcal{A}$ на Z. Рассмотрим центральные проекторы

$$
\begin{gathered}
Z_0^{(n)} = \vee\{R \in Z_{\mathcal{P}} : \ Q_n R = 0\}, \\
Z_1^{(n)} = \vee\{R \in Z_{\mathcal{P}} : \ Q_n R \sim F_1 R\}, \\
Z_2^{(n)} = \vee\{R \in Z_{\mathcal{P}} : \ Q_n R \sim (F_1 + F_2) R\}, \\
\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\
Z_k^{(n)} = \vee\{R \in Z_{\mathcal{P}} : \ Q_n R \sim (F_1 + F_2 + \cdots + F_k) R\}.
\end{gathered}
$$

Проекторы $Z_0^{(n)}, Z_1^{(n)}, \ldots, Z_k^{(n)}$ попарно ортогональны, $\sum_{i=0}^{k} Z_i^{(n)} = Z(Q_n) = I$ - центральный носитель Q_n и $M^Z(Q_n) = \sum_{i=0}^{k} \frac{i}{k} Z_i^{(n)}$.

Пусть $P_n = Z_k^{(n)} = \vee\{R \in Z_{\mathcal{P}} : \ Q_n R \sim R\}$. Покажем, что $P_n \uparrow I$. Действительно, так как $Q_n \uparrow I$, то $M^Z(Q_n) \uparrow I$, откуда $m(M^Z(Q_n)) \uparrow 1$.

Ясно, что $M^Z(Q_n)(I - P_n) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)(I - P_n)$. Поэтому

$$
\begin{gathered}
m(M^Z(Q_n)) = m(M^Z(Q_n)(I - P_n)) + m(M^Z(Q_n)P_n) \leq \\
\leq \left(1 - \tfrac{1}{k}\right) m(I - P_n) + m(P_n) = 1 - \tfrac{1}{k} m(I - P_n).
\end{gathered}
$$

Следовательно $\frac{1}{k} m(I - P_n) \leq 1 - m(M^Z(Q_n))$.

Таким образом, $m(I - P_n) \to 0$ и значит $P_n \uparrow I$. Кроме того, $P_n \leq Q_n$, $P_n(T_n - T)P_n = (T_n - T)P_n \in \mathcal{A}$ и $\|P_n(T_n - T)P_n\| = \|(T_n - T)P_n\| \leq \|Q_n(T_n - T)Q_n\| < \varepsilon$, то есть условие 1) выполнено. □

В заключении рассмотрим вопрос об эквивалентности сходимостей двусторонней почти всюду и сходимости по мере. Падманабхан в [13] доказал, что сходимости почти всюду и по мере эквивалентны тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ дискретная. Аналогичный результат имеет место и для двусторонних сходимостей. Напомним, что алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ дискретна, если каждый проектор $P \in \mathcal{A}$ мажорирует минимальный проектор.

Теорема 3. *Двусторонняя сходимость почти всюду, односторонняя сходимость почти всюду и сходимость по мере эквивалентны тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ дискретна.*

Доказательство. Если алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ дискретна, то по теореме 3.2 [13] $(T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T) \Longleftrightarrow (T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T)$. Но $(T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T) \Rightarrow (T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T) \Rightarrow (T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T)$, поэтому все эти сходимости эквивалентны. Допустим, что алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ не является дискретной. Тогда $\mathcal{A}$ содержит коммутативную подалгебру фон Неймана $\mathcal{B}$, $*$-изоморфную $L^\infty([0, 1], \lambda)$, где λ — мера Лебега на $[0, 1]$ [9]. Поэтому в $\mathcal{B}$ существует последовательность проекторов $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $G_n \xrightarrow{\text{п.м.}} 0$, но $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится к нулю почти всюду в $\mathcal{B}$. Покажем, что $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится к нулю и двусторонне почти всюду в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. Действительно, если $G_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} 0$ в $\mathcal{A}$, то $G_n \xrightarrow{(o)} 0$

