Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2002) 24 – 30

УДК 517.432

И.И. Карпенко

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ ПРОСТРАНСТВА ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ J– ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. J–эрмитовы линейные отношения.

Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, J – линейный оператор, заданный на всем пространстве H и удовлетворяющий условиям $J = J^{-1} = J^*$. Зададим в H внутреннее или J -скалярное произведение $[\cdot,\cdot]$ равенством $[x,y] = (Jx,y)$ для любых векторов x и y из H. Помимо нормы $\|\cdot\|$ гильбертова пространства определим в H так называемую J-норму следующим образом: $\|x\|_J = \sqrt{|[x,x]|}$.

Пусть B – линейное отношение в H. Введем следующие обозначения: $D(B) = \{x \in H | \exists y \in H : \langle x,y\rangle \in B\}$ – область определения отношения B, $\Delta(B) = \{y \in H | \exists x \in H : \langle x,y\rangle \in B\}$ – множество значений отношения B, $\operatorname{Ker} B = \{x \in D(B) | \langle x,0\rangle \in B\}$ – ядро отношения B, $\operatorname{Ind} B = \{y \in \Delta(B) | \langle 0,y\rangle \in B\}$, $B(\lambda) = \{\langle x, y-\lambda x\rangle | \langle x,y\rangle \in B\}$, $\sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Ker} B(\lambda) \neq 0\}$ – точечный спектр отношения B, $\pi(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \exists k = k(\lambda) > 0 : \|y - \lambda x\| \geq k\|x\|, \forall\langle x,y\rangle \in B\}$ – поле регулярности отношения B, $\pi_J(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \exists k = k(\lambda) > 0 : \|y - \lambda x\| \geq k\|x\|, \forall\langle x,y\rangle \in B\}$ - поле J-регулярности отношения B. Так как $\|x\|_J \leq \|x\|$, то $\pi_J(B) \subset \pi(B)$, при этом $\pi_J(B)$, как и $\pi(B)$, открытое множество.

Линейное отношение $B^+ = \{\langle u,v\rangle \in H \times H | \quad [x,v] = [y,u] \quad \forall\langle x,y\rangle \in B\}$ называется *сопряженным* к линейному отношению B.

Назовем линейное отношение B *J-эрмитовым*, если $B \subset B^+$. Отметим ряд утверждений, имеющих место для J-эрмитовых отношений.

Предложение 1.1. Линейное отношение B является J–эрмитовым тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}[x,y] = 0$ для всех пар $\langle x,y\rangle \in B$.

Доказательство. Если $\langle x,y\rangle \in B$, где B – J-эрмитово отношение, то $\langle x,y\rangle \in B^+$. По определению сопряженного отношения это возможно тогда и только тогда, когда $[x,y] = [y,x]$, т.е.$\operatorname{Im}[x,y] = 0$.

Обратно, пусть $\operatorname{Im}[x,y] = 0$ для всех пар $\langle x,y\rangle \in B$. Если пара $\langle x,y\rangle \in B$, то для произвольной пары $\langle u,v\rangle \in B$ векторы $\langle x+u, y+v\rangle, \langle x+iu, y+iv\rangle$ также из B. Следовательно, $\operatorname{Im}[x+u, y+v] = 0$ и $\operatorname{Im}[x+iu, y+iv] = 0$. Из этих равенств имеем $[x,v] = [y,u]$ для любого вектора $\langle u,v\rangle \in B$. Тогда $\langle x,y\rangle \in B^+$. $\square$

Предложение 1.2. Если B - J—эрмитово линейное отношение, то

$$\operatorname{Ind} B \cap \operatorname{Ker} B = D(B) \cap H^0,$$

где H^0– изотропная часть пространства H.

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{Ind} B \cap \operatorname{Ker} B$. Тогда пары $\langle x, 0\rangle, \langle 0, x\rangle$ принадлежат B и для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ линейная комбинация $\langle x, 0\rangle + \lambda\langle 0, x\rangle = \langle x, \lambda x\rangle \in B$. В силу предложения 1.1 $\operatorname{Im}[x, \lambda x] = 0$, т.е. $(\lambda - \bar\lambda)[x, x] = 0$. Отсюда при $\lambda \neq \bar\lambda$ $[x, x] = 0$. Следовательно, $x \in D(B) \cap H^0$. Аналогично показывается обратное включение. □

Предложение 1.3. Если B - J—эрмитово линейное отношение, $\lambda \in \sigma_p(B)$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, то $\operatorname{Ker} B(\lambda) \subset H^0$.

