Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2002) 31 – 39

УДК 517.98

А.А. Кириченко

ПРО ЛІНІЙНІ КОМБІНАЦІЇ ОРТОПРОЕКТОРІВ

1. Задачі про лінійні комбінації ортопроекторів (надалі просто проекторів), що дорівнюють одиничному оператору, розглядалися різними авторами (див., наприклад, [1, 2, 3] та ін.) та мають численні застосування в теорії операторів, математичній фізиці, топології тощо.

У статті вивчаються n-ки проекторів $P_1, P_2, ..., P_n$ у комплексному гільбертовому просторі H, такі що $\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i = I_H$ (I_H – одиничний оператор, $\alpha_i > 0$), та їх застосування до опису самоспряжених операторів, що мають дві точки спектру та є сумою трьох ортопроекторів. Матеріал зручно викладати на мові теорії зображень *-алгебр породжених проекторами.

2. **Функтори Кокстера.** Нехай $\mathfrak{A}_{n,\vec{\alpha}} = \mathfrak{C}\langle p_1, p_2, ..., p_n | p_i^2 = p_i = p_i^*, \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i = e\rangle$ *-алгебра, де вектор $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i > 0, i = 1, ..., n$; $A = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. В роботі вивчаються зображення алгебри $\mathfrak{A}_{n,\vec{\alpha}}$, з точністю до унітарної еквівалентності, в категорії гільбертових просторів. Покладемо $\Sigma_n = \{\vec{\alpha} : \forall \alpha_i > 0,\ * - Rep\mathfrak{P}_{n,\vec{\alpha}} \neq \emptyset\}$ і $\Sigma_n^1 = \{\alpha \in \Sigma_n : 0 < \alpha_i < 1\}$.

Нижче ми опишемо функтори Кокстера (введені в [4]), корисні при описі множини Σ_n, та наведемо деякі їхні властивості (слідуючи [5]).

Введемо функтор T (функтор гіперболічного відображення).

Нехай π не нульове зображення алгебри $\mathfrak{A}_{n,\vec{\alpha}}$, де $A \neq 1$, тоді $\sum_{i=1}^n \alpha_i \pi(p_i) = I$. Звідки, $\sum_{i=1}^n \alpha_i (I - \pi(p_i)) = (A-1)I$, $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{A-1}(I - \pi(p_i)) = I$. Покладемо $T(\pi)(p_i) = I - \pi(p_i)$. Не складно перевірити, що функтор $T : Rep\mathfrak{A}_{n,(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)} \to Rep\mathfrak{A}_{n,(\frac{\alpha_1}{A-1}, \frac{\alpha_2}{A-1}, ..., \frac{\alpha_n}{A-1})}$ здійснює еквівалентність категорій.

Твердження 1. Якщо $\vec{\alpha} : \alpha_i > 0$ і $A < 1$, то $\vec{\alpha} \notin \Sigma_n$.

Доказательство. Нехай $\sum_{i=1}^n \alpha_i \pi(p_i) = I$, то $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{A-1}(I - \pi(p_i)) = I$, де всі $\frac{\alpha_i}{A-1} < 0$. Оператор в лівій частині рівності від'ємно-визначений, а в правій додатній. Отримано протиріччя. □

Зауваження 1. Якщо $\vec{\alpha} \in \Sigma_n, A \neq 1$, то $T(\vec{\alpha}) \in \Sigma_n$.

Визначимо функтор S (функтор лінійного відображення).

Нехай $\vec{\alpha} \in \Sigma_n^1$, $\pi : \mathfrak{A}_{n,\vec{\alpha}} \to L(H)$ зображення алгебри і $\pi(p_i) = P_i$. Так як P_i проектор, то $P_i = \Gamma_i \Gamma_i^*$, де Γ_i часткова ізометрія простору $H_i = ImP_i$ у простір H, при цьому $\Gamma_i^* \Gamma_i = I_{H_i}$.

Розглянемо оператор

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1}\Gamma_1 & \sqrt{\alpha_2}\Gamma_2 & \ldots & \sqrt{\alpha_n}\Gamma_n \end{pmatrix} : H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_n \to H.$$

Так як $\Gamma\Gamma^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Gamma_i \Gamma_i^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \pi(p_i) = I_H$, то Γ^* є частковою ізометрією простору $Im(\Gamma)$ в простір H . Нехай Δ^* природня ізометрія простору $(Im\Gamma)^{\perp}$ в простір $H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_n$, тоді оператор $U = \begin{pmatrix} \Gamma \\ \Delta \end{pmatrix}$ є унітарним оператором з простору $H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_n$ у простір $ImH \oplus (ImH)^{\perp}$.

Оператори U і Δ визначені на просторі $H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_n$ і, тому мають пірсівський розклад

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1}\Gamma_1 & \sqrt{\alpha_2}\Gamma_2 & ... & \sqrt{\alpha_n}\Gamma_n \\ \sqrt{1-\alpha_1}\Delta_1 & \sqrt{1-\alpha_2}\Delta_2 & ... & \sqrt{1-\alpha_n}\Delta_n \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\alpha_1}\Delta_1 & \sqrt{1-\alpha_2}\Delta_2 & ... & \sqrt{1-\alpha_n}\Delta_n \end{pmatrix}.$$

Так як U є унітарним оператором і $\Gamma_i^*\Gamma_i = I_{H_i}$, то можна пересвідчитись, що $\Delta_i^*\Delta_i = I_{H_i}$ і $\Delta_i\Delta_i^* = Q_i$ є ортопроекторами в просторі $Im(\Gamma)$. З того, що $\Delta\Delta^* = I_{Im\Gamma}$ випливає $\sum_{i=1}^n (1-\alpha_i)\Delta_i\Delta_i^* = I_{Im\Gamma}$ і, остаточно, $\sum_{i=1}^n (1-\alpha_i)Q_i = I_{Im\Gamma}$.

