Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2002) 43 – 48

УДК 514.12

А.И. Криворучко

О ВЗАИМНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ЧЕТЫРЕХ ЛИНЕЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ОРБИТ НАПРАВЛЕНИЙ СИММЕТРИИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГРУППЫ ОТРАЖЕНИЙ

В этой заметке продолжается начатое В.Ф.Игнатенко [1] изучение строения бесконечной группы G, действующей в конечномерном вещественном линейном пространстве V и удовлетворяющей следующим условиям:

(A) Группа порождается множеством M всех отражений, сохраняющих некоторую нецилиндрическую алгебраическую гиперповерхность, лежащую в пространстве V.

(Б) Множество всех отражений, принадлежащих группе, является объединением s попарно непересекающихся бесконечных подмножеств M_i, каждое из которых определяется соответствующими плоскостью A_i и квадратичной формой φ_i в следующем смысле: отражение (P, d) относительно гиперплоскости P в направлении вектора d принадлежит M_i тогда и только тогда, когда $d \in A_i$, а P сопряжена d относительно φ_i.

Из условий (А) и (Б) следует, что каждая плоскость A_i, определяющая M_i, является линейной оболочкой G-орбиты некоторого направления симметрии группы G. Известны все ограничения на взаимное расположение трех линейных оболочек направлений симметрии группы G, а также некоторые ограничения на взаимное расположение более, чем трех линейных оболочек направлений симметрии группы G в случае, когда эти оболочки имеют ненулевые пересечения [1]. В [2] получены ограничения на взаимное расположение четырех линейных оболочек орбит направлений симметрии группы G, имеющих попарные нулевые пересечения. Эти ограничения связаны с тем, что не любая четверка плоскостей, имеющая нулевой дефект [3], может содержаться в четверке линейных оболочек орбит направлений симметрии какой-либо группы G.

Далее показывается, что четверка S, состоящая из плоскостей $Q_1, \dots, Q_4$, может обладать следующими свойствами:

а) S — прямая сумма неразложимых четверок, дефект каждой из которых равен -1 (и, в частности, плоскости $Q_1, \dots, Q_4$ имеют нулевые попарные пересечения;

б) не существует группы G с содержащей S четверкой $(A_1, \dots, A_4)$ линейных оболочек G-орбит направлений симметрии.

Отметим, что среди четверок $S = (Q_1, \dots, Q_4)$, обладающих этими свойствами, имеются такие четверки, три плоскости $Q_1, \dots, Q_3$ которых образуют прямую сумму.

1^o. Пусть $S = (Q_1, \dots, Q_n)$ — n-ка плоскостей Q_i в пространстве V. Дефектом n-ки S называется число

$$\rho(S) = \sum_{j=1}^{n} \dim Q_j - 2 \dim \sum_{j=1}^{n} Q_j .$$

Всякая n-ка плоскостей является прямой суммой неразложимых n-ок плоскостей. Полная линейная классификация неразложимых четверок плоскостей найдена И.М.Гельфандом и В.А.Пономаревым [3]. При этом показано, что дефект неразложимой четверки плоскостей, имеющих нулевые попарные пересечения, может принимать лишь одно из значений $0, -1, -2$.

В [2] изучено строение группы G, четверка линейных оболочек G-орбит направлений симметрии которой является прямой суммой неразложимых четверок дефекта 0, и еще одной четверки, плоскости которой сами образуют прямую сумму. При этом показано, что не всякая прямая сумма неразложимых четверок дефекта 0 может содержаться в четверке линейных оболочек орбит направлений симметрии какой-либо группы G.

Покажем, что существуют прямые суммы неразложимых четверок дефекта -1, которые также не могут содержаться в четверках линейных оболочек орбит направлений симметрии групп, удовлетворяющих условиям (А) и (Б).