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{Ker} B(\lambda)$. Тогда $\langle x, \lambda x\rangle \in B$. Поскольку $B \subset B^+$, то $\operatorname{Im}[x, \lambda x] = 0$. Отсюда при $\lambda \neq \bar\lambda$ $[x, x] = 0$, т.е. $x \in H^0$. □

Предложение 1.4. Если B J-эрмитово линейное отношение, $\{\lambda, \mu\} \subset \sigma_p(B)$, $\lambda \neq \bar\mu$, то соответствующие собственные подпространства $\operatorname{Ker} B(\lambda)$ и $\operatorname{Ker} B(\mu)$ J-ортогональны.

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{Ker} B(\lambda)$, $y \in \operatorname{Ker} B(\mu)$. Тогда $\langle x, \lambda x\rangle \in B$, $\langle y, \mu y\rangle \in B$. Согласно определению сопряженного отношения $[x, \mu y] = [\lambda x, y]$, откуда $(\lambda - \bar\mu)[x, y] = 0$. Следовательно, $[x.y] = 0$. □

Определение 1.1. Подпространство $\mathfrak{N}_\lambda(B) = H[-]\Delta_B(\lambda)$, где $\Delta_B(\lambda) = \{y - \lambda x | \langle x, y\rangle \in B\}$, называется *дефектным подпространством* линейного отношения B.

Для дефектных подпространств J-эрмитовых линейных отношений можно доказать ряд предложений, аналогичных соответствущим утверждениям работы [2].

Предложение 1.5. При $\lambda \neq \mu$ имеет место равенство $\mathfrak{N}_\lambda(B) \cap \mathfrak{N}_\mu(B) = \mathfrak{N}_0 \cap D$, где $\mathfrak{N}_0 = H[-]\Delta(B)$, $D = H[-]D(B)$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathfrak{N}_\lambda(B) \cap \mathfrak{N}_\mu(B)$. Тогда для каждой пары $\langle x, y\rangle \in B$ справедливо равенство $[y - \lambda x, u] = [y - \mu x, u] = 0$ или $[y, u,] = \lambda[x, u] = \mu[x, u]$. Поскольку $\lambda \neq \mu$, то $[y, u] = [x, u] = 0$. Таким образом, $u \in \mathfrak{N}_0 \cap D$. Аналогично доказывается обратное включение. □

Следствие 1.1. При $\lambda \neq \mu$ подпространство $\mathfrak{N}_\lambda(B) \cap \mathfrak{N}_\mu(B)$ не зависит от λ и μ.

Предложение 1.6. Дефектные подпространства $\mathfrak{N}_\lambda(B)$ и $\mathfrak{N}_\mu(B)$ при $\lambda \neq \mu$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $\operatorname{span}\{D(B), \Delta(B)\} = H$.

Предложение 1.7. Если $\operatorname{span}\{D(B), \Delta(B)\} = H$, то подпространства $\mathfrak{N}_\lambda(B)$ и D линейно независимы.

Теорема 1.1. Пусть B - замкнутое линейное отношение в гильбертовом пространстве H, и $\lambda \in \pi(B)$. Тогда линеал $\Delta_B(\lambda)$ замкнут, т.е. является линейным подпространством в H.

Доказательство. Пусть $\{z_n\}$ – фундаментальная последовательность из линеала $\Delta_B(\lambda)$. Тогда $z_n = y_n - \lambda x_n$, где $\langle x_n, y_n\rangle \in B$.Так как $\lambda \in \pi(B)$, то имеем $\|x_n - x_m\| \le k^{-1}\|(y_n + y_m) - \lambda(x_n + x_m)\| = k^{-1}\|z_n - z_m\|$. Следовательно, $\{x_n\}$ – также фундаментальная последовательность. Пусть $x_n \to x$, $\quad z_n \to z$ при $n \to \infty$, тогда $y_n = z_n + \lambda x_n \to z + \lambda x \quad (n \to \infty)$ и $\langle x, z + \lambda x\rangle \in B$. Отсюда следует, что $(z - \lambda x) - \lambda x = z \in \Delta_B(\lambda)$. □

Следствие 1.2. Пусть B – замкнутое J-эрмитово отношение в пространстве H, $\lambda \in \pi_J(B)$ и $\dim \mathfrak{N}_\lambda(B) < \infty$. Тогда справедливо разложение $H = \Delta_B(\lambda)[\dot{+}]\mathfrak{N}_\lambda(B)$.