Визначимо $S : \pi \to \hat{\pi}$, де $\hat{\pi}(p_i) = Q_i$. З умови $\sum_{i=1}^n (1-\alpha_i)Q_i = I$, маємо, $\hat{\pi} \in ObRep\mathfrak{A}_{n,(1-\alpha_1,1-\alpha_2,...,1-\alpha_n)}$. Можна показати, що функтор $S : Rep\mathfrak{A}_{n,(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)} \to Rep\mathfrak{A}_{n,(1-\alpha_1,1-\alpha_2,...,1-\alpha_n)}$, де $0 < \alpha_i < 1$ (звідки, $0 < A < n$) є функтором еквівалентності категорій.

Назвемо вектор $(d; d_1, d_2, ..., d_n)$, де $d = dimH$, $d_i = dimIm\pi(p_i)$, узагальненою розмірністю зображення π в просторі H (для скінченно-вимірного зображення).

Функтори T і S індукують дію на множинах векторів $\vec{\alpha}$, на сумах їх координат A і на узагальнених розмірностях зображень алгебри $\mathfrak{P}_{n,\vec{\alpha}}$.

Нескладно перевірити, що

$$T(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (\frac{\alpha_1}{A-1}, \frac{\alpha_2}{A-1}, ..., \frac{\alpha_n}{A-1}),\ T(A) = \frac{A}{A-1},$$

$$T(d; d_1, d_2, ..., d_n) = (d; d-d_1, d-d_2, ..., d-d_n);$$

$$S(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (1-\alpha_1, 1-\alpha_2, ..., 1-\alpha_n), S(A) = n - A,$$

$$S(d; d_1, d_2, ..d_n) = (\sum_{i=1}^n d_i - d; d_1, d_2, ..., d_n).$$

Визначимо функтор Коксетера $\Phi^+ = TS$ і $\Phi^- = ST$. Так як $T^2 = Id$ і $S^2 = Id$, то $\Phi^+\Phi^- = Id$ і $\Phi^-\Phi^+ = Id$.

Покладемо $\Phi^{+(k)} = (\Phi^+)^k$.

Твердження 2. Нехай $\vec{\alpha} \in \Sigma_n \setminus \Sigma_n^1$, тоді існує такий набір номерів $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n$, $k < n$, що $\vec{\alpha}' = (\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_k}) \in \Sigma_k$, і при цьому, якщо $\alpha_{i_0} > 1$, то відповідний проектор є нульовим для будь-якого зображення алгебри.

Доказательство. При $\exists i_0 : \alpha_{i_0} = 1$ твердження очевидне.

Якщо $\exists i_0 : \alpha_{i_0} > 1$, то $\forall \pi : \sum_{i \ne i_0} \alpha_i\pi(p_i) = I - \alpha_{i_0}\pi(p_{i_0})$, де оператор в лівій частині додатній. Оператор в правій частині додатній лише, коли $\pi(p_{i_0}) = 0$. Звідки, $\vec{\alpha}' = (\alpha_1, ..., \alpha_{i_0-1}, \alpha_{i_0+1}, ..., \alpha_n) \in \Sigma_{n-1}$. □

Твердження 3. Якщо $\vec{\alpha} : A > n-1$, тоді $\vec{\alpha} \notin \Sigma_n^1$.

Доказательство. Припустимо, що $\vec{\alpha} \in \Sigma_n^1$, $A > n-1$, тоді $n-1 < A < n$ і $0 < S(A) = n - A < 1$, звідки, за твердженням 1 $S(\vec{\alpha}) \notin \Sigma_n^1$ і, тому $\vec{\alpha} \notin \Sigma_n^1$. □

Означення 1. $\vec{\alpha} \in \Sigma_n^1$ назвемо таким, що задовільняє S-умові, якщо або $A = 1$, або $T(\vec{\alpha}) \notin \Sigma_n^1$.

Цю множину позначатимемо далі $\Sigma_{n,S}$.

Зауважимо, що множина $\Sigma_{n,S}$ складається з точок Σ_n^1, що не належать області визначення відображення Φ^-. Звідки, маємо $\Sigma_{n,S} \bigcap \Phi^+(\Sigma_{n,S}) = \emptyset$.

Твердження 4. Якщо $A > n-1$, то $T(A) \in (1, 1 + \frac{1}{n-2})$;

Наслідок 1. $\vec{\alpha} : A \in [1, 1 + \frac{1}{n-2})$, то $\vec{\alpha}$ задовільняє S-умові.

Твердження 5. 1) $\Phi^+(1) = 1 + \frac{1}{n-2}$;

2) $\Phi^{+(k)}(1) \leq \Phi^{+(k+1)}(1)$;

3) $\lim_{k\to\infty} \Phi^{+(k)}(1) = \frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}$;

4) $\bigcup_{k\geq 1}[\Phi^{+(k-1)}(1), \Phi^{+(k)}(1)) = [1, \frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2})$.

