Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского
Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика"N 1 (2002) 58 – 62
УДК 517.98

П. А. Старков

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧАМ СОПРЯЖЕНИЯ

Keywords: Операторный пучок, уравнение Гельмгольца

В работе на примере первой спектральной задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца показано приведение задачи к исследованию линейного операторного пучка.

1. Постановка первой задачи сопряжения.

Пусть Ω_1 и Ω_2 – ограниченные области в действительном m-мерном пространстве:

$$\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m, \quad \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m,$$

такие что $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \partial\Omega_1$, Ω_1 односвязна, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m \backslash \overline{\Omega}_1$ и для любой точки $w \in \partial\Omega_1$ существует окрестность содержащая только точки из Ω_1 и Ω_2. Здесь и далее $\partial\Omega_1$ – граница области Ω_1, $\partial\Omega_2$ – граница области Ω_2. Полагаем, что $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ достаточно гладкие. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнений Гельмгольца:

$$u_1 - \Delta u_1 + \lambda u_1 = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \quad u_2 - \Delta u_2 + \lambda u_2 = 0 \ (\text{в } \Omega_2), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} = \mu u_1 \ (\text{на } \Gamma), \quad u_2 = u_1 \ (\text{на } \Gamma), \quad u_2 = 0 \ (\text{на } S). \tag{2}$$

Здесь $\vec{n}$ – единичная внешняя нормаль к Ω_1, $\lambda \in \mathbb{C}$ – фиксированное число, $\mu \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, функция u_1 определена в Ω_1, функция u_2 определена в Ω_2, $\Gamma = \partial\Omega_1$, $S = \partial\Omega_2 \backslash \Gamma$. Мы будем называть задачу (1)–(2) первой задачей сопряжения [1], [4].

2. Приведение задачи к линейному операторному пучку и исследование свойств операторных коэффициентов.

Приведем задачу (1)–(2) к исследованию линейного операторного пучка согласно подходу, изложенному в [5].

Введём исходный объект – пару

$$u := (u_1(x),\, x \in \Omega_1; u_2(x),\, x \in \Omega_2)$$

и гильбертово пространство $H = H_1 \oplus H_2$, где $H_1 = L_2(\Omega_1)$, $H_2 = L_2(\Omega_2)$, со скалярным произведением

$$(u, \varphi) := \sum_{k=1}^{2} \int_{\Omega_k} u_k(x) \overline{\varphi_k(x)}\, dx. \tag{3}$$

Ищем решение задачи (1)–(2) в виде

$$u = v + w,$$

где $v = (v_1; v_2) \in H$ – решение первой вспомогательной задачи (см. ниже), а $w = (w_1; w_2) \in H$ – решение второй вспомогательной задачи.

Первую вспомогательную задачу получаем из (1)–(2) при $\mu = 0$:

$$(v_1 - \Delta v_1; v_2 - \Delta v_2) = f = (f_1; f_2) := (-\lambda u_1; -\lambda u_2), \qquad \frac{\partial v_1}{\partial n} - \frac{\partial v_2}{\partial n} = 0 \ (\text{на } \Gamma), \tag{4}$$

$$v_2 = v_1 \ (\text{на } \Gamma), \quad v_2 = 0 \ (\text{на } S).$$

Для этой задачи определим вспомогательный оператор A_3 следующим образом:

$$\begin{aligned} A_3 v &:= (v_1 - \Delta v_1; v_2 - \Delta v_2) \\ \mathcal{D}(A_3) &:= \Big\{v \in H : \Delta v_1 \in H_1, \ \Delta v_2 \in H_2, \ \frac{\partial v_1}{\partial n} - \frac{\partial v_2}{\partial n} = 0 \ (\text{на } \Gamma), \\ &\qquad v_2 = v_1 \ (\text{на } \Gamma), \quad v_2 = 0 \ (\text{на } S)\Big\}. \end{aligned}$$

Определение обобщённого решения задачи (4) основано на формуле Грина и понятии энергетического пространства оператора A_3.