в $\mathcal{A}$ [11]. Следовательно, существует убывающая к нулю последовательность положительных операторов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $\mathcal{A}$ такая, что

$$G_n \le T_n.$$

Расмотрим математическое ожидание $\Phi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ [6]. Тогда $G_n = \Phi(G_n) \le \Phi(T_n)$ и $\Phi(T_n) \downarrow 0$. Следовательно, $G_n \xrightarrow{(o)} 0$ в $\mathcal{B}$. Но тогда $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ должна сходиться к нулю почти всюду, что невозможно ввиду выбора последовательности $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$. Следовательно, $G_n \overset{\text{д.п.в.}}{\not\longrightarrow} 0$ в $\mathcal{A}$. Тогда $G_n \overset{\text{д.п.в.}}{\not\longrightarrow} 0$ в $\mathcal{S}(A)$. Таким образом, $G_n \xrightarrow{\text{п.м.}} 0$ в $\mathcal{S}(A)$ и $G_n \overset{\text{д.п.в.}}{\not\longrightarrow} 0$. Противоречие показывает, что $\mathcal{A}$ – дискретная. □

Список литературы

[1] Диксмье Ж. *C^*-алгебры и их представления*, Москва, Наука, 1974, 400 с.

[2] Stratila S., Zsido L. *Lectures on von Neumann algebras, England Abacus Press*, 1975, 478 p.

[3] Takesaki M. *Theory of operator algebras I*.- New York: Springer, 1979.- 415 p.

[4] Fack T., Kosaki H. *Generalized s-numbers of τ-mesaurable operators* // Pacific J. Math.- 1986.- V. 123.- P. 269–300.

[5] Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Д., Чилин В. И., *Упорядоченные алгебры*.- Ташкент: ФАН, 1983.- 303 с.

[6] Arveson W. *Analyticity in operator algebras*, *Amer. J. Math.*, **89**, 578–642 (1967).

[7] Муратов М.А. *Сходимость в кольце измеримых операторов*, *Функ. Анализ*, сб. научных трудов ТашГУ, No. 573, 51–58 (1978).

[8] Муратов М.А. *Сходимость в кольце измеримых операторов*, *ДАН УзССР*, No. 3, 6-7 (1979).

[9] Муратов М.А. *Сходимость почти всюду и по мере в кольце измеримых операторов*, в кн.: Математический анализ и геометрия, *труды ТашГУ*, 47–52 (1980).

[10] Муратов М.А. *Некоторые вопросы сходимости последовательностей неограниченных операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана* // Труды Украинского Математич. Конгресса.- Киев - (в печати).

[11] M.A.Muratov *Order properties of convergent sequences of unbounded measurable operators affiliated to a finite von Neumann algebra* // Methods Funct. Anal. Topology -2002.-. **8**, № 3.- P. 50-60.

[12] Чилин В.И. *Топологические O^*-алгебры* // Функциональный анализ и его приложения.- 1980.- **Т. 14**, вып. 1.- С. 87-88.

[13] Padmanabhan A.R. *Convergence in measure and related results in finite rings of operators*, *Tranc. Amer. Math. Soc.*, No. 128, 359–388 (1967).

[14] Paszkiewicz A. *Convergence almost everywhere in W^*-algebras*, *Lect. Notes. Math.*, **1136**, 420-427 (1985).

[15] Paszkiewicz A. *Convergences in W^*-algebras*, *J. Funct. Anal.*, **69**, 143–154 (1986).

[16] Sankaran S. *Stohastic convergence for operators*, *Quart. J. Math.*, **ser. 2**, No. 15, 97-102 (1964).

[17] Segal I.E. *A non-commutative extension of abstract integration*, *Ann. Math.*, No. 57, 401-457 (1953).

[18] Stinespring W.E. *Integration theorems for gages and duality for unimodular groups*, *Tranc. Amer. Math. Soc.*, No. 90, 15–56 (1959).

[19] Yeadon F.J. *Convergence of measurable operators*, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, No. 74, 257–268 (1973).

[20] Yeadon F.J. *Non-commutative L^p-spaces*, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, No. 77, 91–102 (1975).