Доказательство. Твердження випливає з того факту, що функція $\Phi^+(A) = 1 + \frac{1}{(n-A)-1}$ на інтервалі $[1, 2]$ є зростаючою і обмеженою числом 2, тому границя послідовністі a існує і є фіксованою точкою функції $\Phi^+(.)$. З рівняння $1 + \frac{1}{n-a-1} = a$ (враховуючи, що $a < 2$) маємо, що $a = \frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}$. □

Твердження 6. Під дією відображення T (або S) відрізок, що належить області визначення відображення, переходить у відрізок, що належить області визначення відображення.

Доказательство. Доведемо твердження для гіперболічного відображення.

Нехай $I = \{\vec{\alpha} = (\alpha_1 + a_1 t, ..., \alpha_n + a_n t) : A_{\vec{\alpha}} > 1, t \in (0,1)\}$ деякий відрізок, що складається з точок, які належать Σ_n, тоді множина точок

$T(\vec{\alpha}) = (\frac{\alpha_1 + a_1 t}{\sum \alpha_i + \sum a_i t - 1}, ..., \frac{\alpha_n + a_n t}{\sum \alpha_i + \sum a_i t - 1}), \vec{\alpha} \in I$, є підмножиною області визначення відображення T.

1) Якщо $\sum a_i = 0$, то $T(\vec{\alpha}) = (\frac{\alpha_1 + a_1 t}{\sum \alpha_i - 1}, ..., \frac{\alpha_n + a_n t}{\sum \alpha_i - 1}) = (\frac{\alpha_1}{\sum \alpha_i - 1} + \frac{a_1}{\sum \alpha_i - 1} t, ..., \frac{\alpha_n}{\sum \alpha_i - 1} + \frac{a_n}{\sum \alpha_i - 1} t)$, очевидно, в даному випадку точки $T(\vec{\alpha}), \vec{\alpha} \in I$ утворюють відрізок.

2) Якщо $\sum a_i \neq 0$, то

$T(\vec{\alpha}) = (\frac{a_1}{\sum a_i} + (\alpha_1 + a_1 \frac{1 - \sum \alpha_i}{\sum a_i}) \frac{1}{\sum \alpha_i + \sum a_i t - 1}, ..., \frac{a_n}{\sum a_i} + (\alpha_n + a_n \frac{1 - \sum \alpha_i}{\sum a_i}) \frac{1}{\sum \alpha_i + \sum a_i t - 1})$.

Поклавши $\tilde{\alpha}_j = \frac{a_j}{\sum a_i}$, $\tilde{a}_j = \alpha_j + a_j \frac{1 - \sum \alpha_i}{\sum a_i}$, $\tilde{t} = \frac{1}{\sum \alpha_i + \sum a_i t - 1}$, бачимо, що точки $T(\vec{\alpha}) = (\tilde{\alpha}_1 + \tilde{a}_1 \tilde{t}, ..., \tilde{\alpha}_n + \tilde{a}_n \tilde{t})$, де $\tilde{t} \in [\frac{1}{\sum(\alpha_i + a_i) - 1}, \frac{1}{\sum \alpha_i - 1}]$, також утворюють відрізок. □

3. **Опис** $\Sigma_n, n \leq 4$. Очевидно, що $\Sigma_2 = \{\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 = 1$, або $\alpha_2 = 1$, або $\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_i > 0\}$ і $\forall \vec{\alpha} \in \Sigma_2$ незвідні зображення алгебри $\mathfrak{A}_{\vec{\alpha}}$ є одновимірними.

Твердження 7. Нехай $\vec{\alpha} \in \Sigma_3$, тоді можливий тільки один з трьох випадків:

1) при $A = 1$ існує єдине незвідне зображення $\forall i : \pi(p_i) = 1$;

2) при $\vec{\alpha} \in (0,1)^3$ і $A = 2$ існує єдине незвідне зображення з узагальненою розмірністю $(2; 1, 1, 1)$;

3) якщо $\exists J \subsetneq \{1, 2, 3\} : \sum_{i \in J} \alpha_i = 1$, то існує одновимірне зображення $\pi(p_i) = 1, i \in J$ та $\pi(p_i) = 0, i \notin J$.

Інших незвідних зображень алгебра $\mathfrak{A}_{\vec{\alpha}}$ не має.

Доказательство. При $A < 1$ ненульових незвідних зображень алгебра не має.

1) Очевидно, при $A = 1$ існує єдине незвідне одновимірне зображення для якого всі $\pi(p_i) = 1$.

2) Якщо $A = 2$ і $\alpha_{i_0} > 1$, тоді $\pi(p_{i_0}) = 0$ і $\sum_{i\neq i_0}\alpha_i = A - \alpha_{i_0} < 1$. Звідки, $\pi(p_i) = 0, i \neq i_0$. Отже, $\vec{\alpha} \notin \Sigma_3$. Якщо $A = 2$ і $\vec{\alpha} \in (0,1)^3$, тоді $A_{T(\vec{\alpha})} = 1$. Отже, функтор T здійснює ізоморфізм категорій зображень алгебр для яких $A = 1$ з категоріями зображень алгебр для яких $A = 2, \vec{\alpha} \in (0,1)^3$. Оскільки, при $A = 1$ існує єдине незвідне зображення з узагальненою розмірністю $\vec{d} = (1;1,1,1)$, то при $A = 2 = T(1)$ існує єдине незвідне зображення з узагальненою розмірністю $T(\vec{d}) = (2;1,1,1)$.

