Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2002) 5 - 10

УДК 532.5:517.9:532

Э.И. Батыр

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЧЛЕНЕННЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ИДЕАЛЬНУЮ НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

1. Постановка задачи

Рассматривается система n тел G_i, $i = \overline{1,n}$, последовательно сочлененных сферическими шарнирами. Тело G_1 имеет неподвижную точку O_1. Тела G_i и G_{i-1} $(i = \overline{1,n})$ имеют общую точку O_i. Тело G_i содержит полость Ω_i, заполненную идеальной несжимаемой жидкостью, $i = \overline{1,n}$.

Система совершает малые движения вблизи состояния покоя.

Введем в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ неподвижную систему координат $O_1x^1x^2x^3$. Рассмотрим подвижную систему координат $O_ix_i^1x_i^2x_i^3$ с началом в точке O_i, жестко связанную с i телом, $i = \overline{1,n}$. Единичные векторы осей системы $O_1x^1x^2x^3$ обозначаются через $\vec{e}^{\,k}$, а осей систем $O_ix_i^1x_i^2x_i^3$ – через $\vec{e}_i^{\,k}$, $i = \overline{1,n}$, $k = 1,2,3$.

Положение подвижной системы координат $O_ix_i^1x_i^2x_i^3$ относительно неподвижной системы координат $O_1x^1x^2x^3$ задается вектором углового перемещения $\vec{\delta}_i(t)$, его длина есть угол поворота оси, направление по правилу буравчика [1]: $\vec{\delta}_i(t) = \sum\limits_{k=1}^{3} \delta_i^k \vec{e}_i^{\,k}$.

Пусть m_i – масса i тела; $\vec{r}_i$ – радиус-вектор, связывающий полюс O_i с точкой тела G_i; вектор $\vec{c}_i = -\alpha_i \vec{e}_i^{\,3} (\alpha_i > 0)$ проведен из O_i в центр масс тела G_i, $i = \overline{1,n}$. Введем $\vec{h}_i = \overline{O_iO_{i+1}}$, $i = \overline{1,n-1}$.

На систему действует сила тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}^{\,3}$. Силы трения в точках O_i отсутствуют.

Линеаризованные уравнения движения n гиростатов таковы [2]:

$$J_1\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} + L_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \sum_{k=2}^{n}\int\limits_{G_k} \vec{h}_1 \times \Big(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{d\vec{\omega}_j}{dt}\times\vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt}\times\vec{r}_k + \frac{\partial\vec{u}_k}{\partial t}\Big)dm_k =$$

$$= -(m_1\alpha_1 + \sum_{k=2}^{n} m_k h_1)g(\delta_1^1\vec{e}_1^{\,1} + \delta_1^2\vec{e}_1^{\,2}) + \int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\vec{f}_1 dm_1 + \sum_{k=2}^{n}\int\limits_{G_k}\vec{h}_1\times\vec{f}_k dm_k \quad (1)$$

$$J_i\frac{d\vec{\omega}_i}{dt} + L_i\frac{\partial\vec{u}_i}{\partial t} + \sum_{k=i+1}^{n}\int\limits_{G_k} \vec{h}_i \times \Big(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{d\vec{\omega}_j}{dt}\times\vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt}\times\vec{r}_k + \frac{\partial\vec{u}_k}{\partial t}\Big)dm_k +$$

$$+\int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times (\sum_{j=1}^{i-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j) dm_i = -(m_i\alpha_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k h_i) g(\delta_i^1 \vec{e}_i^1 + \delta_i^2 \vec{e}_i^2) +$$

$$+\int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \vec{f}_i dm_i + \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \vec{h}_i \times \vec{f}_k dm_k, \quad i = \overline{2, n-1}, \quad (2)$$

$$J_n \frac{d\vec{\omega}_n}{dt} + L_n \frac{\partial \vec{u}_n}{\partial t} + \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times (\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j) dm_n =$$

$$= -m_n \alpha_n g(\delta_n^1 \vec{e}_n^1 + \delta_n^2 \vec{e}_n^2) + \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \vec{f}_n dm_n \quad (3)$$

