Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика"N 1 (2002) 167 – 171

УДК 517.4-517.5

Н.Е.Товмасян

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Ключевые слова: уравнение, решение, функция, производная, интеграл.

Здесь указываются эффективные методы решения задачи Римана-Гильберта для одного класса неправильно эллиптических уравнений.

1. Пусть D- $(m+1)$- связная область в комплексной плоскости с границей $\Gamma=\bigcup_{j=0}^{m}\Gamma_j$, где $\Gamma_0,...,\Gamma_m$- простые, замкнутые , непересекающиеся , достаточно гладкие контуры, причем Γ_0 охватывает остальные контуры $\Gamma_1,...,\Gamma_m$. Пусть $\bar{D}=D\bigcup\Gamma$. Рассмотрим эллиптическое уравнение

$$\sum_{k=0}^{n}A_k\frac{\partial^n u}{\partial y^k\partial x^{n-k}}=0,(x,y)\in D, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\mathrm{Re}\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial N^k}=f_k(x,y),(x,y)\in\Gamma,k=0,...,n-1, \tag{2}$$

где $A_k(k=0,...,n)$ - комплексные постоянные $(A_n\neq 0)$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial N}$ - производная $u(x,y)$ по направлению внутренней нормали к Γ в точке $(x,y)\in\Gamma$, $f_k(x,y)(k=0,...,n-1)$ - заданные на Γ достаточно гладкие действительные функции.

Задача (1)-(2) при $f_k=0(k=0,...,n-1)$ называется однородной. Решение задачи (1)-(2) ищется в классе $C^n(D)\bigcup C^{n-1,\alpha}(\bar{D})$.

Предполагается, что корни $\lambda_1,...,\lambda_n$ характеристического уравнения

$$A_0+A_1\lambda+...+A_n\lambda^n=0 \tag{3}$$

удовлетворяют условию

$$\mathrm{Im}\lambda_j>0,j=1,...,n. \tag{4}$$

Условие (4) означает, что уравнение (1) неправильно эллиптическое.

Задача (1)-(2) в односвязных областях исследована в [1], а в многосвязных областях - в [2] В этих работах задача (1)-(2) сведена к сингулярному интегральному уравнению нормального типа и получена формула индекса κ этой задачи $(\kappa=(1-m)n^2)$.

В данной работе указывается другой подход к решению задачи (1)-(2), который позволяет уточнить и улучшить результаты работ [1]-[2]. Здесь однородная задача (1)-(2) сводится к системе алгебраических уравнений , а условия разрешимости и частное решение соответ-ствующей неоднородной задачи выписываются при помощи решения некоторого однозначно разрешимого интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Пусть k_0 - число линейно независимых решений однородной задачи (1)-(2), а k_0' - число линейно независимых условий разрешимости соответствующей неоднородной задачи. Здесь и далее линейная независимость понимается над полем действительных чисел. Числа k_0 и k_0' называются дефектными числами задачи (1)-(2), а $\kappa=k_0-k_0'$ - индексом этой задачи. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Дефектные числа задачи (1)-(2) определяются формулами

$$k_0 = n^2, k_0' = mn^2. \tag{5}$$

Теорема 2. Общее решение однородной задачи (1)-(2) определяется формулой

$$u(x,y) = iu_0(x,y), \tag{6}$$

где $u_0(x,y)$ - произвольное действительное решение уравнения (1) в классе полиномов не выше $2n-2$, i - мнимая единица.

Теоремы 1 и 2 при $n=2$ доказаны в [3]. В общем случае эти теоремы доказываются аналогично, поэтому их доказательства опускаем.

2. Исходя из теоремы 2 построим полную систему линейно независимых решений однородной задачи (1)-(2) в явном виде. Согласно формуле (6) решение однородной задачи (1)-(2) можно искать в виде

$$u(x,y) = iP_{n-1}(x,y) + i\sum_{l=n}^{2n-2}\sum_{j=0}^{l} a_{lj}x^j y^{l-j}, \tag{7}$$

где $P_{n-1}(x,y)$ - произвольный полином порядка не выше $n-1$ с действительными коэффициентами относительно действительных переменных x и y , а a_{lj} - действительные постоянные.

Подставляя $u(x,y)$ из (7) в уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях $x^p y^q (p+q \leq n-2)$ получим

$$\sum_{j=0}^{l} A_{lmj}a_{lj} = 0, m = 1, ..., l-n+1; l = n, ..., 2n-2, \tag{8}$$

где A_{lmj} - некоторые вполне определенные комплексные постоянные, зависящие только от коэффициентов уравнения (1).

