Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2002) 11 – 23

УДК 517.956.4

Е.П. Белан [1]

О БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Введение. Преобразование поля в контуре обратной связи нелинейной оптической системы приводит к возникновению вращающихся структур [1]. Такие системы используются в современных компьютерных технологиях и исследованиях лазерных пучков. Математической моделью системы является квазилинейное параболическое функционально-дифференциальное уравнение с преобразованием q пространственных переменных. Задача о возникновении автоколебаний в этом уравнении, их устойчивости рассматривалась в [2] – [9] при условии, что преобразование q – вращение на постоянный угол. Общий случай преобразования q изучался в [10], [11].

В настоящей работе методом центральных многобразий [13] для общего случая преобразования q получены формулы для определения устойчивости, направления рождения, периода и асимптотической формы периодических решений малой амплитуды, бифурцирующих из стационарного пространственно однородного состояния.

На ограниченной области $S \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей рассмотрим уравнение [1]

$$\partial u/\partial t + u = D\Delta u + K(1 + \gamma \cos Qu). \tag{21}$$

Здесь u фаза световой волны, Δ двумерный оператор Лапласа, $Qu(t,x) = u(t,q(x))$, $D > 0$ - коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, $0 < \gamma \leq 1$ - видность интерференционной картины, $K > 0$ - коэффициент нелинейности, зависящий от интенсивности входного поля.

Уравнение (21) рассмотрим при условии

$$\partial u/\partial \nu\big|_{\partial S} = 0, \tag{22}$$

где ν – внутренняя нормаль к границе S.

Условие 1. q $\mathbb{C}^s(s \geq 2)$ отличный от тождественного диффеоморфизм ограниченной области $V \subset \mathbb{R}^2 (S \subset V)$ на $q(V)$ такой, что $q(S) \subset S$.

В [1], [11] приведены примеры преобразований q, возникающих в нелинейной оптике, когда область S единичный круг с центром в нуле. Примеры других областей и преобразований q указаны в [10].

[1]Кафедра дифференциальных и интегральных уравнений, математический факультет

1. Свойства полугруппы. Рассмотрим свойства полугруппы, порожденной задачей (21) – (22). Введем с этой целью пространства функций на S. Обозначим $H = L_2(S)$ гильбертово пространство измеримых на S функций со скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_S uv\,dx.$$

Норму в пространстве H будем обозначать $\|\cdot\|$. Обозначим $H^l(S)$, $l \in \mathbb{Z}_+$, пространство Соболева измеримых на S функций. Скалярное произведение в $H^l(S)$ определяется формулой

$$\langle u, v\rangle_l = \sum_{0\le|\alpha|\le l} \int\limits_S \partial^\alpha u(x)\partial^\alpha v(x)\,dx.$$

Здесь при $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. Норма в пространстве $H^l(S)$ вводится стандартно. Обозначим $H^l = H^l(S) \cap \{\partial u/\partial\nu\big|_{\partial S} = 0\}$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Пространство H^l является пополнением пространства бесконечно дифференцируемых на S функций, удовлетворяющих условию (22), по норме $H^l(S)$. В пространстве H^l норму обозначим $\|\cdot\|_l$. Пусть H^{-1} пространство, сопряженное H^1; норма в этом пространстве определяется равенством:

$$\|u\|_{-1} = \sup\{\langle u, v\rangle / \|v\|_1 \quad (v \in H^1, v \neq 0)\}.$$

Согласно теореме Соболева имеют место вложения $H^1 \subset H \subset H^{-1}$, вложение $H^1 \subset H$ вполне непрерывно.

Пусть $\mathfrak{B}$ – банахово пространство. Обозначим $C(\mathfrak{B})$ банахово пространство непрерывных и ограниченных на вещественной оси функций со значениями в пространстве $\mathfrak{B}$ с нормой $\|f\|_{C(\mathfrak{B})} = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|_{\mathfrak{B}}$. Обозначим $M^2(\mathfrak{B})$ банахово пространство измеримых функций $f : R \to \mathfrak{B}$ с нормой

$$\|f\|^2_{M^2(\mathfrak{B})} = \sup_{t\in R} \int\limits_0^1 \|u(t+s)\|^2_{\mathfrak{B}}\,ds.$$

Введем пространство $U = C(H) \cap M^2(H^1)$ с нормой $\|f\|_U = \|f\|_{C(H)} + \|f\|_{M^2(H^1)}$.

Обозначим q^{-1} обратное к q преобразование. Пусть $J_{q^{-1}}$ якобиан преобразования q^{-1}. Оператор $Q : H \to H$ является, как легко видеть, ограниченным с нормой $\|Q\|_{\mathrm{Hom}(H)} = \kappa^{-1}$, где $\kappa^{-1} \le \sup\limits_{x\in S} |J_{q^{-1}}(x)|$. Оператор $Q : H^1 \to H^1$ также является ограниченным, причем $\|Q\|_{\mathrm{Hom}(H^1)} \le \sup\limits_{x\in S} |J_{q^{-1}}(x)|$.

Рассмотрим свойства отображения $v \to \cos Qv$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$ – вещественнозначная функция такая, что $|\Phi^{(k)}(\xi)| \le M$, $k = 1, 2$, для всех $\xi \in \mathbb{R}$. Тогда отображение $F : v \to \Phi(Qv)$ из U в $M^2(H^{-1})$ является дифференцируемым по Фреше отображением в каждой точке пространства U и его дифференциал задан формулой*

$$F'(u)v = \Phi'(Qu)Qv. \tag{23}$$

Для дифференциала F' имеют место оценки

$$\|F'(u)v\|_{M^2(H^{-1})} \le C\|v\|_U, \tag{24}$$

$$\|(F'(u+w) - F'(u))v\|_{M^2(H^{-1})} \le C\|w\|_U\|v\|_U, \tag{25}$$

где постоянная C не зависит от u, v, w.