Для $k \geq 1$ и некоторых линейно независимых векторов e_i и f_j, принадлежащих V, в соответствии с обозначениями из [3], полагаем

$$S_3(2k, -1) = (E_1, E_2, E_3', E_4), \quad S_1(2k-1, -1) = (E_1, E_2', E_3', E_4'),$$

где $E_1 = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$, $E_2 = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$, $E_4 = \langle e_i + f_i : i \leq k \rangle$, и если $k = 1$, то $E_2' = E_3' = E_4' = \langle 0 \rangle$, а если $k > 1$, то

$$E_2' = \langle f_1, \dots, f_{k-1} \rangle, \quad E_3' = \langle e_{i+1} + f_i : i \leq k-1 \rangle, \quad E_4' = \langle e_i + f_i : i \leq k-1 \rangle;$$

$S_i(2k, -1)$ при $i \neq 3$ получается из $S_3(2k, -1)$ перестановкой плоскостей E_3' и E_i, а $S_j(2k-1, -1)$ при $j \neq 1$ получается из $S_1(2k-1, -1)$ перестановкой плоскостей E_1 и E_j'.

Если четверка $(Q_1, \dots, Q_4)$ неразложима и ее дефект равен -1, то $(Q_1, \dots, Q_4)$ совпадает с одной из четверок $S_i(2k, -1)$, $S_j(2k-1, -1)$ (см.[3]).

Множество отражений, определяемое плоскостью A и соответствующей квадратичной формой φ, т.е. состоящее из всех отражений (P, d), для которых $d \in A$, а плоскость P сопряжена d относительно φ, будем называть квадратичным множеством отражений.

Из (А) и (Б) следует, что группа G удовлетворяет таким условиям:

(А1) Поле рациональных инвариантов группы является невырожденным, т.е. оно не содержится в $\mathbb{R}(y_2, \dots, y_n)$ ни при каком выборе линейных координат $y_1, \dots, y_n$ пространства V.

(А2) Группа G ***максимальна*** [2], т.е. не существует квадратичного множества отражений, сохраняющего все рациональные инварианты группы G и содержащего при этом более одного из множеств $M_1, \dots, M_s$.

Далее H обозначает группу отражений пространства V, удовлетворяющую условию (Б).

Очевидно, что при вычислении базисных инвариантов группы H можно считать, что эта группа максимальна.

Теорема. *Ни одна из четверок*

$$S_1(7,\ -1),\quad S_1(5,\ -1)\oplus S_1(3,\ -1),\quad S_1(3,\ -1)\oplus S_1(3,\ -1)\oplus S_1(3,\ -1),$$
$$S_1(5,\ -1)\oplus S_2(3,\ -1),\quad S_4(6,\ -1)\oplus S_3(2,\ -1),\quad S_4(4,\ -1)\oplus S_3(4,\ -1),$$
$$S_4(4,\ -1)\oplus S_1(3,\ -1)\oplus S_2(3,\ -1),\quad S_4(4,\ -1)\oplus S_4(4,\ -1)\oplus S_3(2,\ -1),$$
$$S_1(3,\ -1)\oplus S_1(3,\ -1)\oplus S_2(3,\ -1)\oplus S_2(3,\ -1)$$

не может содержаться в четверке линейных оболочек H-орбит направлений симметрии максимальной группы H, имеющей невырожденное поле рациональных инвариантов.

2^o. Докажем сформулированную в п. 1^o теорему.

Для подмножества A линейного пространства $\langle A\rangle$ обозначает линейную оболочку A; $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел.

Пусть группа H максимальна и имеет невырожденное поле рациональных инвариантов, $s \ge 4$, $H^{(j)}$ — группа преобразований, порожденная множеством $M_1 \cup M_2 \cup M_j$; $\mu_i : A_i \to V^*$ — линейное отображение, сопоставляющее каждому вектору $a \in A_i$ линейную форму, сопряженную a относительно определяющей множество M_i квадратичной формы φ_i.

Из невырожденности поля рациональных инвариантов группы H следует, что каждое отображение μ_i инъективно. Используя максимальность группы H, можно показать, что множества $M_1, \dots, M_q$ поэлементно коммутируют между собой; последнее означает, что если $T_1 = (P_1,\ d_1) \in M_i$ и $T_2 = (P_2,\ d_2) \in M_j$, но $i \ne j$, то $d_1 \parallel P_2$ и $d_2 \parallel P_1$.