Систему уравнений (8) еще можно записать в виде

$$\sum_{j=0}^{l} B_{lmj}a_{lj} = 0, m = 1, ..., 2(l-n+1); l = n, ..., 2n-2, \tag{9}$$

где

$$B_{lmj} = \mathrm{Re}A_{lmj}, m = 1, ..., l-n+1,$$
$$B_{lmj} = \mathrm{Im}A_{lmj}, m = l-n+2, ..., 2(l-n+1).$$

Подставляя общее решение системы (9) при $l = n, ..., 2n-2$ в (7), получим общее решение однородной задачи (1)-(2). Из (7) и (9) следует, что число k_0 линейно независимых решений однородной задачи (1)-(2) определяется формулой

$$k_0 = \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{l=n}^{2n-2}(l+1-r_l), \tag{10}$$

где r_l - ранг основной матрицы системы (9) при фиксированном l . Ясно, что

$$0 \leq r_l \leq 2(l-n+1). \tag{11}$$

С другой стороны, $k_0 = n^2$. Из (11) следует, что имеет место равенство (10) при $k_0 = n^2$ тогда и только тогда, когда $r_l = 2(l-n+1), l = n, ..., 2n-2$. Это означает, что все уравнения в (9) при фиксированном l, $(l = n, ..., 2n-2)$, линейно независимы. Это обстоятельство существенно облегчает решение системы (9). Следовательно, решение однородной задачи (1)-(2) сводится к решению алгебраической системы (9) при

$l = n, ..., 2n-2$. Так как однородная задаяа уже решена, то для полного решения задачи (1)-(2) достаточно найти условия разрешимости этой задачи и некоторое ее частное решение. Мы покажем, что эти вопросы сводятся к решению некоторого однозначно разрешимого интегрального уравнения Фредгольма. Здесь мы ограничимся случаем, когда корни характеристического уравнения (3) - простые.

3. Предварительно рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$LL^*v(x,y) = 0, (x,y) \in D, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^k v(x,y)}{\partial N^k} = f_k(x,y), (x,y) \in \Gamma, \tag{13}$$

где

$$L \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k \frac{\partial^n}{\partial y^k \partial x^{n-k}}, L^* \equiv \sum_{k=0}^{n} \bar{A}_k \frac{\partial^n}{\partial y^k \partial x^{n-k}},$$

$v(x,y)$ - действительное решение, $f_0(x,y),..., f_{n-1}(x,y)$ - правая часть (2), $\bar{A}_k$ - комп- лексно сопряженное с A_k.

Уравнение (12) является правильно эллиптическим уравнением с действительными коэф-

фициентами. Поэтому задача (12)-(13) однозначно разрешима [4]. Пусть γ_j - некоторая линия внутри области D (без самопересечения) с концами на Γ_0 и $\Gamma_j (j = 1, ..., n)$. Предполагается, что линии $\gamma_1, ..., \gamma_m$ не имеют общих точек. Пусть D_0 - область D без линий $\gamma_1, ..., \gamma_m$. Область D_0 - односвязная. Пусть, далее, $(x_1, y_1), ..., (x_m, y_m)$ - фиксированные точки внутри контуров $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$ соответственно.

Обозначим через $D_{\lambda_j} (j = 1, ..., n)$ образ области D при отображении $\zeta = x + \lambda_j y$. Имеет место следующая

Теорема 3. Если корни $\lambda_1, ..., \lambda_n$ характеристического уравнения (3) простые, то решение задачи (12)-(13) определяется формулой $v(x,y) = \mathrm{Re}\, u_1(x,y)$, где

$$u_1(x,y) := \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x + \lambda_j y) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=0}^{2n-2} \sum_{j=1}^{n} c_{lkj} (x - x_l + \lambda_j (y - y_l))^k \ln(x - x_l + \lambda_j (y - y_l)), \tag{14}$$

где $(x, y) \subset D$, $\varphi_j(z)$ - некоторые аналитические функции соответственно в $D_{\lambda_j}, (j = 1, ..., n)$, а c_{lkj} - некоторые комплексные постоянные, причем функции $\varphi_j(x + \lambda_j y)$, $(j = 1, ..., n)$ и постоянные c_{lkj} выражаются через решения некоторого однозначно разрешимого уравнения Фредгольма. В формуле (14) $\ln(x - x_l + \lambda_j (y - y_l))$ обозначается некоторая непрерывная ветвь этой функции в области D_0.

Теорема 3 при $n = 2$ доказана в [3]. При $n \geq 2$ она доказывается аналогично, поэтому ее доказательство также опускаем.

4. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 4. Для того, чтобы задача (1)-(2) имела решение, необходимо и достаточно выполне-ние условий

$$\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} c_{lkj} \lambda_j^p = 0, p = 0, ..., k; k = 0, ..., n-2; l = 1, ..., m, \tag{15}$$

$$\mathrm{Im} \sum_{j=1}^{n} c_{lkj} \lambda_j^p = 0, p = k+1, ..., 2n-1; k = n-1, ..., 2n-2; l = 1, ..., m. \tag{16}$$

Теорема 5. Если выполнены условия (15) и (16), то частное решение задачи (1)-(2) определяется формулой

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x+\lambda_j y) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n} c_{lkj}(x - x_l + \lambda_j(y - y_l))^k \ln(x - x_l + \lambda_j(y - y_l)), \tag{17}$$

где $\varphi_j(x+\lambda_j y)(j = 1, ..., n)$ и $c_{lkj}(k = 0, ..., 2n-2; j = 1, ..., n; l = 1, ..., m)$ те же величины, что и в (14).