Доказательство. По предложению I.1.1 [14], неравенству Гёльдера

$$\|uv\|_{-1} \le C\|uv\|_{L_{3/2}(S)} \le C\|u\|_{L_2(S)}\|v\|_{L_6(S)}.$$

Здесь и далее одной и той же буквой C обозначаются разные постоянные, точные значения которых несущественны.

В силу теоремы вложения Соболева имеет место неравенство

$$\|v\|_{L_6(S)} \le C\|v\|_{H^1(S)}.$$

Очевидно,

$$\int\limits_0^1 \|uv\|_{-1}^2\,dt \le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\|u\|^2 \int\limits_0^1 \|v\|_{H^1(S)}^2\,dt.$$

Следовательно,

$$\|uv\|_{M^2(H^{-1})}^2 \le C\|u\|_{C(H)}^2\|v\|_{M^2(H^1)}^2 \le C\|u\|_U^2\|v\|_U^2. \tag{26}$$

Согласно условий леммы

$$|\Phi(Q(u+v)) - \Phi(Qu) - \Phi'(Qu)Qv| = |\int\limits_0^1 (\Phi'(Q(u+sv) - \Phi'(Qu))Qv\,ds| \le M|Qv|^2.$$

Так как $Q \in \mathrm{Hom}(H)$, $Q \in \mathrm{Hom}(H^1)$, то по неравенству (26)

$$\|\Phi(Q(u+v)) - \Phi(Qu) - \Phi'(Qu)Qv\|_{M^2(H^{-1})} \le C\|v\|_U^2.$$

Следовательно, F' дифференциал Фреше F и имеет место равенство (23). Из равенства (23), условий леммы, неравенства (26) следуют неравенства (24), (25).

Из леммы 1 следует, что отображение $F : v \to \Phi(Qv)$ из H^1 в H^{-1} является дифференцируемым по Фреше отображением в каждой точке пространства H^1. Отметим, что общие результаты по дифференцируемости отображений приведены в [14] (I.1.), [15] (IX .4.).

Пусть $T > 0$. Следуя I. 5. [14], приходим к следующему предложению.

Теорема 1. *Задача* (21) – (22) *с начальным условием*

$$u\big|_{t=0} = u_0, \quad u_0 \in H \tag{27}$$

имеет единственное решение u, принадлежащее классу $L_\infty([0,T], H) \cap L_2([0,T], H^1)$.

Нам понадобятся оценки решений задачи (21) – (22) с начальным условием (27). Приводимые далее формальные выкладки обосновываются с помощью метода Галеркина.

Умножим (21) в H на u. Используя интегрирование по частям, условие (22), получаем

$$\frac{1}{2}\partial_t\|u\|^2 + \|u\|^2 + D\|\nabla u\|^2 = K\int\limits_S (1+\gamma\cos Qu)u\,dx. \tag{28}$$

В силу неравенства

$$\frac{1}{\pi}K\int\limits_S (1+\gamma\cos Qu)u\,dx \le \frac{1}{2}(K(1+\gamma))^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2,$$

равенства (28) имеем

$$\partial_t\|u\|^2 + \|u\|^2 \le (K(1+\gamma))^2.$$

Таким образом,

$$\|u(t)\|^2 \le \|u(0)\|^2 e^{-t} + (K(1+\gamma))^2(1-e^{-t}). \tag{29}$$

Следовательно, решения (21) – (22) с начальным условием (27) продолжимы на положительную полуось.

Обозначим $\{S_t\}$ полугруппу, порожденную задачей (21) (22).

Теорема 2. *Полугруппа $\{S_t\}$ обладает следующими свойствами:*
a) $\{S_t\}$ (H,H) равномерно непрерывна.
b) $\{S_t\}$ (H,H) – ограничена равномерно при $t \ge 0$.
c) У $\{S_t\}$ имеется H поглощающее множество, ограниченное в H.

Доказательство. а) Вычитая уравнение (21) для $u(t)$, $v(t)$, выводим

$$\partial_t(u-v) + (u-v) = D\Delta(u-v) + K\gamma(\cos Qu - \cos Qv).$$

Умножая на $u-v$ в H, получаем

$$\frac{1}{2}\partial_t\|u-v\|^2 + \|u-v\|^2 + D\|\nabla(u-v)\|^2 \le |\kappa|^{-1}K\gamma\|u-v\|^2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\partial_t\|u-v\|^2 \le (|\kappa|^{-1}K\gamma - 1)\|u-v\|^2.$$

Непрерывность $\{S_t\}$ из H в H следует из неравенства

$$\|u(t)-v(t)\|^2 \le \|u(0)-v(0)\|^2 e^{2(|\kappa|^{-1}K\gamma-1)t}.$$

b) Справедливость этого пункта следует из (29).

c) В качестве поглощающего множества $\{S_t\}$ можно взять шар

$$\{u\in H : \|u\| \le K(1+\gamma)+1\}.$$

Можно показать, что полугруппа $\{S_t\}$ обладает свойствами d) – h), сформулированными в теореме I. 5. 4 [14].

2. Линеаризация. Пространственно-однородные стационарные решения задачи (21) - (22) удовлетворяют уравнению

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \tag{30}$$

Решения этого уравнения рассмотрим при фиксированном γ.

Условие 2. Уравнение (30) при $K = \widehat{K}$ имеет такое решение $w = \widehat{w}$, что $1 + \widehat{K}\gamma \sin \widehat{w} \neq 0$.