Имеем следующую формулу Грина (с учётом условия слипания на Γ):

$$\sum_{k=1}^{2} \int_{\Omega_k} (v_k - \Delta v_k)\overline{\varphi_k}\, d\Omega_k = \sum_{k=1}^{2} \int_{\Omega_k} [v_k\overline{\varphi_k} + \nabla v_k \cdot \overline{\nabla\varphi_k}] d\Omega_k - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial v_1}{\partial n} - \frac{\partial v_2}{\partial n}\right) \overline{\gamma\varphi}\, dS \tag{5}$$

Для обобщенного решения первой вспомогательной задачи получаем тождество:

$$\sum_{k=1}^{2} \int_{\Omega_k} f_k \overline{\varphi_k}\, d\Omega_k = \sum_{k=1}^{2} \int_{\Omega_k} [v_k\overline{\varphi_k} + \nabla v_k \cdot \overline{\nabla\varphi_k}] d\Omega_k.$$

Введём операторы A_1, A_2, γ_1 и γ_2

$$A_1 v := v - \Delta v, \quad \mathcal{D}(A_1) := \{v \in H_1 : \Delta v \in H_1, \ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \ (\text{на } \Gamma)\},$$

$$A_2 v := v - \Delta v, \quad \mathcal{D}(A_2) := \{v \in H_2 : \Delta v \in H_2, \ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \ (\text{на } \Gamma), \quad v = 0 \ (\text{на } S)\},$$

γ_i, $(i = 1, 2)$ – операторы следа на Γ функций, заданных в Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Определение 1. Обобщённым решением первой вспомогательной задачи называется такой элемент $v \in \mathcal{H}_{A_3}$, для которого при любом $\varphi \in \mathcal{H}_{A_3}$ выполнено тождество

$$(v, \varphi)_{A_3} = (f, \varphi) \tag{6}$$

Лемма 1. *Имеет место ортогональное разложение*

$$\mathcal{H}_{A_3} = H^0_{A_1} \oplus H^0_{A_2} \oplus U_3, \tag{7}$$

где

$$H^0_{A_1} := \{(u_1; 0) \in \mathcal{H}_{A_3} : \gamma_1 u_1 = 0\}, \quad H^0_{A_2} := \{(0; u_2) \in \mathcal{H}_{A_3} : \gamma_2 u_2 = 0\},$$

$$U_3 := \{(w_1; w_2) \in \mathcal{H}_{A_3} : w_i - \Delta w_i = 0 \ (\Omega_i), \ i = 1, 2; \gamma_1 w_1 = \gamma_2 w_2\}.$$

Лемма 2. *Оператор A_3, заданный на $\mathcal{D}(A_3) \subset H$, является положительно определённым самосопряжённым оператором с дискретным спектром, его собственные значения имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_n(A_3) = \left(\frac{\sum_{k=1}^{2} \operatorname{mes}\Omega_k}{6\pi^2}\right)^{-2/3} n^{2/3}(1 + o(1)) \quad (k \to \infty, \quad \Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^3). \tag{8}$$

При этом $\mathcal{H}_{A_3}$ – энергетическое пространство оператора A_3, где скалярное произведение имеет вид

$$(v,\varphi)_{A_3} := \sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}[v_k\overline{\varphi_k} + \nabla v_k \cdot \overline{\nabla\varphi_k}]d\Omega_k,$$

причём

$$\mathcal{H}_{A_3} = \{u \in H : ||u||^2_{A_3} = \sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}[|u_k|^2 + |\nabla u_k|^2]d\Omega_k < \infty,\ \gamma u_1 = \gamma u_2\}.$$

Оператор A_3^{-1} является положительным и компактным.

Доказательство проводится по обычной схеме [2]. Требуется лишь обоснование асимптотической формулы (8). Это устанавливается следующим образом.

Воспользуемся оператором A_4 из второй задачи сопряжения (исследование которой в данной статье не приводится) :

$$A_4 v := (v_1 - \Delta v_1; v_2 - \Delta v_2)$$

$$\mathcal{D}(A_4) = \{v \in H : \Delta v_i \in H_i,\ \frac{\partial v_i}{\partial n} = 0\ (\Gamma),\ i = 1,2;\ v_2 = 0\ (S)\}.$$

Соответствующее $\mathcal{H}_{A_4}$ шире, чем $\mathcal{H}_{A_3}$.