3) При $A > 2$, то за твердженням 3 $\vec{\alpha} \notin \Sigma_3^1$, тобто існує $\alpha_{i_0} \geq 1$. Тоді

a) Якщо для деякого незвідного зображення $\pi(p_{i_0}) \neq 0$, то згідно з твердженням 2 $\alpha_{i_0} = 1$ і при цьому $\pi(p_{i_0}) = 1$, $\pi(p_i) = 0, i \neq i_0$.

b) Якщо для деякого незвідного зображення $\pi(p_{i_0}) = 0$, то вектор $\vec{\alpha}'$ утворений з $\vec{\alpha}$ опусканням координати α_{i_0} належить Σ_2 і тоді або $\alpha_{j_0} = 1$, для деякого $j_0 \neq i_0$ (отримуємо випадок a)), або $\sum_{i\neq i_0}\alpha_i = 1$ і, тоді $\pi(p_i) = 1, i \neq i_0$.

Розглянемо випадок, коли $1 < A < 2$, тоді $T(A) = \frac{A}{A-1} > 2$. Отже, функтор T здійснює ізоморфізм категорій зображень алгебр для яких $1 < A < 2$ з категоріями зображень алгебр для яких $A > 2$.

Якщо $\vec{\alpha} : A > 2$ і $\alpha_{i_0} = 1$, то відповідна алгебра має незвідне зображення з узагальненою розмірністю $d : d_0 = 1, d_{i_0} = 1, d_j = 0, j \neq i_0$, і для вектора $T(\vec{\alpha}) = (\frac{\alpha_1}{\sum_{i\neq i_0}\alpha_i}, \frac{\alpha_2}{\sum_{i\neq i_0}\alpha_i}, \frac{\alpha_3}{\sum_{i\neq i_0}\alpha_i})$ сума двох координат з номерами вімінними від i_0 дорівнює 1, при цьому відповідне незвідне зображення алгебра має в узагальненій розмірності $T(d) : d_0 = 1, d_{i_0} = 0, d_j = 1, j \neq i_0$.

Якщо $\vec{\alpha} : A > 2$ і $\sum_{i\neq i_0}\alpha_i = 1$, то відповідна алгебра має незвідне зображення з узагальненою розмірністю $d : d_0 = 1, d_{i_0} = 0, d_j = 1, j \neq i_0$, і для вектора $T(\vec{\alpha})$ координата з номером i_0 дорівнює 1, при цьому відповідне зображення алгебра має в узагальненій розмірності $T(d) : d_0 = 1, d_{i_0} = 1, d_j = 0, j \neq i_0$. □

Твердження 8. Нехай $\vec{\alpha} \in \Sigma_4 \backslash (0,1)^4$. Тоді

1) якщо $\exists J \subset \{1,2,3,4\} : \sum_{i\in J}\alpha_i = 1$ та $\exists j : \alpha_j \geq 1$, то існує незвідне зображення $\pi(p_i) = 1, i \in J; \pi(p_j) = 0, j \notin J$.

2) якщо $\exists i_0 : \sum_{i\neq i_0}\alpha_i = 2, \forall i \neq i_0 : \alpha_i < 1, \alpha_{i_0} \geq 1$, то існує двовимірне зображення при якому всі проектори $\pi(p_i), i \in J$ є проекторами на простір розмірності один, а $\pi(p_{i_0}) = 0$.

Інших незвідних зображень алгебра $\mathfrak{A}_{\vec{\alpha}}$ не має.

Доказательство. Нехай $\vec{\alpha} \in \Sigma_4 \backslash (0,1)^4 : \alpha_{i_0} \geq 1$. Якщо $\alpha_{i_0} = 1$, тоді для будь-якого незвідного зображення π: $\pi(p_{i_0})$ дорівнює 0 або 1. Якщо $\alpha_{i_0} > 1$ для будь-якого незвідного зображення π: $\pi(p_{i_0}) = 0$. З того, що $\pi(p_{i_0}) = 1$ і $\alpha_{i_0} = 1$, випливає, що $\forall i \neq i_0 : \pi(p_i) = 0$. Якщо $\pi(p_j) = 0$, тоді вектор $\vec{\alpha}'$ утворений з $\vec{\alpha}$ опусканням координати α_j належить Σ_3. Залишається застосувати твердження 2 до $\vec{\alpha}'$. □

Як наслідок з попереднього твердження отримуємо опис $\Sigma_{4,S}$:

Твердження 9. Нехай $\vec{\alpha} \in \Sigma_{4,S}$ і $\vec{\alpha}$ має координати $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k, \alpha_l$, тоді $\vec{\alpha} \in \Sigma_4^1, \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k + \alpha_l < 2$ і для алгебри $\mathfrak{A}_{4,\vec{\alpha}}$:

1) при $A = 1$ існує єдине незвідне зображення і його узагальнена розмірність $(1; 1, 1, 1, 1)$;

2) при $\alpha_i + \alpha_j = 1, \alpha_i + \alpha_k + \alpha_l \leq 1$ існує незвідне зображення $\pi : \pi(p_i) = \pi(p_j) = 1, \pi(p_k) = \pi(p_l) = 0$;

3) при $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k = 1$ існує одновимірне зображення $\pi : \pi(p_i) = \pi(p_j) = \pi(p_k) = 1, \pi(p_l) = 0$;

4) при $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k = 2(1 - \alpha_l)$, $(\frac{\alpha_i}{A-1}, \frac{\alpha_j}{A-1}, \frac{\alpha_k}{A-1}) \in (0,1)^3$, $\frac{1}{2} \leq \alpha_l < 1$ існує незвідне двовимірне зображення π таке, що проектори $\pi(p_i), \pi(p_j), \pi(p_k)$ є проекторами на простір розмірності 1 і $\pi(p_l) = I$.