Положим

$$S_{1,1} = S_1(7,\ -1),\quad N_0 = N^1_{1,1} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\},\quad N^2_{1,1} = N^3_{1,1} = N^4_{1,1} = \{1;\ 2;\ 3\},$$
$$S_{1,2} = S_1(5,\ -1)\oplus S_1(3,\ -1),\ N^1_{1,2} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\},\ N^2_{1,2} = N^3_{1,2} = N^4_{1,2} = \{1;\ 2;\ 4\},$$
$$S_{1,3} = S_1(3,\ -1)\oplus S_1(3,\ -1)\oplus S_1(3,\ -1),$$
$$N^1_{1,3} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\},\quad N^2_{1,3} = N^3_{1,3} = N^4_{1,3} = \{1;\ 3;\ 5\},$$
$$S_{2,1} = S_1(5,\ -1)\oplus S_2(3,\ -1),$$
$$N^1_{2,1} = N^2_{2,1} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\},\quad N^3_{2,1} = \{1;\ 2;\ 4\},\quad N^4_{2,1} = \{1;\ 2;\ 3\},$$
$$S_{2,2} = S_4(6,\ -1)\oplus S_3(2,\ -1),$$
$$N^1_{2,2} = \{1;\ 2;\ 3;\ 5\},\quad N^2_{2,2} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\},\quad N^3_{2,2} = \{1;\ 2;\ 3\},\quad N^4_{2,2} = \{1;\ 2;\ 4\},$$
$$S_{2,3} = S_4(4,\ -1)\oplus S_3(4,\ -1),$$
$$N^1_{2,3} = \{1;\ 2;\ 4;\ 5\},\quad N^2_{2,3} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\},\quad N^3_{2,3} = \{1;\ 2;\ 4\},\quad N^4_{2,3} = \{1;\ 3;\ 4\},$$
$$S_{2,4} = S_4(4,\ -1)\oplus S_1(3,\ -1)\oplus S_2(3,\ -1),$$
$$N^1_{2,4} = N^2_{2,4} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\},\quad N^3_{2,4} = \{1;\ 2;\ 3;\ 5\},\quad N^4_{2,4} = \{1;\ 3;\ 4\},$$
$$S_{2,5} = S_4(4,\ -1)\oplus S_4(4,\ -1)\oplus S_3(2,\ -1),$$
$$N^1_{2,5} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6\},\ N^2_{2,5} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\},\ N^3_{2,5} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\},\ N^4_{2,5} = \{1;\ 3;\ 5\},$$
$$S_{2,6} = S_1(3,\ -1)\oplus S_1(3,\ -1)\oplus S_2(3,\ -1)\oplus S_2(3,\ -1),$$

$$N_{2,6}^1 = N_{2,6}^2 = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}, \quad N_{2,6}^3 = \{1;\ 3;\ 4;\ 6\}, \quad N_{2,6}^4 = \{1;\ 2;\ 4;\ 5\}.$$

Допустим, что $S_{p,q}$ содержится в $(A_1, \ldots, A_4)$.

На основании леммы, доказанной в [2], V имеет базис

$$(a_j,\, b_{1,m},\, b_{2,l},\, c_\tau \,:\, j \in N_0\,;\ m \in N_{p,q}^1\,;\ l \in N_{p,q}^2\,;\ \tau \geq 1)$$

с координатными функциями x_j, $y_{1,m}$, $y_{2,l}$, z_τ, относительно которых для всех $j \in N_0$, $m \in N_{p,q}^1$, $l \in N_{p,q}^2$, $i \in N_{p,q}^3$ и $k \in N_{p,q}^4$ выполняются соотношения

$$a_j \in A_j\,,\ \ b_{1,m} \in A_1,\ \ b_{2,l} \in A_2\,,\ \ b_{1,i} + b_{2,i} \in A_3\,,\ \ b_{2,k} + b_{1,\,k+1} \in A_4\,,\ \ \mu_j(a_j) = x_j\,,$$

а линейные формы

$$\xi_{1,m} := \mu_1(b_{1,m}),\ \ \xi_{2,l} := \mu_2(b_{2,l}),\ \ \xi_{3,i} := \mu_3(b_{1,i} + b_{2,i}),\ \ \xi_{4,k} := \mu_4(b_{2,k} + b_{1,\,k+1})$$

принадлежат $\langle z_\tau \,:\, \tau \geq 1\rangle$.