$$\mathcal{H}_{A_4} = H^0_{A_1} \oplus H^0_{A_2} \oplus U_4, \qquad \mathcal{H}_{A_3} = H^0_{A_1} \oplus H^0_{A_2} \oplus U_3.$$

$$U_4 = \{v \in \mathcal{H}_{A_4} : v_i - \Delta v_i = 0\ (\Omega_i)\ i = 1,2;\ \frac{\partial v_1}{\partial n} = \frac{\partial v_2}{\partial n}\ (\Gamma)\}.$$

Отсюда имеем

$$H^0_{A_1} \oplus H^0_{A_2} \subset \mathcal{H}_{A_3} \subset \mathcal{H}_{A_4} = \mathcal{H}_{A_1} \oplus \mathcal{H}_{A_2}.$$

Однако при использовании максиминимального принципа можно установить, что крайние энергетические пространства порождают одну и ту же асимптотику собственных значений, причём соответствующая константа в асимтотической формуле входит аддитивно. Отсюда и следует формула (8) (Основная идея состоит в том, что вариационные отношения для $H^0_{A_i}$ и $\mathcal{H}_{A_i}$, $i = 1,2$, т. е. для задач Дирихле и Неймана, порождают одну и ту же асимптотику собственных значений). □

Вторую вспомогательную задачу получаем из (1)–(2) при $\lambda = 0$, $\psi := \mu\gamma_1 u_1$:

$$(w_1 - \Delta w_1; w_2 - \Delta w_2) = (0;0), \qquad \frac{\partial w_1}{\partial n} - \frac{\partial w_2}{\partial n} = \psi\ (\text{на } \Gamma), \tag{9}$$

$$w_2 = w_1 = 0\ (\text{на } \Gamma), \quad w_2 = 0\ (\text{на } S).$$

Введем скалярное произведение $(\psi,\eta) := \int_\Gamma \psi\overline{\eta}\,d\Gamma$ в пространстве $L_2(\Gamma)$, а также, на его основе, линейный функционал $\langle\psi,\eta\rangle_0\ \forall\psi \in H^{-1/2}(\Gamma),\ \eta \in H^{1/2}(\Gamma)$ [3].

Определение 2. Обобщённым решением второй вспомогательной задачи называется такой элемент $w \in \mathcal{H}_{A_3}$, для которого при любом $\varphi \in \mathcal{H}_{A_3}$ выполнено тождество

$$(w,\varphi)_{A_3} = \langle\psi, \gamma_1\varphi_1\rangle_0. \tag{10}$$

Лемма 3. *Задача* (9) *при любом $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ имеет единственное обобщённое решение $w = T_3\psi \in \mathcal{H}_{A_3}$.*

Опираясь на тождества (6) и (10), для задачи (1)–(2) получим

$$(I_3 + \lambda B_{31} - \mu B_{32})u = 0, \qquad u \in \mathcal{H}_{A_3}, \tag{11}$$

где I_3 – единичный оператор в $\mathcal{H}_{A_3}$, а B_{31} и B_{32} заданы своими билинейными формами согласно формулам:

$$(B_{31}u, \varphi)_{A_3} = (u, \varphi) = \sum_{k=1}^{2} \int_{\Omega_k} u_k \overline{\varphi_k}\, d\Omega_k, \tag{12}$$

$$(B_{32}u, \varphi)_{A_3} = (\gamma_1 u_1, \gamma_1 \varphi_1)_0 = \int_{\Gamma} \gamma_1 u_1 \overline{\gamma_1 \varphi_1}\, d\Gamma. \tag{13}$$

Введём оператор γ_3 по закону

$$\gamma_3 u := \gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2, \qquad \forall u \in \mathcal{H}_{A_3}. \tag{14}$$

Лемма 4. *Операторы*

$$\gamma_3 : \mathcal{H}_{A_3} \to H^{1/2}(\Gamma), \qquad T_3 : H^{-1/2}(\Gamma) \to \mathcal{H}_{A_3}$$

взаимно сопряжены и ограничены как операторы, действующие из одного пространства в другое.

Лемма 5. *Операторы*

$$Q_3 := \gamma_3 A_3^{-1/2} : H \to L_2(\Gamma). \quad Q_3^* := A_3^{1/2} T_3 : L_2(\Gamma) \to H, \tag{15}$$

являются компактными операторами, которые взаимно сопряжены.