Теорема 1.2. Пусть B – замкнутое J-эрмитово отношение , $\mathfrak{N}_\lambda(B)$ – его дефектное подпространство, причем $\lambda \in \pi_J(B)$, $\quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Тогда для сопряженного отношения B^+ имеют место равенства

$$D(B^+) = D(B) + (\mathfrak{N}_\lambda(B)\dot{+}\mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)),$$

$$B^+ = \{\langle x_0+x_\lambda+x_{\bar\lambda}, y_0+\bar\lambda x_\lambda+\lambda x_{\bar\lambda}+u\rangle | \langle x_0, y_0\rangle \in B, u[\perp]D(B), x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda(B), x_{\bar\lambda} \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)\}$$

Доказательство. Так как B – J-эрмитово отношение, то, очевидно, $D(B) \subset D(B^+)$. Пусть теперь $x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda(B)$, тогда $[y - \lambda x, x_\lambda] = 0$ для любой пары $\langle x, y\rangle \in B$, и, следовательно, $[y, x_\lambda] = [x, \bar\lambda x_\lambda]$. Отсюда $\langle x_\lambda, \bar\lambda x_\lambda\rangle \in B^+$ и $\mathfrak{N}_\lambda(B) \subset D(B^+)$. Аналогично доказывается, что $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B) \subset D(B^+)$. Таким образом, доказано включение $D(B) + (\mathfrak{N}_\lambda(B)\dot{+}\mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)) \subset D(B^+)$.

Обратно, пусть $\langle u, v\rangle \in B^+$. С учетом Следствия 1.2 $v - \lambda u = (y_0 - \lambda x_0) + (\bar\lambda - \lambda)x_\lambda$, $\qquad \langle x_0, y_0\rangle \in B$, $\qquad x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda(B)$. Тогда

$$v - y_0 - \bar\lambda x_\lambda = \lambda(u - x_0 - x_\lambda). \tag{1}$$

Так как $\{\langle u, v\rangle, \langle x_0, y_0\rangle, \langle x_\lambda, \bar\lambda x_\lambda\rangle\} \subset B^+$,то $\langle u - x_0 - x_\lambda, v - y_0 - \bar\lambda x_\lambda\rangle \in B^+$, и, с учетом (1) $\langle u - x_0 - x_\lambda, \lambda(u - x_0 - x_\lambda)\rangle \in B^+$. Но если пара $\langle t, \lambda t\rangle \in B^+$, то для любой пары $\langle x, y\rangle \in B \qquad [x, \lambda t] = [y, t]$ или $[y - \bar\lambda x, t] = 0$, откуда следует, что $t \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)$. Таким образом, $u - x_0 - x_\lambda = x_{\bar\lambda}$, $\quad u = x_0 + x_\lambda + x_{\bar\lambda}$, $\quad x_{\bar\lambda} \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)$, что доказывает включение $D(B^+) \subset D(B) + (\mathfrak{N}_\lambda(B)\dot{+}\mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B))$.

Далее, пусть пара $\langle x_0+x_\lambda+x_{\bar\lambda}, v\rangle \in B^+$. Тогда для любой пары $\langle \tilde x, \tilde y\rangle \in B \quad [\tilde y, x_0 + x_\lambda + x_{\bar\lambda}] = [\tilde x, v]$, причем, с другой стороны, $[\tilde y, x_0 + x_\lambda + x_{\bar\lambda}] = [\tilde x, y_0 + \bar\lambda x_\lambda + \lambda x_{\bar\lambda}]$. Следовательно, $[\tilde x, y_0+\bar\lambda x_\lambda+\lambda x_{\bar\lambda}-v] = 0$ для любого вектора $\tilde x \in D(B)$, и $y_0+\bar\lambda x_\lambda+\lambda x_{\bar\lambda} - v = -g$, где $g[\perp]D(B)$. В результате получаем, что $v = y_0 + \bar\lambda x_\lambda + \lambda x_{\bar\lambda} + g$. □

Теорема 1.3. Пусть B – замкнутое J-эрмитово отношение, $\dim \mathfrak{N}_\lambda(B) = \dim \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B) = 0 \qquad (\lambda \in \pi_J(B))$. Тогда B есть самосопряженное линейное отношение, т.е. $B{=}B^+$.

