Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2002) 40 – 42

УДК 519.21

А.И. Коваленко, Б.Д. Марянин, В.П. Смолич

# ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $(M/G/1/1)$.

**1. Постановка задачи.** В соответствии с общепринятой классификацией [1], $M/G/1/1$ обозначает одноканальную систему массового обслуживания с одним местом для ожидания, на которую поступает простейший $(M)$ поток требований, параметр которого обозначим через $\lambda$. Один прибор (канал) осуществляет обслуживание поступившего на систему требования. Время обслуживания — случайная величина $\eta$ с произвольным (непрерывным) распределением, интенсивность которого обозначим через $\mu(x)$. При занятом приборе очередное требование потока попадает на место ожидания. Время ожидания $\theta$ — случайная величина, распределённая экспоненциально с параметром $\nu$. Состояния системы обозначим следующим образом:
(0) — в системе нет требований
(1) — в системе одно требование (обслуживается прибором)
(2) — в системе два требования (одно из них обслуживается, другое находится на месте ожидания).

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ фазовое пространство которого состоит из: одной точки $E_0 = (0)$; одной полупрямой $E_1 = ((1), \omega_1)$, где $\omega_1$ — время обслуживания; одной восьмой части плоскости — $E_2 = ((2), \omega_1, \omega_2)$, где $\omega_2$ — время ожидания требования, находящегося на месте ожидания $(\omega_1 < \omega_2)$. Данный случайный процесс не является марковским из-за произвольности распределения времени времени обслуживания. Структура его фазового пространства позволяет назвать его полилинейчатым случайным процессом. Заметим, что данный случайный процесс является обобщением конструкции линейчатого марковского процесса, введённой Ю. К. Беляевым [2].

Пусть $p_k(t) := \mathbb{P}\{\xi(t) = E_k\}$, $k = 0, 1, 2$. Для более полной информации о состояниях состемы (1) и (2) определим также функции:

$$Q_1(t,x) := \mathbb{P}\{\xi(t) = E_1, \omega_1 < x\}, \quad q_1(t,x) := \frac{\partial Q_1(t,x)}{\partial x}$$

$$Q_2(t,x,y) := \mathbb{P}\{\xi(t) = E_2, \omega_1 < x, \omega_2 < y\}, \quad q_2(t,x,y) := \frac{\partial^2 Q_2(t,x,y)}{\partial x \partial y}$$

Очевидно, что

$$p_1(t) = Q_1(t, +\infty) = \int\limits_0^{+\infty} q_1(t,x)\, dx$$

$$p_2(t) = Q_2(t, +\infty, +\infty) = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{x} q_2(t, x, y)\, dy$$

Вероятностные рассуждения и предельные переходы дают следующие интегро-дифференциальные уравнения и граничные условия:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} + \lambda p_0(t) = \int\limits_0^{\infty} q_1(t, x)\mu(x)\, dx \tag{1}$$

$$\frac{\partial q_1(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial q_1(t,x)}{\partial x} + (\mu(x) + \lambda) q_1(t, x) = \nu \int\limits_0^{x} q_2(t, x, y)\, dy \tag{2}$$

$$\frac{\partial q_2(t,x,y)}{\partial t} + \frac{\partial q_2(t,x,y)}{\partial x} + \frac{\partial q_2(t,x,y)}{\partial y} + (\mu(x) + \nu) q_2(t, x, y) = 0 \tag{3}$$

$$q_1(t, 0) = \lambda p_0(t) + \int\limits_0^{\infty} dx \int\limits_0^{x} q_2(t, x, y)\mu(x)\, dy \tag{4}$$

**2. Решение системы (1) - (4). Вычисление стационарных характеристик состояний системы.** Предполагая, что со временем случайный процесс входит в стационарный режим, перейдём к пределу при $t \to \infty$ в системе (1) - (4). Обозначим через $p_k = \lim\limits_{t \to +\infty} p_k(t), \quad k = 0, 1, 2$ стационарные вероятности состояний системы;

$$g_1(x) = \lim_{t \to +\infty} q_1(t, x); \quad g_2(x, y) = \lim_{t \to +\infty} q_2(t, x, y).$$