Тогда в силу теоремы о неявной функции в окрестности точки $\mu = 0$ существует аналитическая функция $w = w(\mu)$, $w(0) = \widehat{w}$, удовлетворяющая уравнению (30) при $K = \widehat{K} + \mu$. Справедливо равенство

$$w'(0) = (1 + \gamma \cos \widehat{w})/(1 + \widehat{K}\gamma \sin \widehat{w}). \tag{31}$$

Определим оператор $\mathfrak{L}(\mu)$ равенством

$$\mathfrak{L}(\mu)v = -D\Delta v + v + K\gamma \sin wQv.$$

Согласно лемме 3.1 [11] оператор $\mathfrak{L}(\mu)$ в пространстве H с областью определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}(\mu)) = H^2$ имеет компактную резольвенту и, следовательно, дискретный спектр. Пусть $\lambda_k(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots$, собственные значения $\mathfrak{L}(\mu)$.

Условие 3. Существует такое $\widehat{K}$, что

i) $\operatorname{Re} \lambda_k(0) \geq 0$ для любого целого k,

ii) существуют одна и только одна пара собственных значений $\lambda_1(\mu)$, $\lambda_2(\mu)$, $\lambda_2(\mu) = \overline{\lambda}_1(\mu)$, оператора $\mathfrak{L}(\mu)$ такая, что $\operatorname{Re} \lambda_1(0) = 0$, $\operatorname{Im} \lambda_1(0) = -\omega_0$, $\omega_0 \neq 0$,

iii) $\frac{d}{d\mu} \operatorname{Re} \lambda_1(\mu)\big|_{\mu=0} < 0$.

Обозначим $\Lambda = -\widehat{K}\gamma \sin \widehat{w}$. Так как $\|Q\|_{\mathrm{Hom}(H)} = \kappa^{-1}$, то по условию 3 и лемме 3.2 [11] справедливо неравенство $\Lambda < -\kappa^{-1}$. Следовательно, $\sin \widehat{w} > 0$.

Преобразованием $u = w + v$ в (21) перейдем к уравнению

$$\dot{v} + \mathfrak{L}(\mu)v = \mathfrak{R}(Qv, \mu), \tag{32}$$

где $\mathfrak{R}(v, \mu) = K\gamma[\cos(w + v) - \cos w + v \sin w]$.

В качестве фазового пространства уравнения (32), т.е. пространства начальных условий, примем пространство H. Напомним, что понятие фазового пространства позволяет без принципиальных изменений распространить на бесконечномерный случай основные положения качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, касающиеся устойчивости по Ляпунову, инвариантных многообразий и т.д.

В уравнении (32) бифуркационным параметром является μ, а бифуркационным значением параметра является нуль. Для исходной задачи, очевидно, бифуркационным параметром является K с точкой бифуркации $\widehat{K}$.

Следующая лемма доказана в [11] (лемма 3.1).

Лемма 2. *Пусть выполнены условия 1 – 3. Тогда оператор Q^*, сопряженный оператору $Q : H \to H$, определяется формулой*

$$Q^*u(x) = \begin{cases} |J_{q^{-1}(x)}|u(q^{-1}(x)), & (x \in q(Q), \\ 0 & (x \in Q/q(Q). \end{cases}$$

Оператор $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}(0) : H \to H$ с областью определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}_0) = H^2$ имеет сопряженный $\mathfrak{L}_0{}^*$, определяемый равенством

$$\mathfrak{L}_0 v = -D\Delta v + v - \Lambda Q^* v,$$

с областью определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}_0^*) = \mathfrak{D}(\mathfrak{L}_0)$.

Пусть

$$\mathfrak{L}_0 Y = -i\omega_0 Y.$$

Обозначим Y^* собственную функцию оператора $\mathfrak{L}_0{}^*$, соответсвующую собственному значению $i\omega_0$ и нормированную условием $\langle Y^*, Y\rangle = 1$. Очевидно, критическим пространством оператора $\mathfrak{L}_0$ является эвклидово пространство $H_0 = \{zY(x) + \bar{z}\overline{Y}(x), \quad z \in \mathbb{C}\}$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

3. Центральные многообразия. В этом пункте формулируется теорема о центральных многообразиях семейства уравнений (32). Эта теорема играет важную роль при локальном бифуркационном анализе уравнения (32).

Определение 1. Многообразие $\mathfrak{M}$ в пространстве $H \times \mathbb{R}$ называется локально инвариантным многообразием уравнения (32) в нуле, если:

i) $\mathfrak{M} \supset \{0\} \times \{|\mu| < \mu_0\}$, где $\mu_0 > 0$ некоторая постоянная,

ii) для всякой точки $(u^0, \mu^0) \in \mathfrak{M}$ существует решение $u(t) = u(t, \mu^0)$ уравнения (32) такое, что $(u(t), \mu^0) \in \mathfrak{M}$ для всех $|t| < \lambda$, где $0 < \lambda = \lambda(u^0, \mu^0)$, $u(0, \mu^0) = u^0$.

Если $\mathfrak{M}$ локально инвариантное многообразие уравнения (32) в нуле, касающееся $H_0 \times \mathbb{R}$ в нуле, то $\mathfrak{M}$ – центральное многообразие уравнения (32) в нуле.