Доказательство. На основании теоремы 1.2 имеем $B^+ = \{\langle a, b + g\rangle | g[\perp]D(B), \quad \langle a, b\rangle \in B\}$. Рассмотрим пары вида $\langle 0, g\rangle$ из B^+. Поскольку $\mathfrak{N}_\lambda(B) = 0$, то, согласно Следствию 1.2, $H = \Delta_B(\lambda)$. Тогда любой вектор $g \in H$ можно записать в виде $g = y - \lambda x$, $\quad \langle x, y\rangle \in B$. Пусть $g[\perp]D(B)$. Так как $B \subset B^+$, то $[y, x_1] = [x, y_1]$ для любой пары $\langle x_1, y_1\rangle \in B$. Подставляя в последнее равенство выражение $y = g + \lambda x$, получим $[x, \bar\lambda x_1] = [x, y_1]$, т.е. $[x, y_1 - \bar\lambda x_1] = 0$ для любого вектора $\langle x_1, y_1\rangle \in B$. Следовательно, $x \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)$. Но $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B) = 0$, поэтому $x = 0$, $\quad g = y$, и пара $\langle 0, g\rangle \in B$. Этот факт доказывает равенство $B{=}B^+$. □

2. Пространства граничных значений J-эрмитовых операторов.

Пусть H - гильбертово пространство с J-метрикой. Линейный оператор A, действующий в J-пространстве H, назовем *J-эрмитовым*, если для $\forall\{x,y\} \subset D(A)$ $[Ax,y]=[x,Ay]$.

В дальнейшем будем отождествлять J-эрмитов оператор A с линейным отношением $\Gamma_A = \{\langle x, Ax\rangle | x \in D(A)\}$, которое, очевидно, также является J-эрмитовым.

В этом случае на J-эрмитов оператор A естественным образом переносятся все понятия и определения, сформулированные в разделе 1.

Итак, пусть A - J-эрмитов оператор в пространстве H, причем, $\operatorname{span}\{D(B), \Delta(B)\} = H$ и $\dim \mathfrak{N}_\lambda(B) < \infty$. Введем также следующее обозначение: $D = D(A)^{[\perp]}$.

Определение 2.1. Тройка (X, Γ_1, Γ_2), где X гильбертово пространство, а Γ_1 и Γ_2 - линейные операторы, действующие из $(\mathfrak{N}_\lambda(B) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)) \oplus D$ $(\lambda \in \pi_J(B), \operatorname{Im}\lambda \neq 0)$ в X, называется *пространством граничных значений* (ПГЗ) замкнутого J-эрмитова оператора A, если

$$1) \forall\{\hat{x} = \langle x,u\rangle, \hat{y} = \langle y,v\rangle\} \subset (\mathfrak{N}_\lambda(B) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)) \oplus D, \quad x = x_\lambda + x_{\bar\lambda}, y = y_\lambda + y_{\bar\lambda}$$
$$(\Gamma_1\hat{x}, \Gamma_2\hat{y}) - (\Gamma_2\hat{x}, \Gamma_1\hat{y}) = (\lambda - \bar\lambda)([x_{\bar\lambda}, y_{\bar\lambda}] - [x_\lambda, y_\lambda]) + [u,y] - [x,v]; \tag{2}$$

2) Для любой пары $\{\varphi, \psi\} \subset X$ существует вектор $\hat{x} = \langle x, u\rangle \in (\mathfrak{N}_\lambda(B) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)) \oplus D$ такой, что

$$\Gamma_1\hat{x} = \varphi, \quad \Gamma_2\hat{x} = \psi.$$

Рассмотрим также операторы $\Gamma_1^0 = \Gamma_1|(\mathfrak{N}_\lambda(B) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)) \oplus \{0\}$, $\Gamma_2^0 = \Gamma_2|(\mathfrak{N}_\lambda(B) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)) \oplus \{0\}$, и отметим несколько свойств граничных операторов Γ_i, Γ_i^0 $(i = 1,2)$.

Лемма 2.1. Пусть (X, Γ_1, Γ_2) - ПГЗ некоторого замкнутого J-эрмитова оператора A. Тогда подпространства $\operatorname{Ker}\Gamma_1^0$ и $\operatorname{Ker}\Gamma_2^0$ линейно независимы.