Тогда система (1) - (4) преобразуется к виду:

$$\lambda p_0 = \int\limits_0^{\infty} g_1(x)\mu(x)\, dx \tag{5}$$

$$\frac{dg_1(x)}{dx} + (\mu(x) + \lambda) g_1(x) = \nu \int\limits_0^{x} g_2(x, y)\, dy \tag{6}$$

$$\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y} + (\mu(x) + \nu) g_2(x, y) = 0 \tag{7}$$

$$g_1(0) = \lambda p_0 + \int\limits_0^{\infty} dx \int\limits_0^{x} g_2(x, y)\mu(x)\, dy \tag{8}$$

$$g_2(x, 0) = \lambda g_1(x) \tag{9}$$

Функции $g_1(x)$ и $g_2(x, y)$ находятся с использованием общей теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, линейных уравнений с частными производными и элементов операционного исчисления. Далее мы используем следующие обозначения:

$$\Phi(x) = e^{-\int_0^x \mu(\tau)\, d\tau}$$

– функция надёжности случайной величины $\eta$ – времени обслуживания, $\Phi^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\Phi(x)\,dx$ – преобразование Лапласа функции $\Phi(x)$, $r = \int_0^\infty \Phi(x)\,dx$ – математическое ожидание случайной величины $\eta$.

$$g_1(x) = \frac{p_0\lambda}{(\lambda+\nu)(1-\lambda\Phi^*(\lambda+\nu))}(\nu + \lambda e^{-(\lambda+\nu)x})\Phi(x) \tag{10}$$

$$g_2(x,y) = \frac{p_0\lambda^2}{(\lambda+\nu)(1-\lambda\Phi^*(\lambda+\nu))}(\nu e^{-\nu y} + \lambda e^{-(\lambda+\nu)x}e^{\lambda y})\Phi(x) \tag{11}$$

Учитывая соотношения

$$p_1 = \int\limits_0^\infty g_1(x)\,dx, \quad p_2 = \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^x g_2(x,y)\,dy,$$

получаем:

$$p_1 = \frac{\lambda(\nu + \lambda\Phi^*(\lambda+\nu))}{(\lambda+\nu)(1-\lambda\Phi^*(\lambda+\nu))}p_0 \tag{12}$$

$$p_2 = \frac{\lambda^2(r - \Phi^*(\lambda+\nu))}{(\lambda+\nu)(1-\lambda\Phi^*(\lambda+\nu))}p_0 \tag{13}$$

Добавляя к (12) – (13) нормировочное соотношение $p_0+p_1+p_2 = 1$, легко получить выражения для $p_0$, $p_1$ и $p_2$:

$$p_0 = \frac{1-\lambda\Phi^*(\lambda+\nu)}{1+\lambda r - \lambda\Phi^*(\lambda+\nu)}, \quad p_1 = \frac{\lambda(\nu r + \lambda\Phi^*(\lambda+\nu))}{(\lambda+\nu)(1+\lambda r - \lambda\Phi^*(\lambda+\nu))},$$

$$p_2 = \frac{\lambda^2(r - \Phi^*(\lambda+\nu))}{(\lambda+\nu)(1+\lambda r - \lambda\Phi^*(\lambda+\nu))}$$

## Список литературы

[1] Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. *Теория массового обслуживания.* – М.: Высшая школа, 1982, – 256 с.

[2] Беляев Ю.К. *Линейчатые марковские процессы и их приложения к задачам теории надёжности.* // Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. – Вильнюс, 1962, – с.309 - 323.

[3] Коваленко А.И., Стрыгина Н.З. *Вычисление стационарных характеристик надёжности четырёхэлементной иерархической системы с восстановлением.* // Автоматика и телемеханика. Росийская АН, – М., 1992, № 1, с.156 - 164.

[4] Коваленко А.И. *Анализ надёжности трёхэлементной системы с восстановлением.* // Динам. системы. – Симферополь: 1999. – Вып.15 – с.177-182.

[5] Коваленко А.И., Смолич В.П. *Анализ надёжности двухэлементной системы, обслуживаемой двумя наладчиками.* // Динам. системы. – Симферополь: 2000. – Вып.16 – с.137-142.