$\mathfrak{M}$ – инвариантное многообразие уравнения (32) в нуле, если λ не зависит от (u^0, μ^0) и $\lambda = \infty$.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия 1, 3. Пусть $s \geq 3$. Уравнение (32) имеет в $H \times \mathbb{R}$ локально инвариантное C^s многообразие $\mathfrak{M}$, касающееся $H_0 \times \mathbb{R}$ в нуле. Имеют место следующие утверждения.*

i) Найдутся такие $\mu_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, что справедливо равенство

$$\mathfrak{M} = \{(v,\mu), v = zY(x) + \bar{z}\overline{Y(x)} + \sigma(z, \bar{z}, x, \mu) \quad |\mu| < \mu_0, |z| < \varepsilon_0\},$$

где $\sigma(z, \bar{z}, x, \mu) = O(|z|^2, |z||\mu|)$ равномерно по $x \in S$.

ii) Ограничение уравнения (32) на $\mathfrak{M}$ представимо в виде

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu) z + f(z, \bar{z}, \mu), \tag{33}$$

где $f(z, \bar{z}, \mu) = O(|z|^2)$ равномерно по $|\mu| < \mu_0$.

iii) Найдется $a > 0$ такое, что если $v(t) = v(t,\mu)$ решение (32) с начальным условием $\|v(0)\| < a$, то существует решение $\tilde{v}(t) = \tilde{v}(t,\mu)$ уравнения (32), $(\tilde{v}(t), \mu) \in \mathfrak{M}$ такое, что

$$\|v(t) - \tilde{v}(t)\| < Ce^{-dt}\|v(0) - \tilde{v}(0)\|, \quad t > 0.$$

Здесь константы $C > 0$, $d > 0$ не зависят от v, μ.

iv) $\mathfrak{M} \subset H^2 \times \mathbb{R}$.

4. Глобальные решения. Изменим уравнение (32) вне некоторой окрестности нуля. Следуя [18], [19], в этом пункте доказывается, что модифицированное уравнение имеет семейство определенных на вещественной оси решений. Это семейство образует инвариантное многообразие. Ограничение указанного многообразия на окрестность нуля является локально инвариантным многообразием, удовлетворяющим теореме 3.

Пусть $H = H_0 \oplus H_+$ — разложение H на $\mathfrak{L}(0)$ инвариантные подпространства. Обозначим $\mathfrak{L}^+ = \mathfrak{L}(0)\big|_{H_+}$. В силу теоремы 1.5.3 [18] существуют такие $N > 0, \alpha > 0$, что

$$\|e^{\ \mathfrak{L}^+ t} v\| \leq N e^{\ \alpha t} \|v\|, \quad t \geq 0, \quad v \in H_+. \tag{34}$$

В уравнении (32) выполним преобразование

$$v = zY(x) + \overline{z}\overline{Y(x)} + y, \tag{35}$$

где $y \in H_+$. Полученную в результате преобразования систему, вид которой с целью сокращения приводить не будем, изменим вне окрестности нуля с помощью срезающей функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Функция φ удовлетворяет условиям: $\varphi(\xi) = 1$ при $|\xi| < 1/2$, $\varphi(\xi) = 0$ при $|\xi| > 1$, $0 \leq \varphi(\xi) \leq 1$ при $1/2 \leq |\xi| \leq 1$. Обозначим $\psi_\varepsilon : z \to \varphi(\frac{|z|}{\varepsilon})$. Очевидно, $\psi_\varepsilon(z) = 0$ при $|z| \geq \varepsilon$, $\psi_\varepsilon(z) = 1$ при $|z| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\psi_\varepsilon'(z) = 0$ при $|z| > \varepsilon$ и при $|z| < \frac{\varepsilon}{2}$. Производная ψ_ε' удовлетворяет в силу предложения VII.2.1 [14] неравенствам

$$|\psi_\varepsilon'(z)| < C\varepsilon^{-1}, \quad |\psi_\varepsilon'(z_1) - \psi_\varepsilon'(z_2)| < C\varepsilon^{-1}|z_1 - z_2|,$$

. Обозначим

$$f(z, \overline{z}, y, \mu, \varepsilon) = \langle Y^*, \mathfrak{R}(Q(zY + \overline{zY})\varphi(\frac{|z|}{\varepsilon}) + Qy, \mu)\rangle, \tag{36}$$

$$F(z, \overline{z}, y, \mu, \varepsilon) = \mathfrak{R}(Q(zY + \overline{zY})\varphi(\frac{|z|}{\varepsilon}) + Qy, \mu) - 2\operatorname{Re} f(z, \overline{z}, y, \mu, \varepsilon)Y, \tag{37}$$

$$b(\mu) = \gamma((\widehat{K} + \mu)\sin w(\mu) - \widehat{K}\gamma \sin \widehat{w}), \quad \lambda(\mu) = i\omega_0 + b(\mu)\langle Y^*, QY\rangle, \tag{38}$$

$$l(\mu)x = b(\mu)\langle Y^*, Qy\rangle, \tag{39}$$

$$p_1(\mu) = 2b(\mu)\operatorname{Re}(QY - \langle Y^*, QY\rangle Y), \quad p_2(\mu)x = 2b(\mu)(Qy - 2\operatorname{Re}\langle Y^*, Qy\rangle Y). \tag{40}$$

Рассмотрим модифицированную систему

$$\begin{gathered} \dot{z} = \lambda(\mu)z + l(\mu)x + f(z, \overline{z}, y, \mu, \varepsilon), \\ \dot{y} + \mathfrak{L}^+ y = p_1(\mu)z\varphi(\frac{|z|}{\varepsilon}) + p_2(\mu)y + F(z, \overline{z}, y, \mu, \varepsilon). \end{gathered} \tag{41}$$

Отсюда можно легко восстановить вид уравнения (32) в переменных $z, \overline{z}, x$.