Здесь J_i — тензор инерции гиростата G_i в точке O_i, $\vec{f}_i$ — внешнее поле малых массовых сил, записанное в i подвижной системе, действующих на систему тел. $\vec{\omega}_i = d\vec{\delta}_i/dt$ абсолютная угловая скорость тела G_i, $\vec{u}_i = \vec{u}_i(t, \vec{r}_i)$- относительная скорость жидкости. Через L_i обозначен гиростатический момент гиростата G_i в точке O_i: $L_i\vec{u}_i := \rho_i \int_{\Omega_i} \vec{r}_i \times \vec{u}_i d\Omega_i, \quad i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим теперь линеаризованные уравнения движения и краевые условия гидродинамической части задачи. В подвижной системе координат $O_i x_i^1 x_i^2 x_i^3$ уравнения для определения поля относительной скорости $\vec{u}_i = \vec{u}_i(t, \vec{r}_i)$, динамического давления $p_i(t, \vec{r}_i)$, с учетом малого внешнего поля массовых сил $\vec{f}_i = \vec{f}_i(t, \vec{r}_i)$ при постоянной плотности жидкости ρ_i имеют вид [1]:

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 = -\rho_1^{-1} \nabla p_1 + \vec{f}_1, \quad \mathrm{div}\vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1); \quad (4)$$

$$\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times \vec{r}_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{h}_k = -\rho_i^{-1} \nabla p_i + \vec{f}_i, \quad \mathrm{div}\vec{u}_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i), \quad i = \overline{2, n} \quad (5)$$

При этом должны выполняться граничные условия:

$$\vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = 0 \quad (\text{в } \partial\Omega_i) \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Учтем также уравнения связи:

$$\frac{d\vec{\delta}_i}{dt} - \vec{\omega}_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Для полной математической формулировки задачи к уравнениям (1)— (7) следует еще добавить начальные условия:

$$\vec{u}_i(0, \vec{r}_i) = \vec{u}_i^0(\vec{r}_i), \quad \vec{\omega}_i(0) = \vec{\omega}_i^0, \quad \vec{\delta}_i(0) = \vec{\delta}_i^0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

2. Преобразование уравнений движения гиростатов

Для исследования задачи (1) – (8) воспользуемся подходом, описанным в случае одного подвижного тела в [1]. Будем считать, что при каждом t все члены в уравнениях Эйлера принадлежат пространству $\vec{L}_2(\Omega_i) = \vec{J}_0(\Omega_i) \oplus \vec{G}(\Omega_i)$, $\vec{J}_0(\Omega_i) := \{\vec{u}_i \in \vec{L}_2(\Omega_i) | \ \mathrm{div}\vec{u}_i = 0 \ (\text{в } \Omega_i), \quad \vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = 0 \ (\text{на } S_i)\}$, $\vec{G}(\Omega_i) := \{\vec{u}_i \in \vec{L}_2(\Omega_i) | \ \vec{u}_i = \nabla p_i\}$. В соответствии с этим далее частные производные $\partial/\partial t$ для полей скоростей заменим на d/dt, считая, что эти поля являются функциями t со значаниями в $\vec{L}_2(\Omega_i)$.

Применим к обеим частям этих уравнений оператор ортогонального проектирования P_{0i} на подпространство $\vec{J}_0(\Omega_i)$, $\quad i=\overline{1,n}$; будем иметь

$$\frac{d\vec{u}_1}{dt} = -P_{01}(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1) + P_{01}(\vec{f}_1), \tag{9}$$

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = -P_{0i}(\frac{d\vec{\omega}_i}{dt}\times\vec{r}_i) - P_{0i}(\sum_{k=1}^{i-1}\frac{d\vec{\omega}_k}{dt}\times\vec{h}_k) + P_{0i}(\vec{f}_i), \quad i=\overline{2,n} \tag{10}$$

Решение уравнений (9)— (10) с помощью потенциалов Жуковского описано в монографии [1].

Пользуясь (9) и (10), можно в уравнениях (1) — (3) исключить $d\vec{u}_i/dt$, имеем:

$$J_1\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} - \rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times P_{01}(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1)d\Omega_1 + \sum_{k=2}^{n}\int\limits_{G_k}\vec{h}_1\times(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{d\vec{\omega}_j}{dt}\times\vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt}\times\vec{r}_k)dm_k -$$
$$-\sum_{k=2}^{n}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{h}_1\times P_{0k}(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{d\vec{\omega}_j}{dt}\times\vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt}\times\vec{r}_k)d\Omega_k + (m_1\alpha_1 + \sum_{k=2}^{n}m_k h_1)g(\delta_1^1\vec{e}_1^{\,1} + \delta_1^2\vec{e}_1^{\,2}) =$$
$$= \int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\vec{f}_1 dm_1 - \rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times P_{01}\vec{f}_1 d\Omega_1 + \sum_{k=2}^{n}\int\limits_{G_k}\vec{h}_1\times\vec{f}_k dm_k - \sum_{k=2}^{n}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{h}_1\times P_{0k}\vec{f}_k d\Omega_k, \tag{11}$$