Твердження 10. Нехай $\vec{\alpha} \in \Sigma_4^1, 1 \leq A < 2$, тоді для деякого $k_0 \geq 0 : \Phi^{-(k_0)}(\vec{\alpha})$ задовільняє S-умові.

Доказательство. При $A = 1$ вектор $\vec{\alpha}$ задовільняє S-умові за означенням. Так як $\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}|_{n=4} = 2$, то згідно з твердженням 5 $A_{\vec{\alpha}} \in [\Phi^{+(N)}(1), \Phi^{+(N+1)}(1))$ для деякого $N \geq 0$, тоді або $A_{\Phi^{-(N)}(\vec{\alpha})} \in [1, 1 + \frac{1}{n-2})$ і $\Phi^{-(N)}(\vec{\alpha})$ редукований, або для деякого $k_0 \leq N$ вектор $\Phi^{-(k_0)}(\vec{\alpha})$ не належить області визначення функтора Φ^-. Це можливо тільки тоді, коли вектор $T\Phi^{-(k_0)}(\vec{\alpha}) \notin \Sigma_n^1$ (не належить області визначення S) і тому $\Phi^{-(k_0)}(\vec{\alpha})$ задовільняє S-умові. □

Як наслідок з тверджень 5 і 10 отримуємо:

Теорема 1. Множина $\{\vec{\alpha} \in \Sigma_4 : A < 2\} = \bigcup_{k \geq 0} \Phi^{+(k)}(\Sigma_{4,S})$, при чому
$\Phi^{+(k)}(\Sigma_{4,S}) \bigcap \Phi^{+(l)}(\Sigma_{4,S}) = \emptyset, \ k \neq l$.

Твердження 11. Множина точок, що задовільняють S-умові є об'єднанням опуклих лінійних множин натягнутих на точки:

1) $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$;

2) $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,1,1,0), (0,1,0,1)$;

3) $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)$,
$(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,1)$;

4) $(0,0,0,1), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

і, крім того, ще 12 множин, що утворені з 1)-4) за допомогою перестановки координат.

Твердження 12. Для всіх $k \geq 0$:

$\Phi^{+(2k)}(1,0,0,0) = (\frac{k+1}{2k+1}, \frac{k}{2k+1}, \frac{k}{2k+1}, \frac{k}{2k+1})$,

$\Phi^{+(2k+1)}(1,0,0,0) = (\frac{k}{2k+2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

$\Phi^{+(2k)}(1,1,0,0) = (1,1,0,0)$,

$\Phi^{+(2k+1)}(1,1,0,0) = (0,0,1,1)$,

$\Phi^{+(2k)}(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

$\Phi^{+(2k+1)}(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{k+2}{2k+3}, \frac{k+1}{2k+3}, \frac{k+1}{2k+3}, \frac{k+1}{2k+3})$.

Твердження 13. Множина $\Sigma_4^1 \cap \{\vec{\alpha} : A < 2\}$ складається з опуклих лінійних множин натягнутих на точки:

1) $(\frac{k+1}{2k+1},\frac{k}{2k+1},\frac{k}{2k+1},\frac{k}{2k+1}),(\frac{k}{2k+1},\frac{k+1}{2k+1},\frac{k}{2k+1},\frac{k}{2k+1}),(\frac{k}{2k+1},\frac{k}{2k+1},\frac{k+1}{2k+1},\frac{k}{2k+1}),$ $(\frac{k}{2k+1},\frac{k}{2k+1},\frac{k}{2k+1},\frac{k+1}{2k+1})$;

1') $(\frac{k}{2k+2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{k}{2k+2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{k}{2k+2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{k}{2k+2})$;

2) $(\frac{k+1}{2k+1},\frac{k}{2k+1},\frac{k}{2k+1},\frac{k}{2k+1}),(\frac{k}{2k+1},\frac{k+1}{2k+1},\frac{k}{2k+1},\frac{k}{2k+1}),(0,1,1,0),(0,1,0,1)$;

2') $(\frac{k}{2k+2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{k}{2k+2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(1,0,0,1),(1,0,1,0)$;

3) $(\frac{k+1}{2k+1},\frac{k}{2k+1},\frac{k}{2k+1},\frac{k}{2k+1}),(\frac{k}{2k+1},\frac{k+1}{2k+1},\frac{k}{2k+1},\frac{k}{2k+1}),(\frac{k}{2k+1},\frac{k}{2k+1},\frac{k+1}{2k+1},\frac{k}{2k+1}),$
$(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)$;

3') $(\frac{k}{2k+2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{k}{2k+2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{k}{2k+2},\frac{1}{2}),$
$(0,1,1,0),(1,0,1,0),(1,1,0,0)$;

4) $(\frac{k+1}{2k+1},\frac{k}{2k+1},\frac{k}{2k+1},\frac{k}{2k+1}),(\frac{1}{2},\frac{k}{2k+2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{k}{2k+2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{k}{2k+2})$;

4') $(\frac{k+2}{2k+3},\frac{k+1}{2k+3},\frac{k+1}{2k+3},\frac{k+1}{2k+3}),(\frac{k+1}{2k+3},\frac{k+2}{2k+3},\frac{k+1}{2k+3},\frac{k+1}{2k+3}),(\frac{k+1}{2k+3},\frac{k+1}{2k+3},\frac{k+2}{2k+3},\frac{k+1}{2k+3}),$
$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{k}{2k+2})$;

де $k\geq 0$.