Вложению $H^1 \subset H \subset H^{-1}$ и разложению $H = H_0 \oplus H_+$ отвечает вложение $H_+^1 \subset H_+ \subset H_+^{-1}$. Введем функциональные пространства $X = M^2(H_+^{-1})$, $W = C(H_+) \cap M^2(H_+^1)$ с нормой $\|y\|_W = \|y\|_{C(H_+)} + \|y\|_{M^2(H_+^1)}$.

Теорема 4. *Найдутся такие $\mu_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $c > 0$, $\beta > 0$, $\beta < \alpha$, что при $|\mu| < \mu_0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, для любого $\eta \in \mathbb{C}$ система (41) имеет определенное на $\mathbb{R}$ решение $z = z(t, \eta, \mu)$, $y = y(t, \eta, \mu)$ такое, что $z(0) = \eta$, $\|y\|_W < \varepsilon$.*

Отображение $(\eta,\mu)\to z(t,\eta,\mu), x(t,\eta,\mu)$ *дифференцируемо. Для всех* $t\in\mathbb{R}$, $\widehat{\eta}\in\mathbb{C}$, $\widehat{\mu}\in\mathbb{R}$

$$|\frac{\partial z(t,\eta,\mu)}{\partial\eta}|+|\frac{\partial z(t,\eta,\mu)}{\partial\mu}|\le ce^{\beta|t|},$$

$$\|\frac{\partial y(t,\eta,\mu)}{\partial\eta}\widehat{\eta}\|_W+\|\frac{\partial y(t,\eta,\mu)}{\partial\mu}\widehat{\mu}\|_W\le c(|\widehat{\eta}|+|\widehat{\mu}|)e^{\beta|t|},$$

$$|\frac{\partial z(t,\eta_1,\mu_1)}{\partial\eta}-\frac{\partial z(t,\eta_2,\mu_2)}{\partial\eta}|+|\frac{\partial z(t,\eta_1,\mu_1)}{\partial\mu}-\frac{\partial z(t,\eta_2,\mu_2)}{\partial\mu}|\le c(|\eta_1-\eta_2|+|\mu_1-\mu_2|)e^{\beta|t|}$$

$$\|(\frac{\partial y(t,\eta_1,\mu_1)}{\partial\eta}-\frac{\partial y(t,\eta_2,\mu_2)}{\partial\eta})\widehat{\eta}\|_W+\|(\frac{\partial y(t,\eta_1,\mu_1)}{\partial\mu}-\frac{\partial y(t,\eta_2,\mu_2)}{\partial\mu})\widehat{\mu}\|_W\le c(|\eta_1-\eta_2||\widehat{\eta}|+$$
$$+|\mu_1-\mu_2||\widehat{\mu}|)e^{\beta|t|}.$$

Заметим, что $z=z(t,\eta,\overline{\eta},\mu,\varepsilon)$, $y=y(t,\eta,\overline{\eta},\mu,\varepsilon)$. С целью сокращения зависимость решения z,y от $\overline{\eta},\varepsilon$ опущена.

Из теоремы 4 следует существование и гладкость инвариантного многообразия

$$\widetilde{\mathfrak{M}}=\{(z,x,\mu):x=\widetilde{\sigma}(z,\overline{z},\mu,\varepsilon),\quad|\mu|<\mu_0,\quad|\varepsilon|<\varepsilon_0\}$$

системы (41). Действительно, положим $\widetilde{\sigma}(z,\overline{z},\mu,\varepsilon)=y(0,z,\overline{z},\mu,\varepsilon)$. Выполнение требований гладкости очевидно. Инвариантность $\widetilde{\mathfrak{M}}$ доказывается дословным повторением рассуждений из 9.1 [18].

Доказательство теоремы 4 разбито на ряд лемм.

Обозначим $Ly=\dot{y}+\mathfrak{L}^+y$. Согласно неравенству (34), теореме 1.9.2 [15], оператор L в пространстве $C(H_+)$ регулярен. Обозначим $L_\mu y=Ly+q_2(\mu)y$. Из теоремы 1 гл.IX [15] следует.

Лемма 3. *Оператор* L_μ, $|\mu|<\mu_0$, *осуществляет гомеоморфизм* $W\to X$, *в частности, существует такая постоянная* $M>0$, *что* $\|L_\mu^{-1}f\|_W<M\|f\|_X$ *для всех* $|\mu|<\mu_0$.

Для заданного банахова пространства B функций, определенных на вещественной оси, обозначим B_β, $\beta\in\mathbb{R}$, пространство функций $f(t)$ на $\mathbb{R}$, для которых конечны величины $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|e^{-\beta|t|}f(t)\|_B$, принимаемые за нормы в B_β.

Лемма 4. *Найдется такое* $\beta_0>0$, $\beta_0<\alpha$, *что при* $\beta\in[0,\beta_0]$, *операторы* $L_\mu^{-1}:X_\beta\to W_\beta$, $|\mu|<\mu_0$, *ограничены, а их нормы не превышают* $2\|L_\mu^{-1}\|_{\mathrm{Hom}(X,W)}$.

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству леммы 3 из [19].

Лемма 5. *Пусть* $\eta\in\mathbb{C}$, $x\in W$, $\|x\|_W<\varepsilon_0$, $|\mu|<\mu_0$. *Существует определенное на* $\mathbb{R}$ *решение* $\tilde{z}(t,\eta,x)$ *задачи*

$$\dot{z}=\lambda(\mu)z+l(\mu)x+f(z,\overline{z},x,\mu,\varepsilon),\quad z(0)=\eta. \tag{42}$$

Пусть $\delta>0$, $\gamma_0=2|\operatorname{Re}\lambda'(0)|$. *Найдется постоянная* $C>0$ *такая, что справедливо неравенство*

$$\tilde{z}(t,\eta,x)\le e^{\gamma_0|\mu||t|}|\eta|+C\frac{\varepsilon^2+\mu^2}{\delta}e^{(\gamma_0|\mu|+\delta)|t|},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Пусть $\|y_k\|_W < \varepsilon_0$, $k = 1, 2$. *Существуют такие постоянные* $b_k > 0$, $k = 1, 2$, *что*

$$|\tilde{z}(t, \eta_1, y_1) - \tilde{z}(t, \eta_2, y_2)| \leq e^{\gamma_1|t|}(|\eta_1 - \eta_2| + C_{10}\frac{\varepsilon + |\mu|}{\delta}\|y_1 - y_2\|_{W_\gamma}), \qquad (43)$$

где $\gamma_1 = b_1\varepsilon + b_2|\mu| + \delta$.