$$J_i\frac{d\vec{\omega}_i}{dt} - \rho_i\int\limits_{\Omega_i}\vec{r}_i\times P_{0i}(\frac{d\vec{\omega}_i}{dt}\times\vec{r}_i)d\Omega_i + \int\limits_{G_i}\vec{r}_i\times(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{d\vec{\omega}_j}{dt}\times\vec{h}_j)dm_i -$$
$$-\rho_i\int\limits_{\Omega_i}\vec{r}_i\times P_{0i}(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{d\vec{\omega}_j}{dt}\times\vec{h}_j)d\Omega_i + \sum_{k=i+1}^{n}\int\limits_{G_k}\vec{h}_i\times(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{d\vec{\omega}_j}{dt}\times\vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt}\times\vec{r}_k)dm_k -$$
$$-\sum_{k=i+1}^{n}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{h}_i\times P_{0k}(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{d\vec{\omega}_j}{dt}\times\vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt}\times\vec{r}_k)d\Omega_k +$$
$$+(m_i\alpha_i + \sum_{k=i+1}^{n}m_k h_i)g(\delta_i^1\vec{e}_i^{\,1} + \delta_i^2\vec{e}_i^{\,2}) = \int\limits_{G_i}\vec{r}_i\times\vec{f}_i dm_i - \rho_i\int\limits_{\Omega_i}\vec{r}_i\times P_{0i}\vec{f}_i d\Omega_i +$$
$$+\sum_{k=i+1}^{n}\int\limits_{G_k}\vec{h}_i\times\vec{f}_k dm_k - \sum_{k=i+1}^{n}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{h}_i\times P_{0k}\vec{f}_k d\Omega_k, \qquad i=\overline{2,n-1}, \tag{12}$$

$$J_n\frac{d\vec{\omega}_n}{dt} - \rho_n\int\limits_{\Omega_n}\vec{r}_n\times P_{0n}(\frac{d\vec{\omega}_n}{dt}\times\vec{r}_n)d\Omega_n + \int\limits_{G_n}\vec{r}_n\times(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{d\vec{\omega}_j}{dt}\times\vec{h}_j)dm_n -$$

$$-\rho_n \int\limits_{\Omega_n} \vec{r}_n \times P_{0n}(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j) d\Omega_n + m_n \alpha_n g(\delta_n^1 \vec{e}_n^1 + \delta_n^2 \vec{e}_n^2) =$$

$$= \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \vec{f}_n dm_n - \rho_n \int\limits_{\Omega_n} \vec{r}_n \times P_{0n} \vec{f}_n d\Omega_n. \quad (13)$$

3. Переход к задаче Коши для дифференциального уравнения

Рассмотрим уравнения (11) — (13) как систему уравнений относительно вектор столбца $\vec{\delta} = (\vec{\delta}_1(t), \vec{\delta}_2(t), \dots, \vec{\delta}_n(t))^t$, считающегося функцией t со значениями в пространстве $\mathbf{R}^{3n} := \underbrace{\mathbf{R}^3 \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}^3}_{n}$. Коротко эту систему можно записать в виде одного уравнения:

$$A\frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2} + B\vec{\delta} = \vec{M}(t), \quad \vec{\delta}(0) = (\vec{\delta}_1(0), \vec{\delta}_2(0), \dots, \vec{\delta}_n(0))^t. \quad (14)$$

Здесь матрицы $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ и $B = (B_{ij})_{i,j=1}^n$ действуют следующим образом:

$$A_{ii}\vec{\delta}_i := J_i\vec{\delta}_i - \rho_i \int\limits_{\Omega_i} \vec{r}_i \times P_{0i}(\vec{\delta}_i \times \vec{r}_i) d\Omega_i + \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \vec{h}_i \times (\vec{\delta}_i \times \vec{h}_j) dm_k -$$

$$- \sum_{k=i+1}^{n} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{h}_i \times P_{0k}(\vec{\delta}_i \times \vec{h}_j) dm_k, \quad \forall i < j: \quad A_{ij}\vec{\delta}_j := \int\limits_{G_j} \vec{h}_i \times (\vec{\delta}_j \times \vec{r}_j) dm_j -$$