Из [4] следует, что для любых $m \in N_{p,q}^3$, $l \in N_{p,q}^4$, $i \in \{1;\ 2\}$ и некоторых вещественных констант $\varepsilon \neq 0$, λ_m, ν_l, а также линейных форм f_i, g_i, принадлежащих $\langle z_\tau \,:\, \tau \geq 1\rangle$, имеем:

$$f_1 \nparallel f_2\,, \quad g_1 \nparallel g_2\,, \tag{1}$$

$$\xi_{i,m} = \xi_{3,m} + \lambda_m\, f_i\,, \tag{2}$$

$$\xi_{1,\,l+1} = \xi_{4,l} + \nu_l\, g_1, \quad \xi_{2,l} = \varepsilon\, \xi_{4,l} + \nu_l\, g_2\,. \tag{3}$$

Полагаем

$$\Lambda_{p,q}^j = \{\xi_{j,n} \,:\, n \in N_{p,q}^j\}, \quad X_{p,q} = \bigcup_{j=1}^{3} \Lambda_{p,q}^j\,,$$

$$\Xi_{1,1} = X_{1,1} \cup \{\xi_{4,1};\ \xi_{4,2}\}, \quad \Xi_{2,3} = X_{2,3} \cup \{\xi_{4,3}\};$$

если $(p;\ q)$ совпадает с одной из пар (1; 2), (2; 1), (2; 2), то

$$\Xi_{p,q} := X_{p,q} \cup \{\xi_{4,1}\},$$

если же $(p;\ q)$ совпадает с одной из пар (1; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6), то

$$\Xi_{p,q} := X_{p,q}\,.$$

При любых определенных выше значениях p и q система линейных уравнений (2) и (3) относительно неизвестных, принадлежащих множеству $\Xi_{p,q}$, имеет единственное решение. Из этого решения следует, что кортеж $\Lambda_{p,q}^1$ состоит из линейных комбинаций форм f_1, f_2, g_1, g_2 и форм, принадлежащих $\Lambda_{p,q}^4 \setminus \Xi_{p,q}$. По рангу матрицы, образованной коэффициентами этих линейных комбинаций, определяем, что кортеж $\Lambda_{p,q}^1$ состоит из линейно зависимых форм (и, значит, отображение μ_1 не является инъективным) в следующих случаях:

а) $p = 1$;

б) либо $\lambda_m = 0$ для любых $m \in N_{p,q}^3$, либо $\nu_l = 0$ для любых $l \in N_{p,q}^4$.

Поэтому будем считать, что $p = 2$, $\lambda_m \neq 0$ и $\nu_l \neq 0$ для некоторых $m \in N_{p,q}^3$ и $l \in N_{p,q}^4$, а группа H имеет невырожденное поле рациональных инвариантов.

Пусть

$$\Phi = \sum_{m,l} \left(f_2\, y_{1,m}\, \xi_{1,m} - f_1\, y_{2,l}\, \xi_{2,l} \right)\,,$$

а r — некоторый рациональный инвариант группы H. Тогда r — инвариант группы $H^{(3)}$ и поэтому из [4] получаем, что $r \in F(\Phi)$, где F — поле вещественных рациональных функций от координатных форм x_j и z_τ.

Для $t \in \mathbb{R}$ и $i \in N_{2,q}^4$ положим

$$\alpha_i^{(t)} = (\ker \mu_4(a_4 + t\,(b_{2,i} + b_{1,i+1})),\ a_4 + t\,(b_{2,i} + b_{1,i+1}))\ ,$$

$$\gamma_i^t = \alpha_1^{(t)} \cdot \alpha_i^{(1)} \cdot \alpha_1^{(-t)} \cdot \alpha_i^{(-1)}\ .$$

Если $i > 1$, то γ_i^t имеет координатное представление

$$y'_{1,2} = y_{1,2} + 4t\,\xi_{4,i}\,, \quad y'_{1,i+1} = y_{1,i+1} - 4t\,\xi_{4,1},$$

$$y'_{2,1} = y_{2,1} + 4t\,\xi_{4,i}\,, \quad y'_{2,i} = y_{2,i} - 4t\,\xi_{4,1}$$

(остальные координатные функции не изменяются).