Существование на $\mathbb{R}$ решения $\tilde{z}(t, \eta, y)$ задачи (42) очевидно. Переходя от задачи (42) к интегральному уравнению и используя неравенство Гронуолла, убеждаемся в справедливости леммы. Аналогичные рассуждения приводят к следующей лемме.

Лемма 6. *Пусть* $\tilde{z}(t, \mu_k) = \tilde{z}(t, \eta, \mu_k, x)$, $k = 1, 2$, $\|x\|_W < \varepsilon_0$, *решение задачи* (42) *при* $\mu = \mu_k$, $k = 1, 2$. *При* ε *и* μ_k *достаточно малых*

$$|\tilde{z}(t, \mu_1) - \tilde{z}(t, \mu_2)| \leq e^{\gamma_2|t|}|\mu_1 - \mu_2|(\frac{|\eta|}{\delta} + \frac{\varepsilon^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2}{\delta^2}),$$

где $\gamma_2 = b_1\varepsilon + b_2(|\mu_1| + |\mu_2|) + \delta$, *а постоянные* $b_k > 0$, $k = 1, 2$, *определены в лемме 5.*

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 4 [19].

Лемма 7. *Пусть* $z(t)$ *непрерывная на* $\mathbb{R}$ *функция. Существует при малых* μ, ε *в пространстве* W *единственное решение* $\tilde{y}(t, \eta, \mu, \varepsilon, z)$ *уравнения*

$$\dot{y} + \mathfrak{L}^+ y = p_1(\mu) z\varphi(\frac{|z|}{\varepsilon}) + p_2(\mu) y + F(z, \overline{z}, y, \mu, \varepsilon),$$

удовлетворяющее неравенству $\|y(t, \eta, \mu, \varepsilon, z)\|_W < \varepsilon$.

Если $z_1(t)$, $z_2(t)$ *непрерывные на* $\mathbb{R}$ *функции и* $|z_1(t) - z_2(t)| \leq \zeta e^{\gamma|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, *где* $0 \leq \gamma < \beta_0$, *то существует такая постоянная* $C > 0$, *что*

$$\|y(t, \eta, \mu, \varepsilon, z_1) - y(t, \eta, \mu, \varepsilon, z_2)\|_W \leq C(|\mu| + \varepsilon)\zeta e^{\gamma|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Доказательство теоремы 4. Пусть $(\eta, y) \in \mathbb{C} \times W$. Определим, применяя леммы 5, 7, функции $\tilde{z}(\cdot, \eta, y)$, $\tilde{y}(\cdot, \eta, \tilde{z}(\cdot, \eta, y))$. Зависимость этих функций от параметров μ, ε отражать на этом этапе с целью сокращения не будем. Обозначим $\tilde{y}(\cdot, \eta, \tilde{z}(\cdot, \eta, y)) = \mathfrak{F}(\eta, y)$. В силу леммы 7 $\|\mathfrak{F}(\eta, y)\|_W < \varepsilon$. Пусть $(\eta_k, y_k) \in \mathbb{C} \times W$, $\|y_k\|_W < \varepsilon$, $k = 1, 2$. Согласно лемм 5, 7 существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\|\mathfrak{F}(\eta_1, y_1) - \mathfrak{F}(\eta_2, y_2)\|_W \leq e^{\gamma|t|}(\frac{3}{2}|\eta_1 - \eta_2| + C\frac{\varepsilon + |\mu|}{\delta}\|y_1 - y_2\|_{W_\gamma}), \qquad (44)$$

где $\gamma(\delta) = b_1\varepsilon + b_2|\mu| + \delta$. Можно считать, что δ выбрано так, что $\gamma(\delta) < \beta_0/2$.

Рассмотрим пространство $W^\varepsilon = \{y \in W : \|x\|_W < \varepsilon\}$, $\varepsilon < \varepsilon_0$. В силу неравенств (43), (44) оператор $\mathfrak{F}(\eta, y)$ при фиксированном η и малых ε, μ отображает W^ε в себя и является сжимающим в норме $\|y\|_{W_\gamma}$. Пусть $y(t, \eta)$ его неподвижная точка и $z(t, \eta) = \tilde{z}(t, y(t, \eta))$. В силу определения $z(t, \eta)$, $y(t, \eta)$ единственное решение системы (41), удовлетворяющее условию $z(0, \eta) = \eta$, $\|y(t, \eta)\|_W < \varepsilon$. Из неравенств (43), (44) и определения y следуют неравенства

$$|z(t, \eta_1) - z(t, \eta_2)| \leq 2e^{\gamma|t|}|\eta_1 - \eta_2|,$$

$$\|y(t, \eta_1) - y(t, \eta_2)\|_W \leq C(\mu + \varepsilon)e^{\gamma|t|}|\eta_1 - \eta_2|,$$

где $\gamma = b_1\varepsilon + b_2|\mu| + \delta$. Согласно лемме 6 функции $z(t,\eta,\mu)$, $x(t,\eta,\mu)$ липшецевы по μ в окрестности нуля. Дифференцируемость z, x по η,μ доказывается также, как в [20].