Доказательство. Пусть $\langle x, 0\rangle \in \operatorname{Ker}\Gamma_1^0 \cap \operatorname{Ker}\Gamma_2^0$, $x = x_\lambda + x_{\bar\lambda}$. Тогда на основании равенства (2) для любого $y \in \mathfrak{N}_\lambda(B) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)$ $0 = [x_{\bar\lambda}, y_{\bar\lambda}] - [x_\lambda, y_\lambda]$. Полагая $y_\lambda = 0$, имеем $[x_{\bar\lambda}, y_{\bar\lambda}] = 0$ для любого $y_{\bar\lambda} \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)$. Следовательно, $x_{\bar\lambda}[\perp]\mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)$, и, в силу невырожденности $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)$, $x_{\bar\lambda} = 0$. Аналогично можно показать, что $x_\lambda = 0$. Таким образом, доказана линейная независимость подпространств $\operatorname{Ker}\Gamma_1^0$ и $\operatorname{Ker}\Gamma_2^0$. □

Лемма 2.2. Если (X, Γ_1, Γ_2) - ПГЗ некоторого замкнутого J-эрмитова оператора A, то $(\mathfrak{N}_\lambda(B) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)) \oplus D = \operatorname{Ker}\Gamma_1 + \operatorname{Ker}\Gamma_2$.

Доказательство. Очевидно, что $\operatorname{Ker}\Gamma_1 + \operatorname{Ker}\Gamma_2 \subset (\mathfrak{N}_\lambda(B) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)) \oplus D$. Пусть теперь вектор $\hat{x} \in (\mathfrak{N}_\lambda(B) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)) \oplus D$ и $\Gamma_2\hat{x} = \varphi$. Для пары $\{0, \varphi\} \subset X$ найдется вектор $\hat{x}_1 \in (\mathfrak{N}_\lambda(B) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)) \oplus D$ такой, что $\Gamma_1\hat{x}_1 = 0, \Gamma_2\hat{x}_1 = \varphi$, т.е. $\hat{x}_1 \in \operatorname{Ker}\Gamma_1$. Обозначим $\hat{x}_2 = \hat{x} - \hat{x}_1$. В этом случае $\Gamma_2\hat{x}_2 = \Gamma_2\hat{x} - \Gamma_2\hat{x}_1 = \varphi - \varphi = 0$ и $\hat{x}_2 \in \operatorname{Ker}\Gamma_2$. Следовательно, $(\mathfrak{N}_\lambda(B) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)) \oplus D \subset \operatorname{Ker}\Gamma_1 + \operatorname{Ker}\Gamma_2$. □

Лемма 2.3. Если (X, Γ_1, Γ_2) - ПГЗ некоторого замкнутого J-эрмитова оператора A, то $\dim \operatorname{Ker}\Gamma_i^0 \leq \dim X \leq \dim \operatorname{Ker}\Gamma_i$, $(i = 1,2)$.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, ...e_r$ – линейно независимая система векторов из X. Для каждой пары $\{0, e_k\} \subset X$ существует вектор $\hat{x}_k \in (\mathfrak{N}_\lambda(B) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}(B)) \oplus D$ такой, что $\Gamma_1 \hat{x}_k = 0, \Gamma_2 \hat{x}_k = e_k$. Покажем, что векторы $\hat{x}_1, \hat{x}_2, ...\hat{x}_r$ линейно независимы. Действительно, пусть $\alpha_1 \hat{x}_1 + \alpha_2 \hat{x}_2 + ... + \alpha_r \hat{x}_r = 0$. Действуя на это равенство оператором Γ_2, получим $\sum_{k=1}^r \alpha_k e_k = 0$, откуда следует, что $\alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2, ...r)$. Так как $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, ...\hat{x}_r\} \subset \operatorname{Ker} \Gamma_1$, то $\dim X \le \dim \operatorname{Ker} \Gamma_1$.

