Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского
Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2002) 123 – 127
УДК 519.6

А.С. Анафиев

ДЕЛЬТА-БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

1. Основные определения

Обозначим $B_\Delta = \{0, 1, \Delta\}$, и будем придавать его элементам следующий смысл: 1 - *истина*, 0 - *ложь* и Δ - *неопределенность*. Тогда, $B_\Delta^n = \underbrace{B_\Delta \times B_\Delta \times \cdots \times B_\Delta}_{\text{n}} = \{0, 1, \Delta\}^n$. Легко видеть, что мощность множества B_Δ^n равна 3^n.

Определение 1. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *дельта-булевой*, если она принимает значения из множества B_Δ, и каждый из ее аргументов может принимать значение 0, 1 или Δ.

Аргументы $x_1, x_2, \cdots, x_n$ дельта-булевой функции будем называть дельта-булевыми переменными. Упорядоченная совокупность $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \tilde{x}$ дельта-булевых переменных называется *дельта-булевым набором длины n*. В некоторых случаях для названия дельта-булевых наборов будем также использовать синонимы дельта-булев *вектор* и *точка* (при использовании алгебраической или геометрической интерпретации).

Определение 2. Классом $P_\Delta(n)$ будем называть множество всех дельта-булевых функций $\{f : B_\Delta^n \longrightarrow B_\Delta\}$.

При табличном задании функции $f \in P_\Delta(n)$ выписывается таблица, имеющая $n+1$ столбцов и 3^n строк следующего вида:

x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n	$y = f(x_1, \cdots, x_n)$
0	0	$\cdots$	0	0	$f(0, 0, \cdots, 0, 0)$
0	0	$\cdots$	0	1	$f(0, 0, \cdots, 0, 1)$
0	0	$\cdots$	0	Δ	$f(0, 0, \cdots, 0, \Delta)$
0	0	$\cdots$	1	0	$f(0, 0, \cdots, 1, 0)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
Δ	Δ	$\cdots$	Δ	0	$f(\Delta, \Delta, \cdots, \Delta, 0)$
Δ	Δ	$\cdots$	Δ	1	$f(\Delta, \Delta, \cdots, \Delta, 1)$
Δ	Δ	$\cdots$	Δ	Δ	$f(\Delta, \Delta, \cdots, \Delta, \Delta)$

Введем определение ряда элементарных дельта-булевых функций, используя которые можно будет осуществлять содержательные функциональные построения и исследовать вопросы восстановления булевых функций.

Конъюнкция

&	0	1	Δ
0	0	0	0
1	0	1	Δ
Δ	0	Δ	Δ

Дизъюнкция

∨	0	1	Δ
0	0	1	Δ
1	1	1	1
Δ	Δ	1	Δ

Эквивалентность

∼	0	1	Δ
0	1	0	Δ
1	0	1	Δ
Δ	Δ	Δ	Δ

Отрицание

x	$\bar{x}$
0	1
1	0
Δ	Δ

Импликация

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
0	Δ	1
1	0	0
1	1	1
1	Δ	Δ
Δ	0	Δ
Δ	1	1
Δ	Δ	Δ

Сумма mod 2

⊕	0	1	Δ
0	0	1	Δ
1	1	0	Δ
Δ	Δ	Δ	Δ

Зададим следующую систему тождеств.

$$T_1 : \begin{cases} A\&\bar{A} = 0; \\ A \vee \bar{A} = 1; \end{cases}$$

Формула в $P_\Delta(n)$ определяется аналогично формуле в $P_2(n)$ [1]. Рассмотрим некоторую формулу $\Phi(x_1, \cdots x_n)$, для того, чтобы вычислить формулу на интерпретации $I = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in E_\Delta, i = 1..n$, необходимо:

(1) вначале подставить в формулу $\alpha_i \neq \Delta$;
(2) упростить данную формулу, используя законы де Моргана, правила поглощения, склеивания, обобщенного склеивания и т.д.;
(3) учесть тождества T_1;
(4) подставить $\alpha_i = \Delta$.

