Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2002) 117 – 119

УДК 519.6

Ю.Б. Иванов [1]

ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Для математического моделирования длинноволновых колебаний свободной поверхности Черного моря используется математическая модель [1] в виде операторного пучка, определяющего свободные колебания ограниченного объема двухслойной идеальной жидкости. В рассматриваемом случае, когда плотность верхнего слоя ρ_1 близка к плотности нижнего слоя ρ_2, причем $\rho_1 < \rho_2$, математическая модель содержит малый параметр $\varepsilon = [(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2})\frac{\rho_1}{\rho_2}]^{1/2}$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0.5$. После разложения задачи по малому параметру для нулевого и первого приближений основная система уравнений расщепляется на однородное уравнение колебаний для свободной поверхности верхнего слоя и неоднородное уравнение для колебаний границы раздела двух несмешивающихся жидкостей, возбуждаемых волнами на свободной поверхности.

Систему уравнений [1], определяющую свободные колебания двухслойной жидкости, запишем в виде

$$\left[\lambda^3\mathbb{E} - \lambda\left(\mathbb{L}(H) + \alpha^2\mathbb{E}\right) + \alpha\mathbb{M}(H)\right]\eta^{(1)} = \varepsilon\left[\lambda\mathbb{L}(H_2) - \alpha\mathbb{M}(H_2)\right]\eta^{(2)}$$
$$\left[\lambda^3\mathbb{E} - \lambda\left(\mathbb{L}(\delta\rho H_2) + \alpha^2\mathbb{E}\right) + \alpha\mathbb{M}(\delta\rho H_2)\right]\eta^{(2)} = \varepsilon\left[\lambda\mathbb{L}(H_2) - \alpha\mathbb{M}(H_2)\right]\eta^{(1)}, \qquad (1)$$

где $\delta\rho = 1 - \rho_1/\rho_2$, $H = 1_1 + \rho_1/\rho_2 H_2$

$H_1 = H_1(x, y)$ — толщина верхнего слоя, $H_2 = H_2(x, y)$ — толщина нижнего слоя,

$\mathbb{L}(H)$, $\mathbb{M}(H)$ — расширения [2] симметрических дифференциальных операторов до сопряженных операторов, действующих в функциональных гильбертовых пространствах.

Следуя теории возмущений линейных операторов [3], решение системы (1), то есть скаляр λ и вектор $\eta = (\eta^{(1)}, \eta^{(2)})^T$, будем искать в виде рядов по ε

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \dots \quad , \quad \eta = \eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \dots \qquad (2)$$

Подставляя ряды (2) в систему (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε получаем следующие системы для нулевого и первого приближений.

Система уравнений для нулевого приближения:

$$\left[\lambda^3\mathbb{E} - \lambda\left(\mathbb{L}(H) + \alpha^2\mathbb{E}\right) + \alpha\mathbb{M}(H)\right]\eta_0^{(1)} = 0 \qquad (3)$$

$$\left[\lambda^3\mathbb{E} - \lambda\left(\mathbb{L}(\delta\rho H_2) + \alpha^2\mathbb{E}\right) + \alpha\mathbb{M}(\delta\rho H_2)\right]\eta_0^{(2)} = 0. \qquad (4)$$

---

[1] Кафедра прикладной математики, факультет математики и информатики

Система уравнений для вектора поправок η_1 первого порядка:

$$\left[\lambda_0^3\mathbb{E} - \lambda_0\left(\mathbb{L}(H) + \alpha^2\mathbb{E}\right) + \alpha\mathbb{M}(H)\right]\eta_1^{(1)} = \left[\lambda_0\mathbb{L}(H_2) - \alpha\mathbb{M}(H_2)\right]\eta_0^{(2)} - \\ -\lambda_1\left[\mathbb{L}(H) + (\alpha^2 - 3\lambda_0^2)\mathbb{E}\right]\eta_0^{(1)}, \tag{5}$$

$$\left[\lambda_0^3\mathbb{E} - \lambda_0\left(\mathbb{L}(\delta\rho H_2) + \alpha^2\mathbb{E}\right) + \alpha\mathbb{M}(\delta\rho H_2)\right]\eta_1^{(2)} = \left[\lambda_0\mathbb{L}(H_2) - \alpha\mathbb{M}(H_2)\right]\eta_0^{(1)} - \\ -\lambda_1\left[\mathbb{L}(\delta\rho H_2) + (\alpha^2 - 3\lambda_0^2)\mathbb{E}\right]\eta_0^{(2)}. \tag{6}$$