Пусть теперь $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_s\}$ – система линейно независимых векторов из $\operatorname{Ker} \Gamma_1^0$. Обозначим $\hat{h}_k = \Gamma_2 \varphi_k \quad (k = 1, 2, ...s)$. Покажем, что система векторов $\{\hat{h}_k\}_1^s$ также линейно независима в X. В самом деле, пусть $\sum_{k=1}^s \alpha_k \hat{h}_k = 0$. Тогда $\Gamma_2^0(\sum_{k=1}^s \alpha_k \varphi_k) = 0$, т.е. $\sum_{k=1}^s \alpha_k \varphi_k \in \operatorname{Ker} \Gamma_2^0$. На основании Леммы 2.1 $\sum_{k=1}^s \alpha_k \varphi_k = 0$, откуда все $\alpha_i = 0$. Следовательно, $\dim \operatorname{Ker} \Gamma_i^0 \le \dim X \quad (i = 1, 2)$. □

Лемма 2.4. Пусть (X, Γ_1, Γ_2) – ПГЗ некоторого замкнутого J-эрмитова оператора A. Тогда линейное отношение

$$B_i = \{\langle x_0 + x_\lambda + x_{\bar{\lambda}}, Ax_0 + \bar{\lambda} x_\lambda + \lambda x_{\bar{\lambda}} + u \rangle | x_0 \in D(A), \langle x_\lambda + x_{\bar{\lambda}}, u \rangle \in \operatorname{Ker} \Gamma_i\} \qquad (i = 1, 2)$$

является J-самосопряженным расширением оператора A.

Доказательство. Очевидно, что $\Gamma_A \subset B_i, \quad (i = 1, 2)$. Для доказательства J-эрмитовости, например, отношения B_1 достаточно убедиться, что для любых пар $\langle x_0 + x_\lambda + x_{\bar{\lambda}}, Ax_0 + \bar{\lambda} x_\lambda + \lambda x_{\bar{\lambda}} + u \rangle, \langle y_0 + y_\lambda + y_{\bar{\lambda}}, Ay_0 + \bar{\lambda} y_\lambda + \lambda y_{\bar{\lambda}} + v \rangle$ из B_1

$$[Ax_0 + \bar{\lambda} x_\lambda + \lambda x_{\bar{\lambda}} + u, y_0 + y_\lambda + y_{\bar{\lambda}}] - [x_0 + x_\lambda + x_{\bar{\lambda}}, Ay_0 + \bar{\lambda} y_\lambda + \lambda y_{\bar{\lambda}} + v] = 0.$$

Действительно,

$$[Ax_0 + \bar{\lambda} x_\lambda + \lambda x_{\bar{\lambda}} + u, y_0 + y_\lambda + y_{\bar{\lambda}}] - [x_0 + x_\lambda + x_{\bar{\lambda}}, Ay_0 + \bar{\lambda} y_\lambda + \lambda y_{\bar{\lambda}} + v] =$$
$$= (\lambda - \bar{\lambda})([x_{\bar{\lambda}}, y_{\bar{\lambda}}] - [x_\lambda, y_\lambda]) + [u, y_\lambda + y_{\bar{\lambda}}] - [x_\lambda + x_{\bar{\lambda}}, v] = (\Gamma_1 \hat{x}, \Gamma_2 \hat{y}) - (\Gamma_2 \hat{x}, \Gamma_1 \hat{y}) = 0,$$

так как векторы $\hat{x} = \langle x_\lambda + x_{\bar{\lambda}}, u \rangle, \hat{y} = \langle y_\lambda + y_{\bar{\lambda}}, v \rangle$ принадлежат $\operatorname{Ker} \Gamma_1$.

Найдем индексы дефекта отношения B_1. Согласно определению, $\mathfrak{N}_\lambda(B_1) = H[\perp]\Delta_{B_1}(\lambda)$. Пусть $z \in \mathfrak{N}_\lambda(B_1)$, тогда $z[\perp](A - \lambda I)x_0 + (\bar{\lambda} - \lambda)x_\lambda + u$, где $x_0 \in D(A), \quad \langle x_\lambda + x_{\bar{\lambda}}, u \rangle \in \operatorname{Ker} \Gamma_1$. Полагая $x_\lambda = x_{\bar{\lambda}} = u = 0$, имеем $z[\perp](A - \lambda I)x_0, \quad (\forall x_0 \in D(A))$, откуда следует, что $z \in \mathfrak{N}_\lambda(A)$, т.е. $z = z_\lambda$. Таким образом,

$$[z_\lambda, (\bar{\lambda} - \lambda)x_\lambda + u] = 0 \tag{3}$$

для любого вектора $\hat{x} = \langle x_\lambda + x_{\bar{\lambda}}, u \rangle \in \operatorname{Ker} \Gamma_1$.