Данную схему будем называть *схемой* Σ_Δ^Φ *вычисления формулы* в $P_\Delta(n)$

Пример 2. Пусть $\Phi(x, y, z) = xy \vee \bar{x}z$.

Тогда $\Phi(\Delta, 1, 1) = x \cdot 1 \vee \bar{x} \cdot 1 = x \vee \bar{x} = 1$, $\Phi(0, \Delta, 1) = 0 \cdot y \vee 1 \cdot 1 = 1$ или $\Phi(1, \Delta, 1) = 1 \cdot y \vee 0 \cdot 1 = y = \Delta$.

Определение 3. Отношение количества неопределенных значений функции $f(x_1, \cdots, x_n)$ (значения, при которых функция равна Δ) к количеству всех наборов дельта-куба B_Δ^n (3^n) называется *степенью неопределенности функции* f.

Степень неопределенности функции f будем обозначать $DegUnc(f)$. $DegUnc(f)$ является функционалом, действующим из множества $P_\Delta(n)$ всех дельта-булевых функций во множество $\mathbb{Q}_+$ (множество положительных рациональных чисел и 0). Подсчитаем степени неопределенности (СН) для функций, введенных выше.

$DegUnc(\bar{x}) = 1/3(33.3\%)$,
$DegUnc(f_{\&}) = 3/9(33.3\%)$,
$DegUnc(f_{\vee}) = 3/9(33.3\%)$,
$DegUnc(f_{\rightarrow}) = 3/9(33.3\%)$,
$DegUnc(f_{\oplus}) = 5/9(55.6\%)$,
$DegUnc(f_{\sim}) = 5/9(55.6\%)$.

Определение 4. *Относительной степенью существенности (ОСС)* переменной x_i функции $f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ будем называть отношение количества неопределенных значений функции на наборах, в которых переменная x_i не определена, к числу таких наборов.

Определение 5. *Абсолютной степенью существенности (АСС)* переменной x_i функции $f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ будем называть отношение количества неопределенных значений функций на наборах, при которых переменная x_i не определена, а переменные $x_j, (j \neq i)$ - определенны, к числу таких наборов.

Пример 3. Подсчитаем ACC для следующих функций:

(1) $f_{\&}(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $ACC(x_1, f_{\&}) = ACC(x_2, f_{\&}) = 1/2$;
(2) $f_{\oplus}(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$, $ACC(x_1, f_{\oplus}) = ACC(x_2, f_{\oplus}) = 1$;
(3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 x_3$, $ACC(x_1, f) = 3/4$; $ACC(x_2, f) = (x_3, f) = 1/4$;

Определение 6. Интерпретация $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ называется *неопределенной*, если $\exists i : \alpha_i = \Delta$, иначе интерпретация называется *определенной*, а число неопределенных значений в интерпретации будем называть *неопределенностью интерпретации*.

Определение 7. *Дельта-Расширением* булевой функции $f(x_1, \cdots, x_n)$ будем называть доопределение данной функций на неопределенных интерпретациях до дельта-булевой функции, причем значение функции на этих интерпретациях вычисляется согласно схеме Σ_{Δ}^{Φ}.

Пример 4. Построим дельта-расширение для булевой функции $f(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$. Для этого необходимо вычислить данную функцию на неопределенных наборах согласно схеме Σ_{Δ}^{Φ}. Результат запишем в виде таблицы:
$f(\Delta, 0) = x_1 \downarrow 0 = \overline{x_1 \vee 0} = \bar{x}_1 = \bar{\Delta} = \Delta$;
$f(\Delta, 1) = x_1 \downarrow 1 = \overline{x_1 \vee 1} = \bar{1} = 0$;
т.к. стрелка Пирса коммутативная операция, то
$f(0, \Delta) = f(\Delta, 0) = \Delta$ и $f(1. \Delta) = f(\Delta, 1) = 0$;
$f(\Delta, \Delta) = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{\Delta \vee \Delta} = \bar{\Delta} = \Delta$.

x_1	x_2	$f_\Delta(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0
Δ	0	Δ
Δ	1	0
0	Δ	Δ
1	Δ	0
Δ	Δ	Δ

В данной таблице записана дельта-булева функция, которая является дельта-расширением булевой функции $f(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$.