Следовательно, все функции, принадлежащие полю F, инвариантны относительно γ_i^t. Но и r инвариантна относительно γ_i^t, т.к. $\gamma_i^t \in H$. В то же время

$$\Phi \cdot \gamma_i^t = \Phi + 4\,t\,\big((\xi_{4,i}\,\xi_{1,2} - \xi_{4,1}\,\xi_{1,i+1})\,f_2 - (\xi_{4,i}\,\xi_{2,1} - \xi_{4,1}\,\xi_{2,i})\,f_1\big)\,.$$

Отсюда

$$(\xi_{4,i}\,\xi_{1,2} - \xi_{4,1}\,\xi_{1,i+1})\,f_2 = (\xi_{4,i}\,\xi_{2,1} - \xi_{4,1}\,\xi_{2,i})\,f_1\,, \tag{4}$$

т.к. в противном случае $r \in F$, а тогда поле рациональных инвариантов группы H является вырожденным.

Из (4) и (3) получаем:

$$(f_2\,g_1 - f_1\,g_2)\,(\nu_i\,\xi_{4,1} - \nu_1\,\xi_{4,i}) = 0\,. \tag{5}$$

Функции $\xi_{4,1}$, $\xi_{4,i}$ линейно независимы и хотя бы один коэффициент ν_l не равен 0. Поэтому, в силу (5), $f_2\,g_1 = f_1\,g_2$, и, учитывая (1), можно считать, что

$$f_1 = g_2\,, \quad f_1 = g_2\,. \tag{6}$$

Положим

$$N_1 = \{2;\,3\}, \quad N_2 = \{2;\,4\}, \quad N_3 = \{1;\,4\},$$

$$N_4 = \{1;\,3;\,4\}, \quad N_5 = \{1;\,3;\,5\}, \quad N_6 = \{1;\,2;\,4;\,5\}.$$

Из (2), (3) и (6) следует, что

$$A_{2,q}^1 \cup A_{2,q}^2 \subset \langle f_1,\ f_2\,,\ \xi_{4,n}\ :\ n \in N_q\rangle\ . \tag{7}$$

Из (7) имеем:

$$\Phi = f_1 \sum_{n \in N_q} \xi_{4,n}\,\sigma_{1,n} + f_2 \sum_{n \in N_q} \xi_{4,n}\,\sigma_{2,n} + f_1^2\,\sigma_1 + f_2^2\,\sigma_2 + f_1 f_2\,\sigma_3\,,$$

где σ_j и $\sigma_{i,n}$ — линейные комбинации базисных координатных функций $y_{1,m}$ и $y_{2,l}$, и число этих линейных комбинаций меньше числа всех координатных функций $y_{1,m}$ и $y_{2,l}$. Значит, поле рациональных инвариантов группы H является вырожденным.

Замечание 1. Каждая четверка $S_{i,j}$ является минимальной в классе четверок плоскостей, не содержащихся ни в какой четверке линейных оболочек орбит направлений симметрии групп отражений, удовлетворяющих условиям (A1), (A2) и (Б).

Отметим, что если минимальная четверки плоскостей этого же класса имеет двойное отношение Δ, то, как следует из результатов работы [2], $\mathrm{rk}(\Delta - \alpha I) = 2$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0;\ 1\}$.

Замечание 2. По доказанной теореме, $S_{1,3}$ не может содержаться в четверке линейных оболочек орбит направлений симметрии максимальной группы H, действующей на нецилиндрической алгебраической гиперповерхности. Это противоречит основному результату работы [5], т.к. плоскости четверки $S_{1,3}$ имеет нулевые попарные пересечения, а вторая, третья и четвертая плоскости, принадлежащие $S_{1,3}$, образуют прямую сумму.

Список литературы

[1] Игнатенко В.Ф. *О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями* // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геометрии / ВИНИТИ. – М., 1989. – Т. 21. — С. 155–208.

[2] Криворучко А.И. *О двойном отношении четверки линейных оболочек орбит направлений симметрии бесконечной группы, порожденной отражениями* // Ученые записки ТНУ. Сер. "математика". — 2001.– Т.14, № 1. — С. 60–64.

[3] Гельфанд И.М., Пономарев В.А. *Четверки подпространств конечномерного векторного пространства* // Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 197, № 4. — С. 762–765.

[4] Криворучко А.И. *О рациональных инвариантах специальных групп, порожденных отражениями* // Динамические системы. — 1999. — Вып. 18. – С. 170–177.

[5] Игнатенко В.Ф. *Алгебраические поверхности с плоскостями косой симметрии* // Математическая физика, анализ, геометрия. — 1998. — Т. 5, № 1/2. — С. 35–48.