Теорема 2. $\vec{\alpha}\in\Sigma_4^1, A<2$, тоді і тільки тоді, коли виконується принаймні одна з наступних умов:

1) $\sum\alpha_i = 2-\frac{1}{2k+1}$, де всі $\alpha_i\geq\frac{k}{2k+1}$, при цьому існує незвідне зображення з узагальненою розмірністю $d=(2n+1;n+1,n+1,n+1,n+1)$, де $n=2k$;

1') $\sum\alpha_i = 2-\frac{1}{2k+2}$, де всі $\alpha_i\leq\frac{1}{2}$, тоді існує незвідне зображення з узагальненою розмірністю $d=(2n+1;n+1,n+1,n+1,n+1)$, де $n=2k+1$;

2) $\alpha_i+\alpha_j=1$

відповідне незвідне зображення має узагальнену розмірність $d: d_0=1, d_i=d_j=1, d_k=d_l=0$;

3) $\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k+(1-\frac{1}{k+1})\alpha_l = 2-\frac{1}{k+1}$,

$2-\frac{1}{2k+1}\leq A\leq 2$;

$\alpha_i+\alpha_j-\frac{3k+1}{k}\alpha_k-\alpha_l\leq 0$,

$\alpha_i-\frac{3k+1}{k}\alpha_j+\alpha_k-\alpha_l\leq 0$,

$-\frac{3k+1}{k}\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k-\alpha_l\leq 0$,

тоді існує незвідне зображення з узагальненою розмірністю

$d=(2k+1;k+1,k+1,k+1,k)$;

3') $\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k+(1+\frac{1}{k+1})\alpha_l=2$,

$2-\frac{1}{2k+2}\leq A\leq 2$,

$\alpha_i+\alpha_j-\alpha_k-(1-\frac{1}{k+1})\alpha_l\geq 0$,

$\alpha_i-\alpha_j+\alpha_k-(1-\frac{1}{k+1})\alpha_l\geq 0$,

$-\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k-(1-\frac{1}{k+1})\alpha_l\geq 0$,

тоді існує незвідне зображення з узагальненою розмірністю $d=(2k+2;k+1,k+1,k+1,k+2)$;

4) $A+\frac{1}{k+1}\alpha_l=2$,

$A\leq 2-\frac{1}{n+1}$,

$\alpha_i+\alpha_j-\alpha_k-\frac{k}{k+1}\alpha_l\geq 0$,

$\alpha_i-\alpha_j+\alpha_k-\frac{k}{k+1}\alpha_l\geq 0$,

$-\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k-\frac{k}{k+1}\alpha_l\geq 0$, тоді існує незвідне зображення з узагальненою розмірністю $d = (2k+2; k+1, k+1, k+1, k+2)$;

4') $A - \frac{1}{k+2}\alpha_l = \frac{2k+3}{k+2}$,
$A \le 2 - \frac{1}{2k+3}$;
$\alpha_i + \alpha_j - \frac{k+2}{k+1}\alpha_k - \alpha_l \le 0$,
$\alpha_i - \frac{k+2}{k+1}\alpha_j + \alpha_k - \alpha_l \le 0$,
$-\frac{k+2}{k+1}\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k - \alpha_l \le 0$,
тоді існує незвідне зображення з узагальненою розмірністю $d = (2k+3; k+2, k+2, k+2, k+1)$;

4. **Опис множини** $\Sigma_{(3,1)}$. Надалі розглядатимемо $\vec{\alpha} = (\alpha, \alpha, \alpha, \beta)$. Для таких $\vec{\alpha}$ визначимо $\mathfrak{A}_{(3,1),\vec{\alpha}} = \mathfrak{A}_{4,\vec{\alpha}} = \mathbb{C}\langle p_1, p_2, ..., p_n | p_i^2 = p_i = p_i^*, \alpha(p_1 + p_2 + p_3) + \beta p_4 = e\rangle$, і аналогічно до введених раніше, будемо використовувати позначення для множин параметрів $\Sigma_{(3,1)}$, $\Sigma^1_{(3,1)}$, та $\Sigma_{(3,1),S}$.

Множина $\Sigma_{(3,1)}$ є інваріантною відносно дії функторів T і S.

Твердження 14. $\vec{\alpha} \in \Sigma_{(3,1)} \backslash \Sigma^1_{(3,1)}$ тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б один з наступних випадків (при цьому алгебра має незвідне зображення в узагальненій розмірності $\vec{d}$):

1) $3\alpha = 1, \beta \ge 1$, $\vec{d} = (1; 1, 1, 1, 0)$;
2) $\alpha = 1, \beta > 0$, $\vec{d} = (1; 1, 0, 0, 0)$;
3) $3\alpha = 2, \beta \ge 1$, $\vec{d} = (2; 1, 1, 1, 0)$;
4) $2\alpha = 1, \beta \ge 1$, $\vec{d} = (1; 1, 1, 0, 0,)$;
5) $\beta = 1, \alpha > 0$, $\vec{d} = (1; 1, 0, 0, 0, 1)$.