$$-\rho_j \int\limits_{\Omega_j} \vec{h}_i \times P_{0j}(\vec{\delta}_j \times \vec{r}_j) d\Omega_j + \sum_{k=j+1}^{n} \int\limits_{G_k} \vec{h}_i \times (\vec{\delta}_j \times \vec{h}_j) dm_k - \sum_{k=j+1}^{n} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{h}_i \times P_{0k}(\vec{\delta}_j \times \vec{h}_j) d\Omega_k,$$

$$\forall j > i: \quad A_{ji}\vec{\delta}_i := \int\limits_{G_j} \vec{r}_j \times (\vec{\delta}_i \times \vec{h}_i) dm_j - \rho_j \int\limits_{\Omega_j} \vec{r}_j \times P_{0j}(\vec{\delta}_i \times \vec{h}_i) d\Omega_j +$$

$$+ \sum_{k=j+1}^{n} \int\limits_{G_k} \vec{h}_j \times (\vec{\delta}_i \times \vec{h}_i) dm_k - \sum_{k=j+1}^{n} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{h}_j \times P_{0k}(\vec{\delta}_i \times \vec{h}_i) d\Omega_k, \quad i, j = \overline{1, n-1};$$

$$A_{nn}\vec{\delta}_n := J_n\vec{\delta}_n - \rho_n \int\limits_{\Omega_n} \vec{r}_n \times P_{0n}(\vec{\delta}_n \times \vec{r}_n) d\Omega_n,$$

$$A_{in}\vec{\delta}_n := \int\limits_{G_n} \vec{h}_i \times (\vec{\delta}_n \times \vec{r}_n) dm_n - \rho_n \int\limits_{\Omega_n} \vec{h}_i \times P_{0n}(\vec{\delta}_n \times \vec{r}_n) d\Omega_n,$$

$$A_{ni}\vec{\delta}_i := \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times (\vec{\delta}_i \times \vec{h}_i) dm_n - \rho_n \int\limits_{\Omega_n} \vec{r}_n \times P_{0n}(\vec{\delta}_i \times \vec{h}_i) d\Omega_n, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (15)$$

$$B_{ii}\vec{\delta}_i := (m_i\alpha_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k h_i) g(\delta_i^1 \vec{e}_i^1 + \delta_i^2 \vec{e}_i^2), \quad \forall i \neq j: \quad B_{ij}\vec{\delta}_j := 0, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (16)$$

$$\vec{M}(t) := (\vec{M}_1(t), \vec{M}_2(t), \dots, \vec{M}_n(t))^t, \quad \vec{M}_i(t) = \int_{G_i} \vec{r}_i \times \vec{f}_i dm_i -$$

$$- \rho_i \int_{\Omega_i} \vec{r}_i \times P_{0i}\vec{f}_i d\Omega_i + \sum_{k=i+1}^{n} \int_{G_k} \vec{h}_i \times \vec{f}_k dm_k - \sum_{k=i+1}^{n} \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{h}_i \times P_{0k}\vec{f}_k d\Omega_k, \quad i = \overline{1,n}. \tag{17}$$

4. Вспомогательные утверждения и основные теоремы о разрешимости начально-краевой задачи

Лемма 4.1. Матрица A является самосопряженной и положительной.

Лемма 4.2. Матрица B является самосопряженной и неотрицательной.

Лемма 4.3. Ядро $KerB$ матрицы B n-мерно и образовано векторами $(\vec{e}_1^{\,3}, 0, 0, \dots, 0)^t$, $(0, \vec{e}_2^{\,3}, 0, \dots, 0)^t$, $\dots$, $(0, 0, 0, \dots, \vec{e}_n^{\,3})^t$.

Эти свойства позволяют установить следующие факты, обобщающие известную теорему Н.Е. Жуковского [1]

Теорема 4.1. Если поле массовых сил потенциально, то система n последовательно соединенных тел с полостями, полностью заполненными идеальной жидкостью, движется под действием внешних сил так же, как движется под действием этой же системы сил система n последовательно соединенных твердых тел с измененными характеристиками.