Уравнение для поправки первого порядка λ_1 получим из условия ортогональности нулевого приближения η_0 вектору правой части системы (5)–(6):

$$\left(\left[\lambda_0\mathbb{L}(H_2) - \alpha\mathbb{M}(H_2)\right]\eta_0^{(2)}, \eta_0^{(1)}\right) - \lambda_1\left(\left[\mathbb{L}(H) + (\alpha^2 - 3\lambda_0^2)\mathbb{E}\right]\eta_0^{(1)}, \eta_0^{(1)}\right) + \\ + \left(\left[\lambda_0\mathbb{L}(H_2) - \alpha\mathbb{M}(H_2)\right]\eta_0^{(1)}, \eta_0^{(2)}\right) - \lambda_1\left(\left[\mathbb{L}(\delta\rho H_2) + (\alpha^2 - 3\lambda_0^2)\mathbb{E}\right]\eta_0^{(2)}, \eta_0^{(2)}\right) = 0. \tag{7}$$

Рассмотрим систему уравнений (3)–(4) для нулевого приближения. Уравнения этой системы связаны между собой только через спектральный параметр λ_0. Первое уравнение системы определяет колебания свободной поверхности $\eta_0^{(1)}$ верхнего слоя жидкости и совпадает с уравнением свободных колебаний однородной жидкости [4] для бассейна, глубина которого задается функцией $H = H_1(x,y) + \rho_1/\rho_2\, H_2(x,y)$.

Будем искать решения λ_0 уравнения (3) на интервале $(0,\alpha)$. Как доказано в [4], такие решения существуют на подпространстве $\mathcal{M}_H^+$, определяемом неравенством

$$\left(\mathbb{M}(H)\eta_0^{(1)}, \eta_0^{(1)}\right) \geqslant 0. \tag{8}$$

Пусть $\lambda_0 \in (0,\alpha)$, $\eta_0^{(1)} \in \mathcal{M}_H^+$, $\eta_0^{(1)} \neq 0$ — некоторое решение уравнения (3). Отклонение внутренней границы $\eta_0^{(2)}$ определяем из уравнения (4) при известном значении параметра λ_0. Решения уравнения (4) ищем на подпространстве $\mathcal{M}_{H_2}^-$, определяемом неравенством

$$\left(\mathbb{M}(H_2)\eta_0^{(2)}, \eta_0^{(2)}\right) \leqslant 0. \tag{9}$$

Легко показать, что для $\lambda_0 \in (0,\alpha)$ на подпространстве $\mathcal{M}_{H_2}^-$ операторный пучок (4) положительно определен. Следовательно, однородное уравнение (4) имеет только нулевое решение.

Таким образом, нулевое приближение λ_0, $\eta_0^{(1)} \neq 0$, $\eta_0^{(2)} = 0$ для $\lambda_0 \in (0,\alpha)$, $\eta_0^{(1)} \in \mathcal{M}_H^+$ существует и устойчиво.

Найдем поправку первого порядка $\lambda_1 \in (0,\alpha)$, $\eta_1^{(1)} \in \mathcal{M}_H^+$, $\eta_1^{(2)} \in \mathcal{M}_{H_2}^-$ к известному нулевому приближению.

Начнем с уравнения для λ_1. Подставляя в (7) $\eta_0^{(2)} = 0$, приходим к уравнению

$$\lambda_1 \cdot \left(\left[\mathbb{L}(H) + (\alpha^2 - 3\lambda_0^2)\mathbb{E}\right]\eta_0^{(1)}, \eta_0^{(1)}\right) = 0. \tag{10}$$