Твердження 15. $\vec{\alpha} \in \Sigma_{(3,1),S}$ тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б один з наступних випадків і при цьому алгебра має незвідне зображення в узагальненій розмірності

1) $3\alpha + \beta = 1, \alpha \in (0, \frac{1}{3})$; $\vec{d} = (1; 0, 0, 0, 1)$,
2) $2\alpha + \beta = 1, \alpha \in (0, \frac{1}{2})$; $\vec{d} = (1; 0, 0, 1, 0)$,
3) $\frac{3}{2}\alpha + \beta = 1, \alpha \in (0, \frac{1}{3})$; $\vec{d} = (1; 0, 1, 1, 1)$,
4) $\alpha + \beta = 1, \alpha \in (0, \frac{1}{3})$; $\vec{d} = (1; 1, 1, 1, 0)$,
5) $\alpha = \frac{1}{3}, \beta \in (0, 1)$; $\vec{d} = (2; 1, 1, 1, 2)$,
6)a) $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$,$\vec{d} = (1; 0, 0, 1, 0)$ і $\vec{d} = (2; 1, 1, 1, 2)$,
b) $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$,$\vec{d} = (1; 0, 1, 1, 1)$ і $\vec{d} = (2; 1, 1, 1, 2)$,
c) $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$,$\vec{d} = (1; 1, 1, 1, 0)$ і $\vec{d} = (2; 1, 1, 1, 2)$.

Нехай $A(0, 0, 0, 1)$, $B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $D(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, $E(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $F(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$, тоді множина точок, що задовільняють S-умові складається з відкритих відрізків AB, AC, AD, AE, BF. Подіявши на них функтором Кокстера Φ^{+k}, з урахуванням попередньої лемми, отримуємо

Твердження 16. $\vec{\alpha} \in \Sigma^1_{(3,1)}, A < 2$, тоді і тільки тоді, коли $\vec{\alpha} \in (0, 1)^4$ і для деякого $k \ge 0$ виконується хоча б одна з наступних умов (при цьому, відповідне незвідне зображення має узагальнену розмірність $\vec{d}$):

1) $3\alpha+\beta=2-\frac{1}{2k+1},\ \alpha\in(\frac{k}{2k+1},\frac{3k+1}{3(2k+1)}),\ \vec{d}=(4k+1;2k+1,2k+1,2k+1,2k+1)$;

1') $3\alpha+\beta=2-\frac{1}{2k+2},\ \alpha\in(\frac{3k+2}{6(k+1)},\frac{1}{2}),\ \vec{d}=(4k+3;2k+2,2k+2,2k+2,2k+2)$

2) $\frac{3k+2}{2k+1}\alpha+\frac{k+1}{2k+1}\beta=1,\ \alpha\in(\frac{k}{2k+1},\frac{1}{2}),\ \vec{d}=(2k+1;k+1-\delta_{i1},k+1-\delta_{i2},k+1-\delta_{i3},k+1),i=1,2,3,\ k\geq 1,\ \delta_{ij}-$ символ Кронекера;

2') $\frac{3k+4}{2k+2}\alpha+\frac{1}{2}\beta=1,\ \alpha\in(\frac{k+1}{2k+3},\frac{1}{2}),\ d=(2k+1;k+1+\delta_{i1},k+1+\delta_{i2},k+1+\delta_{i3},k+1),i=1,2,3,\ k\geq 1$;

3) $\frac{3}{2}\alpha+\frac{k+2}{2(k+1)}\beta=1,\ \alpha\in(\frac{k}{2k+1},\frac{3k+2}{6(k+1)}),\ \vec{d}=(2k+2;k+1,k+1,k+1,k+2)$

3') $\frac{3k+6}{2k+3}\alpha+\frac{k+1}{2k+3}\beta=1,\ \alpha\in(\frac{3k+4}{3(2k+3)},\frac{1}{2}),\ \vec{d}=(2k+3;k+2,k+2,k+2,k+1)$

4) $\alpha+\beta=1,\ \alpha\in(\frac{k}{2k+1)},\frac{k+1}{2k+3}),\ \vec{d}=(1;d_1,d_2,d_3,1),d_1+d_2+d_3=1$

4') $\alpha=\frac{1}{2},\ \beta\in(\frac{k}{2k+2)},\frac{k+1}{2k+4}),\ \vec{d}=(1;d_1,d_2,d_3,0),d_1+d_2+d_3=2,\ d_i\leq 1$

5) $\frac{3(k+1)}{2k+1}\alpha+\frac{k}{2k+1}\beta=1,\ \alpha\in(\frac{1}{3},\frac{3k+1}{3(2k+1)}),\ \vec{d}=(2k+1;k+1,k+1,k+1,k)$

5') $\frac{3}{2}\alpha+\frac{k+2}{2(k+1)}\beta=1,\ \alpha\in(\frac{3k+2}{6(k+1)},\frac{2}{3}),\ \vec{d}=(2k+2;k+1,k+1,k+1,k+2)$

5. **Про спектр суми тьох проекторів.** Застосуємо отримані в п.4 результати для опису набору проекторів p_1,p_2,p_3,q_1,q_2, таких що $p_1+p_2+p_3=\alpha_1q_1+\alpha_2q_2$, де $q_1+q_2=I$ нетривіальний розклад одиниці і $0<\alpha_1<\alpha_2$. Тоді