Обозначим основные характеристики системы n последовательно соединенных тел с полостями, полностью заполненными затвердевшей (неподвижной) жидкостью, следующим образом: $\tilde{A}$ – матрица кинетической энергии, $\tilde{B}$ – матрица потенциальной энергии, $\tilde{M}$ – вектор моментов всех сил, действующих на систему тел. Тогда при выполнении условий теоремы 4.1 верны следующие соотношения: $\tilde{A} \geq A$, $\tilde{B} = B$, $\tilde{M} = \vec{M}$. При этом матрицу A можно представить в виде $A = \tilde{A} + R$, где

$$R_{ii}\vec{\delta}_i := \rho_i \int_{\Omega_i} \vec{r}_i \times P_{0i}(\vec{\delta}_i \times \vec{r}_i) d\Omega_i + \sum_{k=i+1}^{n} \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{h}_i \times P_{0k}(\vec{\delta}_i \times \vec{h}_j) dm_k,$$

$$\forall i < j: \quad R_{ij}\vec{\delta}_j := \rho_j \int_{\Omega_j} \vec{h}_i \times P_{0j}(\vec{\delta}_j \times \vec{r}_j) d\Omega_j + \sum_{k=j+1}^{n} \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{h}_i \times P_{0k}(\vec{\delta}_j \times \vec{h}_j) d\Omega_k,$$

$$\forall j > i: \quad R_{ji}\vec{\delta}_i := \rho_j \int_{\Omega_j} \vec{r}_j \times P_{0j}(\vec{\delta}_i \times \vec{h}_i) d\Omega_j + \sum_{k=j+1}^{n} \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{h}_j \times P_{0k}(\vec{\delta}_i \times \vec{h}_i) d\Omega_k, \quad i, j = \overline{1, n-}$$

$$R_{nn}\vec{\delta}_n := \rho_n \int_{\Omega_n} \vec{r}_n \times P_{0n}(\vec{\delta}_n \times \vec{r}_n) d\Omega_n, \quad R_{in}\vec{\delta}_n := \rho_n \int_{\Omega_n} \vec{h}_i \times P_{0n}(\vec{\delta}_n \times \vec{r}_n) d\Omega_n,$$

$$R_{ni}\vec{\delta}_i := \rho_n \int\limits_{\Omega_n} \vec{r}_n \times P_{0n}(\vec{\delta}_i \times \vec{h}_i) d\Omega_n, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (18)$$

Лемма 4.4. Матрица R является самосопряженной и положительной.

Теорема 4.2. Для Задачи Коши (14) существует единственное решение на интервале $[0, T]$, если выполнены следующие условия:

1. $\vec{u}_i^0 \in \vec{J}_0(\Omega_i), \quad \vec{\omega}_i^0 \in R^3, \quad \vec{\delta}_i^0 \in R^3;$
2. $\vec{f}_i(t) \in C([0, T]; \quad \vec{L}_2(\Omega_i)), \quad i = \overline{1, n}.$

5. Собственные колебания

Рассмотрим решения однородной задачи (14), зависящие от времени по закону $\vec{\delta}(t) = \vec{\eta} e^{i\omega t}$, где ω — частота собственных колебаний. Получаем задачу

$$B\vec{\eta} = \lambda A \vec{\eta}, \quad \lambda = \omega^2, \quad \vec{\eta} \in \underbrace{\mathbf{R}^3 \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}^3}_{n}. \quad (19)$$

Теорема 5.1. Спектр задачи (19) состоит из неотрицательных собственных значений λ_k, $(k = \overline{1, 3n})$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 < \lambda_{n+1} \le \lambda_{n+2} \le \ldots \le \lambda_{3n}$. Отвечающие им собственные элементы $\{\vec{\eta}_k\}_{k=1}^{3n}$ образуют базис в $\mathbf{R}^{3n}$ и удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$(B\vec{\eta}_k, \vec{\eta}_j) = \lambda_k (A\vec{\eta}_k, \vec{\eta}_j) = \lambda_k \delta_{kj}.$$

Обозначим через $\tilde{\lambda}_k$ собственные значения задачи

$$\tilde{B}\vec{\xi} = \tilde{\lambda} \tilde{A} \vec{\xi}, \quad \tilde{\lambda} = \tilde{\omega}^2, \quad \vec{\xi} \in \underbrace{\mathbf{R}^3 \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}^3}_{n} \quad (20)$$

Для спектральных задач (19) и (20) верны следующие соотношения $\lambda_k \ge \tilde{\lambda}_k, \quad k = \overline{1, 3n}$.

Список литературы

[1] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.*– М.: Наука, 1989, – 416 с.

[2] Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. *Классические задачи динамики твердого тела.* – К.: Наук. думка, 1978, 296 с.

[3] Ишлинский А.Ю. *Механика относительного движения.* – М.: Наука, 1981, – 191 с.

[4] Лурье Л.И. *Аналитическая механика.* – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961, – 824 с.

[5] Батыр Э.И. *Малые движения двойного маятника с полостями, содержащими идеальную несжимаемую жидкость..* – //Ученые записки ТНУ.-Симферополь, 2001.- Том 14(53), №1 - С.18-23.