Доказательство теорем 4 и 5. Пусть задача (1)-(2) имеет решение $u_0(x,y)$.
Тогда $Lu_0(x,y) = 0, L^*\overline{u_0(x,y)} = 0$ и $\mathrm{Re}u_0(x,y)$ удовлетворяет условиям (13). Поэтому $\mathrm{Re}u_0(x,y)$ является решением задачи (12)-(13). Из единственности решения задачи (12)-(13) и теоремы 3 следует, что

$$\mathrm{Re}u_1(x,y) = \mathrm{Re}u_0(x,y), (x,y) \in D, \tag{18}$$

где $u_1(x,y)$ - функция определенная в (14). Из (18) имеем

$$\mathrm{Re}(u_1(x,y) - u_0(x,y)) = 0, (x,y) \in D.$$

Функция $u_1(x,y) - u_0(x,y)$ является чисто мнимым решением уравнения (1) в области D_0. Выше мы показали, что такое решение является полиномом порядка не выше $2n-2$ от x и y. Следовательно,

$$u_1(x,y) = u_0(x,y) + P_{2n-2}(x,y), \tag{19}$$

где $P_{2n-2}(x,y)$ - некоторый полином порядка не выше $2n-2$. Так как $u_0(x,y)$ бесконечно дифференцируема в области D , то из (19) следует, что функция $u_1(x,y)$ также бесконечно дифференцируема в области D. Из вида функции $u_1(x,y)$ следует, что она бесконечно дифференцируема в области D тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{n} c_{lkj}\lambda_j^q = 0; q = 0, ..., k; k = 0, ..., 2n-2; l = 1, ..., m. \tag{20}$$

Из (20) при $k = 0, ..., n-2$ получаем условия (15). Из (20) при $k = n-1, ..., 2n-2$ следует

$$c_{lkj} = 0, j = 1, ..., n; l = 1, ..., m; k = n-1, ..., 2n-2. \tag{21}$$

Из (21) имеем условия (16). Таким образом, условия (15)-(16) необходимы для разрешимости задачи (1)-(2).

Пусть имеют место условия (15)-(16). Так как функция $v(x,y) = Reu_1(x,y)$ является решением задачи (12)-(13), то она бесконечно дифференцируема в области D. С другой стороны эта функция бесконечно дифференцируема в области D тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{n} c_{lkj}\lambda_j^q = 0, q = 0, ..., k; k = 0, ..., 2n-2; l = 1, ..., m. \tag{22}$$

Из (15) и (22) при $k = 0, ..., n-2$ имеем

$$\sum_{j=1}^{n} c_{lkj}\lambda_j^q = 0, q = 0, ..., k; k = 0, ..., n-2; l = 1, ..., m. \tag{23}$$

Из (16) и (22) при $k = n-1, ..., 2n-2$ получим равенства (21). Следовательно

$$v(x,y) = \mathrm{Re}u(x,y), \tag{24}$$

где $u(x,y)$ определяется формулой (17). Из условия (23) следует, что $u(x,y)$ - бесконечно дифференцируемое решение уравнения (1) в области D. Так как $v(x,y)$ удовлетворяет граничному условию (13) и $v(x,y) = \mathrm{Re}u(x,y)$, то $u(x,y)$ удовлетворяет граничному условию (2).

Таким образом, условия (15) и (16) необходимы и достаточны для разрешимости задачи (1)-(2) и ее частное решение определяется формулой (17). Теоремы 4 и 5 доказаны.

Замечание 1. Так как число условий (15)-(16) равно mn^2 и k'_0 также равно mn^2 , то условия (15)-(16) линейно независимы.

В случае, когда D круг или внутренность эллипса, то указывается более эффективный метод решения задачи (1)-(2).

Литература

[1]. N.E.Tovmasyan, Non-regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields. "World Scientific", Singapore, 1998,p.235.

[2]. П.А.Солдатов, Методы теории функций в краевых задачах на плоскости, Известия АН СССР, Серия математика, т.55, Ё5, 1991, p.p. 1070-1100.

[3]. N.E.Tovmasyan and V.S.Zakarian, Dirichlet and Riemann-Hilbert Problems for Elliptic Equations in Multiply Connected domains, Izvestia Nationalnoi Akademii Nauk Armenii. Matematika, Vol.35, Ё6, 2000. p.p.1-17.

[4]. Krzysztof Maurin. Metody Przestrzeni Hilberta, Panstwowl Wydawnictwo naukowe, Warsawa 1959, p.570.

Поступила в редакцию 25.12.2001