Определение 8. Дельта-булева функция f называется *нормальной дельта-булевой функцией*, если она является дельта-расширением некоторой булевой функции.

Множество нормальных дельта-булевых функций от n переменных будем обозначать $P_\Delta^N(n)$.

Лемма 1. *Для нормальных дельта-булевых функций абсолютная степень существенности переменной x_i функции $f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ равна количеству пар определенных наборов значений аргументов f, которые отличаются значением переменной x_i, деленному на 2^{n-1}, и при этом значения функции $f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ на этих двух наборах различны.*

Доказательство. Нормальная дельта-булева функция $f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \Delta, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n) = \Delta$ тогда и только тогда, когда $f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n)$, иначе в качестве значения берется $f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n) = \delta$, где $\delta \in \{0, 1\}$

2. Свойства дельта-булевых функций

Свойство 4. *Число различных функций в $P_\Delta(n)$ равно 3^{3^n}.*

Свойство 5. *Степень неопределенности $f \in P_\Delta(n)$ удовлетворяет неравенству $0 \leq DegUnc(f) \leq 1$.*

Свойство 6. *Абсолютная степень существенности удовлетворяет условию $0 \leq ACC(f) \leq 1$, причем, $ACC(x, f)$ равна нулю тогда и только тогда, когда переменная x фиктивная.*

Свойство 7. *Мощность $P_\Delta^N(n)$ равна 2^{2^n}.*

Доказательство. Так как для каждой булевой функции существует единственное дельта-расширение, а число булевых функций равно 2^{2^n}, то и число нормальных дельта-булевых функций равно 2^{2^n}.

Свойство 8. *Степень неопределенности нормальной дельта-булевой функции от n переменных прямо пропорциональна $\sum_{i=1}^{n} ACC(x_i, f(\tilde{x}))$ и при $f(\tilde{x}) \neq const$ удовлетворяет неравенству $\frac{2^n-1}{3^n} \leq DegUnc(f(\tilde{x})) \leq \frac{3^n-2^n}{3^n}$.*

Свойство 9. *Степень неопределенности равна нулю или единице тогда и только тогда, когда $f(\tilde{x}) = const$.*

Свойства 1-4 очевидны. Для доказательства свойства 5 предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Если нормальная дельта-булева функция $f(x_1, \cdots, x_n)$ заданная формулой $\Phi(x_1, \cdots, x_n)$ на некоторой интерпретации $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, равна $\gamma, \gamma \in E_\Delta$, то для $\forall j$ $f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, \Delta, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n)$ будет равна либо γ, либо Δ.*

Доказательство. Так как функция $f(x_1, \cdots, x_n)$ является нормальной дельта-булевой функцией, то она представима в виде формулы, состоящей только из штриха Шеффера. Следовательно, для доказательства леммы достаточно проверить ее выполнение только для функции штрих Шеффера, что видно из нижеследующей таблицы:

$\mid$	0	1	Δ
0	1	1	1
1	1	0	Δ
Δ	1	Δ	Δ

Доказательство (свойства 5). Степень неопределенности нормальной дельта-булевой функции тем выше, чем больше наборов, на которых значение функции не определено. Следовательно, чем выше $\sum_{i=1}^{n} ACC(x_i, f(\tilde{x}))$, тем больше число наборов вида $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \Delta, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n)$, откуда с учетом Леммы 2 следует первая часть свойства. Вторая часть - двойное неравенство - очевидна.

Список литературы

[1] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука. 1982.