Для векторов z_λ и $\hat{x}$ имеем

$$(\Gamma_1 \hat{x}, \Gamma_2 z_\lambda) - (\Gamma_2 \hat{x}, \Gamma_1 z_\lambda) = (\lambda - \bar{\lambda})(-[x_\lambda, z_\lambda]) + [u, z_\lambda] = [(\bar{\lambda} - \lambda)x_\lambda + u, z_\lambda] = 0$$

т.е.

$$(\Gamma_2 \hat{x}, \Gamma_1 z_\lambda) = 0 \tag{4}$$

для любого вектора $\hat{x} \in \operatorname{Ker} \Gamma_1$. В силу Определения 2.1 для любой пары $\{0, \psi\} \subset X \times X$ существует вектор $\hat{x} = \langle x, u \rangle \in (\mathfrak{N}_\lambda(B) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}(B)) \oplus D$ такой, что $\Gamma_1 \hat{x} = 0, \Gamma_2 \hat{x} = \psi$. Следовательно, $\{\Gamma_2 \hat{x} | \hat{x} \in \operatorname{Ker} \Gamma_1\} = X$. Поэтому равенство (4) означает, что $\Gamma_1 z_\lambda \perp X$, и $\Gamma_1 z_\lambda = 0$. В соответствии с равенством (3) $[z_\lambda, z_\lambda] = 0$. С учетом невырожденности $\mathfrak{N}_\lambda(A)$ имеем $z_\lambda = 0$, и $\mathfrak{N}_\lambda(B_1) = 0$. Аналогично доказывается, что $\mathfrak{N}_\lambda(B_2) = 0$. В силу Теоремы 1.2 $B_i = B_i^* \quad (i = 1, 2)$. □

Таким образом, каждое пространство граничных значений оператора A порождает пару J-самосопряженных расширений этого оператора.

Существуют другие подходы к определению пространства граничных значений J-эрмитова оператора (см.например, работу В.А.Деркача[3]). Представляет интерес связь между предложенными подходами.

Напомним определение ПГЗ, использованное в работах[3, 4]. Здесь A также является замкнутым J-эрмитовым оператором, A^+ - его J-сопряженное отношение.

Определение 2.2. Тройка (X, Φ_1, Φ_2), где X – гильбертово пространство, а Φ_1 и Φ_2 – линейные операторы, действующие из A^+ в X, называется *пространством граничных значений* линейного отношения A^+, если

1) для любых пар $\hat{f} = \langle f, f' \rangle, \hat{g} = \langle g, g' \rangle$ из A^+

$$[f', g] - [f, g'] = (\Phi_1 \hat{f}, \Phi_2 \hat{g}) - (\Phi_2 \hat{f}, \Phi_1 \hat{g}); \tag{5}$$

2) отображение $\Phi : \hat{f} \mapsto \langle \Phi_1 \hat{f}, \Phi_2 \hat{f} \rangle$, действующее из A^+ в $X \times X$ сюръективно.

Заметим, что непосредственно из определения следует, что $A \subset \operatorname{Ker} \Phi_1 \cap \operatorname{Ker} \Phi_2$.

Пусть (X, Γ_1, Γ_2) - ПГЗ некоторого замкнутого J-эрмитова оператора A , построенное согласно Определению 2.1. Покажем, что это ПГЗ позволяет естественным образом определить ПГЗ для отношения A^+. Предварительно для векторов

$$\hat{f} = \langle f, f' \rangle = \langle x_0 + x_\lambda + x_{\bar\lambda}, Ax_0 + \bar\lambda x_\lambda + \lambda x_{\bar\lambda} + u \rangle \in A^+,$$
$$\hat{g} = \langle g, g' \rangle = \langle y_0 + y_\lambda + y_{\bar\lambda}, Ay_0 + \bar\lambda y_\lambda + \lambda y_{\bar\lambda} + v \rangle \in A^+,$$

построенных в соответствии с Теоремой 1.3, отметим равенство

$$[f', g] - [f, g'] = (\lambda - \bar\lambda)([x_{\bar\lambda}, y_{\bar\lambda}] - [x_\lambda, y_\lambda]) + [u, y_\lambda + y_{\bar\lambda}] - [x_\lambda + x_{\bar\lambda}, v]. \tag{6}$$