$p_1+p_2+p_3+(\alpha_2-\alpha_1)q_1=\alpha_2I$ і

$\frac{1}{\alpha_2}(p_1+p_2+p_3)+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}q_1=I.$

Як наслідок з попереднього твердження отримуємо:

Теорема 3. Для того щоб сума незвідної трійки проекторів мала дві точки спектру $0<\alpha_1<\alpha_2$ необхідно і достатньо, щоб (α_1,α_2) задовільняли одній з наступних умов:

при $A<2$, тобто $\alpha_1+\alpha_2>3$:

1) $3\frac{1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}=2-\frac{1}{2k+1},\alpha_2\in(\frac{3(2k+1)}{3k+1},\frac{2k+1}{k}),k\geq 1$, і відповідне незвідне зображення має узагальнену розмірність $\vec{d}=(4k+1;2k+1,2k+1,2k+1,2k+1)$;

1') $3\frac{1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}=2-\frac{1}{2k+2},\ \alpha_2\in(2,\frac{6(k+1)}{3k+2}),k\geq 0$, і відповідне незвідне зображення має узагальнену розмірність $\vec{d}=(4k+3;2k+2,2k+2,2k+2,2k+2)$;

2) $\frac{3k+2}{2k+1}\frac{1}{\alpha_2}+\frac{k+1}{2k+1}\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}=1,\ \alpha_2\in(2,\frac{2k+1}{k})$, і відповідне незвідне зображення має узагальнену розмірність $\vec{d}=(2k+1;k+1-\delta_{i1},k+1-\delta_{i2},k+1-\delta_{i3},k+1),i=1,2,3,\ k\geq 1,\ \delta_{ij}-$ символ Кронекера;

2') $\frac{3k+4}{2k+2}\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{2}\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}=1,\ \alpha_2\in(2,\frac{2k+3}{k+1})$, і відповідне незвідне зображення має узагальнену розмірність $\vec{d}=(2k+2;k+1+\delta_{i1},k+1+\delta_{i2},k+1+\delta_{i3},k+1),i=1,2,3,\ k\geq 1$;

3) $\frac{3}{2}\frac{1}{\alpha_2}+\frac{k+2}{2(k+1)}\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}=1,\ \alpha_2\in[\frac{6(k+1)}{3k+2},2+\frac{1}{k})$, і відповідне незвідне зображення має узагальнену розмірність $\vec{d}=(2k+2;k+1,k+1,k+1,k+2),k\geq 1$;

3') $\frac{3k+6}{2k+3}\frac{1}{\alpha_2}+\frac{k+1}{2k+3}\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}=1,\ \alpha_2\in(2,\frac{3(2k+3)}{3k+4}]$, і відповідне незвідне зображення має узагальнену розмірність $\vec{d}=(2k+3;k+2,k+2,k+2,k+1),k\geq 0$;

4) $\frac{3(k+1)}{2k+1}\frac{1}{\alpha_2}+\frac{k}{2k+1}\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}=1,\ \alpha_2\in[\frac{3(2k+1)}{3k+1},3]$, і відповідне незвідне зображення має узагальнену розмірність $\vec{d}=(2k+1;k+1,k+1,k+1,k),k\geq 1$;

4') $\frac{3}{2}\frac{1}{\alpha_2} + \frac{k+2}{2(k+1)}\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2} = 1$, $\alpha_2 \in [\frac{3}{2}, \frac{6(k+1)}{3k+2}]$, і відповідне незвідне зображення має узагальнену розмірність $\vec{d} = (2k+2; k+1, k+1, k+1, k+2), k \geq 1$.

При $A = 2$, тобто $\alpha_1 + \alpha_2 = 3, \beta > 1$ існує невідне зображення в узагальненій розмірності $\vec{d} = (2; 1, 1, 1, 1)$

При $A > 2$, тобто $\alpha_1 + \alpha_2 < 3$, необхідною і достатньою умовою існування незвідної трійки проекторів сума яких має дві точки спектру $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ (з узагальненою розмірністю $\vec{d}$) є умова існування незвідної трійки проекторів сума яких має дві точки спектру $0 < 3 - \alpha_2 < 3 - \alpha_1$, тоді $(3 - \alpha_1) + (3 - \alpha_2) < 3$, (з узагальненою розмірністю $T(\vec{d})$).

Автор щиро вдячний С.А. Кругляку та Ю.С. Самойленку за увагу до роботи та корисні поради.

Список литературы

[1] Ostrovsky V., Samoilenko Y. *Introduction to the Theory of Representation of Finitly Presented *-Algebras* London, Gordon and Breach Publ. (1999)

[2] Galinsky D.V., Kruglyak S.A. *Representation of *-algebras, generated by orthogonal projections, satisfying a linear relations*, Вісник КГУ

[3] Galinsky D.V., Muratov M.A., *On representation of algebra generated by sets of tree and four orthoprojections* Proceeding of the Eight Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH VII), V8,1997,p.15-22

[4] Kruglyak S.A. *Functors of Coxeter for one class of *-колчанов* Ukr. Math. J. 2002,N6.

[5] Kruglyak S.A., Kyrychenko A.A *On Four Orthogonal Projections that satisfy the linear relation* $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = I, \alpha_i > 0$ Proc. Ins. Math. Ukr. 2002.