Покажем, что скалярное произведение в уравнении (10) не равно нулю. Действительно, умножая уравнение (3) скалярно на известный вектор $\eta_0^{(1)} \neq 0$, приходим к равенству

$$\lambda_0^3\left(\eta_0^{(1)}, \eta_0^{(1)}\right) - \lambda_0\left[\left(\mathbb{L}(H)\eta_0^{(1)}, \eta_0^{(1)}\right) + \alpha^2\left(\eta_0^{(1)}, \eta_0^{(1)}\right)\right] + \alpha\left(\mathbb{M}(H)\eta_0^{(1)}, \eta_0^{(1)}\right) = 0, \tag{11}$$

левая часть которого представляет собой полином третьей степени для параметра λ. Таким образом, нулевое приближение λ_0 является корнем уравнения (11). Как доказано в [2], для коэффициентов полинома (11) справедливо неравенство

$$\left(\mathbb{L}(H)\eta_0^{(1)}, \eta_0^{(1)}\right) \geqslant \left(\mathbb{M}(H)\eta_0^{(1)}, \eta_0^{(1)}\right) > 0,$$

из которого следует, что многочлен (11) имеет только вещественные простые корни. Следовательно, производная этого многочлена в корневых точках не равна нулю, то есть

$$\left(\mathbb{L}(H)\eta_0^{(1)}, \eta_0^{(1)}\right) + (\alpha^2 - 3\lambda_0^2)\left(\eta_0^{(1)}, \eta_0^{(1)}\right) \neq 0. \qquad (12)$$

Из (10) и (12) теперь следует, что $\lambda_1 = 0$.

Подставляя известные величины λ_0, $\lambda_1 = 0$, $\eta_0^{(1)} \neq 0$, $\eta_0^{(2)} = 0$ в уравнения (5)–(6), приходим к следующей системе относительно $\eta_1^{(1)}$, $\eta_1^{(2)}$:

$$\left[\lambda_0^3\mathbb{E} - \lambda_0\left(\mathbb{L}(H) + \alpha^2\mathbb{E}\right) + \alpha\mathbb{M}(H)\right]\eta_1^{(1)} = 0 \qquad (13)$$

$$\left[\lambda_0^3\mathbb{E} - \lambda_0\left(\mathbb{L}(\delta\rho H_2) + \alpha^2\mathbb{E}\right) + \alpha\mathbb{M}(\delta\rho H_2)\right]\eta_1^{(2)} = \left[\lambda_0\mathbb{L}(H_2) - \alpha\mathbb{M}(H_2)\right]\eta_0^{(1)}. \qquad (14)$$

Уравнение (13) для $\eta_1^{(1)}$ тождественно уравнению (3) для $\eta_0^{(1)}$. Поэтому для решений этих уравнений полагаем $\eta_1^{(1)} \equiv \eta_0^{(1)}$.

Решения уравнения (14) ищем на линейном подпространстве $\mathcal{M}_{H_2}^-$, элементы которого удовлетворяют неравенству (9). В этом случае оператор в левой части уравнения (14) положительно определен и обратим. Следовательно, существует единственное устойчивое решение $\eta_1^{(2)}$ уравнения (14) при любой правой части.

Таким образом, приближенные решения (λ, η) системы (1), определяющие свободные колебания жидкости данного типа с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^2)$, существуют, устойчивы и могут быть записаны в виде

$$\lambda = \lambda_0 \in (0, \alpha), \quad \eta^{(1)} = (1+\varepsilon)\eta_0^{(1)}, \quad \eta^{(2)} = \varepsilon\eta_1^{(2)}, \qquad (15)$$

где λ_0 и вектор $\eta_0^{(1)} \in \mathcal{M}_H^+$ — решение уравнения (3) для однородной жидкости, $\eta_1^{(2)} \in \mathcal{M}_{H_2}^-$ — решение уравнения (14) для вынужденных колебаний границы раздела двух жидкостей.

Список литературы

[1] Иванов Ю.Б. *Двухслойная модель сейшевых колебаний Черного моря.* //Доп. НАН України.– 2000. - N8. - С.119-123

[2] Иванов Ю.Б. *Обобщенные решения спектральной краевой задачи для системы уравнений теории мелкой воды.* // Ученые записки ТНУ. Серия "Математика, Механика, Информатика". - 2001, том 14(53),N1. -с. 43-50

[3] Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир, 1972. - 740с.

[4] Иванов Ю.Б. *Моделирование баротропных сейш в Черном море.* //Доп. НАН України.- 1999. - N6. - С.117-120