Лемма 6. *Оператор B_{31} имеет представление*

$$B_{31} = A_3^{-1/2} A_3^{-1} A_3^{1/2}, \qquad \mathcal{D}(B_{31}) = \mathcal{H}_{A_3}, \tag{16}$$

это положительный компактный оператор, действующий в $\mathcal{H}_{A_3}$. Его собственные значения $\lambda_n(B_{31})$ равны $\lambda_n(A_3^{-1})$, положительны, имеют пердельную точку нуль и асимптотическое поведение, следующее из формулы (8).

Лемма 7. *Оператор $\gamma_3 : \mathcal{H}_{A_3} \to L_2(\Gamma)$ имеет следующее ядро*

$$\ker \gamma_3 = H_{A_1}^0 \oplus H_{A_2}^0,$$

его сужение

$$\widetilde{\gamma}_3 := \gamma_3\Big|_{U_3} : U_3 \to H^{1/2}(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$$

имеет ограниченный обратный оператор

$$(\widetilde{\gamma}_3)^{-1} : H^{1/2}(\Gamma) \to U_3.$$

Лемма 8. *Разложение (7) порождает ортогональное разложение*

$$H = H_3^0 \oplus V_3,$$

$$H_3^0 := A_3^{1/2}(H_{A_1}^0 \oplus H_{A_2}^0), \qquad V_3 := A_3^{1/2} U_3,$$

$$H_3^0 = \{\eta \in H : \gamma_1(A_3^{-1/2}\eta)_1 = \gamma_2(A_3^{-1/2}\eta)_2 = 0\},$$

$$V_3 = \{\zeta \in H : w = A^{-1/2}\zeta,\ w_k - \Delta w_k = 0\ (\Omega_k),\ k = 1, 2;$$

$$w_2 = 0\ (S),\ \gamma_1(A_3^{-1/2}\zeta)_1 = \gamma_2(A_3^{-1/2}\zeta)_2\}$$

Лемма 9. *Для оператора $Q_3 := \gamma_3 A_3^{-1/2} : H \to L_2(\Gamma)$, справедливы соотношения*

$$\ker Q_3 = H_3^0, \qquad Q_3^* : L_2(\Gamma) \to V_3 \subset H.$$

Лемма 10. *Оператор B_{32} имеет представление*

$$B_{32} = A_3^{-1/2} Q_3^* Q_3 A_3^{1/2}, \qquad \mathcal{D}(B_{32}) = \mathcal{H}_{A_3}. \tag{17}$$

Этот оператор является неотрицательным компактным оператором с ядром

$$\ker B_{32} = H^0_{A_1} \oplus H^0_{A_2}.$$

Его сужение на подпространство U_3 является компактным положительным оператором, а собственные значения этого сужения имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_n(B_{32}) = \lambda_n(Q_3^* Q_3) = \left(\frac{\mathrm{mes}\Gamma}{16\pi}\right)^{1/2} n^{-1/2}(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).$$

Теорема 1. *Спектральная задача* (1)–(2) *равносильна задаче* (11) *в пространстве $\mathcal{H}_{A_3}$, а эта задача в свою очередь равносильна задаче*

$$L_3(\mu)\eta := (I_3 + \lambda A_3^{-1} - \mu B_3)\eta = 0 \quad \eta \in H,$$

где I_3 – единичный оператор в H, а

$$B_3 := Q_3^* Q_3, \quad 0 \leq B_3 \in \S(H), \quad \ker B_3 = H^0_{A_1} \oplus H^0_{A_2}.$$

При этом собственные и присоединенные элементы этих задач связаны соотношением

$$A_3^{1/2} u = \eta,$$

а спектры, в частности, собственные значения, совпадают.

Автор выражает благодарность Н. Д. Копачевскому за руководство работой.

Список литературы

[1] Агранович М. С., Менникен Р. *Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности.* // Математич. сборник. 1999, Т.190, N1, с. 29-68.

[2] Каразеева Н. А., Соломяк М. З. *Асимптотика спектра задач типа Стеклова в составных областях.* // Проблемы мат. анализа. Вып. 8. - Ленинград: ЛГУ, 1981.-с. 36-48.

[3] Березанский Ю. М. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.*– К.:Наукова думка, 1965, – 800 с.

[4] Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н. *Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции.*– М.:Наука, 1977, – 416 с.

[5] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан *Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи.*– М.:Наука, 1989, – 416 с.

Поступила в редакцию 23.03.2002