На векторе $\hat{f} \in A^+$ определим операторы Φ_1, Φ_2 следующим образом: $\Phi_1 \hat{f} = \Gamma_1 \hat{x}, \Phi_2 \hat{f} = \Gamma_2 \hat{x}$, где $\hat{x} = \langle x_\lambda + x_{\bar\lambda}, u \rangle$. На основании равенства (6) операторы Φ_1, Φ_2 удовлетворяют условию (5). Кроме того, для любой пары $\langle \varphi, \psi \rangle \in X \times X$ найдется вектор $\hat{x} = \langle x_\lambda + x_{\bar\lambda}, u \rangle$ такой, что $\Gamma_1 \hat{x} = \varphi, \Gamma_2 \hat{x} = \psi$. Очевидно, что для вектора $\hat{f} = \langle x_\lambda + x_{\bar\lambda}, \bar\lambda x_\lambda + \lambda x_{\bar\lambda} + u \rangle \in A^+$ выполняются равенства $\Phi_1 \hat{x} = \varphi, \Phi_2 \hat{x} = \psi$, что доказывает сюръективность отображения Φ, введенного в определении 2.2. Таким образом, тройка (X, Φ_1, Φ_2) является ПГЗ J- эрмитова оператора A в смысле определения 2.2.

Обратно, пусть тройка (X, Φ_1, Φ_2) определяет ПГЗ отношения A^+ согласно Определению 2.2. Зададим на множестве $(\mathfrak{N}_\lambda(B) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)) \oplus D \qquad (\lambda \in \pi_J(B), \operatorname{Im} \lambda \neq 0)$ операторы Γ_i следующим образом:

$$\hat{x} = \langle x_\lambda + x_{\bar\lambda}, u \rangle \in (\mathfrak{N}_\lambda(B) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar\lambda}(B)) \oplus D$$
$$\Gamma_i \hat{x} = \Phi_i \langle x_\lambda + x_{\bar\lambda}, \bar\lambda x_\lambda + \lambda x_{\bar\lambda} + u \rangle \quad (i = 1, 2)$$

В силу равенства (6) для операторов Γ_1, Γ_2 выполняется равенство (2). Далее, если $\langle \varphi, \psi \rangle \in X \times X$, то существует вектор $\hat{f} = \langle x_0 + x_\lambda + x_{\bar\lambda}, Ax_0 + \bar\lambda x_\lambda + \lambda x_{\bar\lambda} + u \rangle \in A^+$ такой, что $\Phi_1 \hat{x} = \varphi, \Phi_2 \hat{x} = \psi$. При этом

$$\Phi_i \hat{f} = \Phi_i \langle x_0, Ax_0 \rangle + \Phi_i \langle x_\lambda + x_{\bar\lambda}, \bar\lambda x_\lambda + \lambda x_{\bar\lambda} + u \rangle = \Phi_i \langle x_\lambda + x_{\bar\lambda}, \bar\lambda x_\lambda + \lambda x_{\bar\lambda} + u \rangle,$$

поэтому $\Gamma_1\langle x_\lambda + x_{\bar\lambda}, u\rangle = \varphi, \Gamma_2\langle x_\lambda + x_{\bar\lambda}, u\rangle = \psi$. Таким образом. доказана сюръективность отображения $\Gamma\hat{x} = \langle \Gamma_1\hat{x}, \Gamma_2\hat{x}\rangle$ на пространство $X \times X$. Следовательно, тройка $X, \Gamma_1, \Gamma_2)$ определяет ПГЗ J-эрмитова оператора A в смысле определения 2.1.

Приведенные выше рассуждения показывают эквивалентность различных подходов к определению пространства граничных значений J-эрмитова оператора.

Список литературы

[1] Кужель А.В. *Регулярные расширения эрмитовых операторов в пространстве с индефинитной метрикой.* – //Докл.АН СССР.– 1982. – т.265. –№5. – С.199-201.

[2] Кужель А.В. *Расширения эрмитовых операторов.* – Киев, 1989, – 56 с.

[3] Деркач В.А. *Расширения эрмитова оператора в пространстве Крейна.* – //Докл.АН УССР,серия А. –1988. – №5. – С.5-8.

[4] Деркач В.А. *О расширениях неплотнозаданного эрмитова оператора в пространстве Крейна.* – //Докл.АН УССР,серия А. –1990. – №10. – С.15-18.

[5] Кужель А.В., Карпенко И.И. *Пространства граничных значений неплотнозаданных эрмитовых операторов.* – //XIV Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тез.докл. – Новгород,1989. – С.39-40.