Следуя [18] (Упражнение 9.1.3*), [20], устанавливаем справедливость свойства iii) теоремы.

Доказательство гладкости центрального многообразия в теореме 2 до любого заданного порядка, доказательство свойства iv) осуществляется переходом от тройки пространств H^1, H, H^{-1} к тройке пространств H^2, H^1, H. При указанном переходе используются априорные оценки решений уравнения

$$\partial u/\partial t + u = D\Delta u + \Lambda Qu + g(t).$$

с условием (22). Следуя [14], [15], приходим к следующему заключению. Существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$\|\partial_t u(t_0+1)\|^2 + \|\nabla u(t_0+1)\|^2 + \|\Delta u(t_0+1)\|^2 + \|u(t_0+1)\|^2 + \int\limits_{t_0}^{t_0+1} \|\partial_t \nabla u\|^2\, ds \le$$

$$\le C(\|u(t_0)\|^2 + \|g(t_0)\|^2 + \|g(t_0+1)\|^2 + \int\limits_{t_0}^{t_0+1} (\|g\|^2 + \|\partial_t g\|^2)\, ds.$$

5. Существование и устойчивость периодических решений. Ниже формулируется и доказывается основной результат работы – теорема о бифуркации из стационарного решения задачи (21) – (22) экспоненциально орбитально устойчивого, периодического по t решения . Характеристикой, определяющей локальную бифуркацию задачи (21) – (22) в окрестности w, является постоянная

$$c_1 = \frac{1}{2}\big(-\Lambda\langle Y^*, Q(\overline{Y}Y^2)\rangle + (\Lambda \operatorname{ctg}\widehat{w})^2\langle Y^*, 2Q(Y\mathfrak{L}_0{}^{-1}Q(Y\overline{Y}) - (\overline{Y}(2i\omega_0 + \mathfrak{L}_0)^{-1}QJ^2)))\big). \tag{45}$$

Из (39), (41), условия 3 следует равенство

$$-\operatorname{Re}\lambda_1'(0) = -\delta_1'(0) = \gamma(\sin\widehat{w} - \widehat{K}w'(0)\cos\widehat{w})\operatorname{Re}\langle Y^*, QY\rangle,$$

где $w'(0)$ удовлетворяет равенству (31).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия 1 – 3. Предположим, что* $\operatorname{Re} c_1 < 0$. *Тогда существует такое* $\mu_0 > 0$, *что справедливы следующие предложения.*

1. Если $-\mu_0 < \mu < 0$, *то решение* $\widehat{w}(\mu)$ *задачи* (21) – (22) *экспоненциально устойчиво.*

2. Если $0 < \mu < \mu_0$, *то задача* (21) – (22) *имеет единственное (с точностью сдвигов по* t*) периодическое по* t *решение* $u(t,x,\mu) = w(\mu) + v(t,x,\mu)$, *где*

$$v = \mu^{1/2}2\Big(-\delta_1'(0)(\operatorname{Re}c_1)^{-1}\Big)^{1/2}\operatorname{Re}Y(x)e^{i\omega(\mu)t} +$$

$$+\mu\Big(\delta_1'(0)(\operatorname{Re}c_1)^{-1}\Big)\Lambda\operatorname{ctg}\widehat{w}\Big[-\mathfrak{L}_0^{-1}(QYQ\overline{Y})(x) + \operatorname{Re}(2i\omega_0 + \mathfrak{L}_0)^{-1}(QJ^2)(x)\Big] + O(\mu^{3/2})$$

$$\omega(\mu) = \omega_0 + \langle Y^*, QY\rangle Yb(\mu) + \operatorname{Im}c_1\mu\Big(\delta_1'(0)(\operatorname{Re}c_1)^{-1}\Big) + O(\mu^{3/2}).$$

Решение u_m *является классическим решением.*

Решение u_m экспоненциально орбитально устойчиво. Решение $w(\mu)$ неустойчиво.

3. Неблуждающих точек [12], *отличных от указанных выше, задача* (21) - (22) *в окрестности $w(\mu)$ не имеет.*

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что существует гладкое центральное многообразие $\mathfrak{M}$ уравнения (32), определяемое равенством

$$v = zY(x) + \overline{z}\overline{Y}(x) + \sigma(z,\overline{z},x,\mu), \quad |\mu| < \mu_0, |z| < \varepsilon_0. \tag{46}$$

Уравнение (32) на многообразии $\mathfrak{M}$ можно представить в виде

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + c_1(\mu)z^2\overline{z} + O(|z|^4). \tag{47}$$

Здесь $c_1(\mu)$ гладкая функция μ. Найдем $c_1(0)$. С этой целью построим центральное многообразие уравнения (32) при $\mu = 0$. Представим $\sigma(z,\overline{z},x,0)$, в виде $\sigma = \sigma_2 + \sigma_2 + \ldots$. Здесь σ_2, σ_3, ..., соответственно квадратичная, кубическая, ... формы относительно $z, \overline{z}$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2!}\sigma_{20}z^2 + \sigma_{11}z\overline{z} + \frac{1}{2!}\sigma_{02}\overline{z}^2, \quad \sigma_3 = \frac{1}{3!}\sigma_{30}z^3 + \frac{1}{2!}\sigma_{21}z^2\overline{z} + \frac{1}{2!}\sigma_{12}z\overline{z}^2 + \frac{1}{3!}\sigma_{03}\overline{z}^3.$$

В результате подстановки (46), (47) при $\mu = 0$ в уравнение (32) относительно коэффициентов σ_2 получаем уравнения

$$(2i\omega_0 + \mathfrak{L}_0)\sigma_{20} = -\widehat{K}\gamma\cos\widehat{w}QY^2,$$
$$\mathfrak{L}_0\sigma_{11} = -\widehat{K}\gamma\cos\widehat{w}Q(Y\overline{Y}).$$

Согласно условию 2 полученные уравнения однозначно разрешимы

$$\sigma_{20} = -\widehat{K}\gamma\cos\widehat{w}(2i\omega_0 + \mathfrak{L}_0)^{-1}QY^2, \tag{48}$$
$$\sigma_{11} = -\widehat{K}\gamma\cos\widehat{w}\mathfrak{L}_0^{-1}Q(Y\overline{Y}), \tag{49}$$

$\sigma_{02} = \overline{\sigma}_{20}$. Легко видеть, что уравнение относительно σ_{30} однозначно разрешимо. Функция σ_{21} удовлетворяет уравнению

$$(i\omega_0 + \mathfrak{L}_0)\sigma_{21} + 2c_1(0) = -\widehat{K}\gamma\cos\widehat{w}(Q(2Y\sigma_{11} + \overline{Y}\sigma_{20}) + \widehat{K}\gamma\sin\widehat{w}Q(Y^2\overline{Y}). \tag{50}$$

Соответствующее этому уравнению однородное имеет по условию 3 единственное линейно независимое решение Y. Для разрешимости уравнения (50) необходимо и достаточно, чтобы свободный член p удовлетворял условию $(Y^*, p) = 0$. Отсюда следует, учитывая (48), (49), что $c_1(0) = c_1$, где ляпуновская величина c_1 определена равенством (45). Выбрав c_1 указанным образом, находим единственное σ_{21} такое, что $(Y^*, \sigma_{21}) = 0$. Отметим, что коэффициенты формы σ_4 находятся однозначным образом. Из условия разрешимости σ_5 находится однозначно величина c_2.

Продолжая этот процесс, находим разложение σ и представление уравнения (47) при $\mu = 0$ на центральном многообразии.

Уравнение (47) в окрестности нуля орбитально топологически эквивалентно [17] уравнению

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z + c_1z^2\overline{z}.$$

Очевидно, при $0 < \mu < \mu_0$ существует единственное с точностью до сдвигов по t периодическое решение уравнения (47) вида

$$z = \left(\delta_1'(0)(\operatorname{Re} c_1)^{-1}\right)^{1/2} \mu^{1/2} e^{i\omega(\mu)t} + O(\mu),$$

где

$$\omega(\mu) = \omega_0 + \operatorname{Im}(e^{imh}(^*, QY)b(\mu) + \operatorname{Im} c_1\mu\left(\delta_1'(0)(\operatorname{Re} c_1)^{-1}\right) + O(\mu^2).$$

Учитывая равенство (46), и используя теорему 3, убеждаемся в справедливости теоремы.

Список литературы

[1] Ахманов С.А., Воронцов М. А., Иванов В.Ю. *Новые принципы оптической обработки информации* – М.: Наука, 1990. С. 263-325.

[2] Кащенко С.А. // Журн. вычислит. математики и мат. физики, 1991 Т. 31. N 3. С. 467 – 473.

[3] Разгулин А.В. *Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1993. Т. 33. N. 1. С. 69 – 80.

[4] Разгулин А.В. *Устойчивость бифуркационных автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1993. Т. 33. N. 10. С.1499 – 1508.

[5] Клевчук И.И. // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, N 10, С. 1342 – 1352.

[6] Белан Е.П. *Вращающиеся волны в параболической задаче с преобразованным аргументом* //Динамические системы. – Симферополь: "КФТ"2000.– Вып.16 – С. 160 – 167.

[7] Белан Е.П. *О бифуркаци бегущих волн в сингулярно возмущенной параболической задаче с преобразованным аргументом* //Динамические системы. – Симферополь: "КФТ"2001.– Вып.17 – С. 179 – 184.

[8] Белан Е.П. *Бифуркация периодических решений в параболической задаче с преобразованным аргументом* //Ученые записки ТНУ, сер. матем., мех., информатикеа и кибернетика — 2001. Т. 14. №1 – С. 24 – 33.

[9] Белан Е.П. *Об автоколебаниях в сингулярно возмущенном параболическом уравнении с преобразованным аргументом* //ДАНУ 2002. №7 – С. 7 – 12.

[10] Skubachevskii A.L. *Bifurcation of periodic solution for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics* //Nonlinear Analysis. Theory. Methods & Applications. 1998. Vol. 12 No.2. P. 261 – 278.

[11] Скубачевский А.Л. *О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения* //Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. N.10. С.1394 – 1401.

[12] Ruelle D. //Arch.Rational Mech. Anal. 1973. Vol. 51, N 2. P. 136 – 152.

[13] Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения* – М.: Мир, 1980.

[14] Бабин А.В., Вишик М.И. *Аттракторы эволюционных уравнений*. М., 1989.

[15] Левитан Б.М., Жиков В.В. *Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения*. М.: Изд-во МГУ, 1978.

[16] Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. *Теория бифуркаций*. – Современные направления математики. Фундаментальные направления. Т. 5 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР) М.: Мир, 1985.

[17] Kuznetzov Y.A. *Elements of applied bifurcation theory*. New York. Springer - Verlag, 1998.

[18] Хенри Д. *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.* М.,
[19] Белан Е.П., Лыкова О.Б. // Укр. мат. журн. 1996. Т. 48. N 8. С. 1021 – 1036.
[20] Белан Е.П., Лыкова О.Б. // Укр. мат. журн. 1998. Т. 50. N 3. С. 315 – 328.