Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика"N 1 (2002) 122 – 124

УДК 517.95

И. В. Садовничая

НОВАЯ ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С АНАЛИТИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ ЧАСТИЧНЫМИ СУММАМИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ

На отрезке $-a \leqslant x \leqslant a$, $a > 0$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y'' - q(x)y = \lambda^2 y, \qquad \lambda > 0, \tag{1}$$

с потенциалом q, аналитическим в некоторой окрестности отрезка $[-a, a]$.

Хорошо известно (см. [1,2]), что решения уравнения (1) $y_0(x,\lambda)$ и $y_1(x,\lambda)$, удовлетворяющие начальным условиям

$$y_0(0,\lambda) = 1, \quad y_0'(0,\lambda) = 0, \quad y_1(0,\lambda) = 0, \quad y_1'(0,\lambda) = \lambda i, \tag{2}$$

разлагаются в формальные ряды, которые являются асимптотическими при $\lambda \to +\infty$:

$$y_j(x,\lambda) \sim \frac{1}{2}\left(e^{i\lambda x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{k,j}(x)}{(-2i\lambda)^k} + (-1)^j e^{-i\lambda x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{k,j}(x)}{(2i\lambda)^k}\right), \quad j = 0, 1. \tag{3}$$

Коэффициенты рядов (3) вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$B_{0,0}(x) \equiv B_{0,1}(x) \equiv 1; \quad B_{n+1,j}(x) = B'_{n,j}(x) + (-1)^{n+j}B'_{n,j}(0) + \int_0^x q(t)B_{n,j}(t)\,dt. \tag{4}$$

Ряды (3) являются асимптотическими для функций $y_j(x,\lambda)$ в том смысле, что при любых $n \in \mathbb{N}$ справедлива равномерная по $x \in [-a, a]$ асимптотика

$$y_j(q,x,\lambda) = S_{n,j}(q,x,\lambda) + O_{q,n}(\lambda^{-n-1}), \quad (\lambda \to +\infty) \tag{5}$$

с постоянной в символе O, зависящей только от потенциала q и номера n. Через $S_{n,j}(q,x,\lambda)$ здесь обозначена n-я частичная сумма асимптотического ряда (3):

$$S_{n,j}(q,x,\lambda) = \frac{1}{2}\left(e^{i\lambda x}\sum_{k=0}^{n}\frac{B_{k,j}(x)}{(-2i\lambda)^k} + (-1)^j e^{-i\lambda x}\sum_{k=0}^{n}\frac{B_{k,j}(x)}{(2i\lambda)^k}\right). \tag{6}$$

Возникает вопрос о возможности приближенного вычисления значений $y_j(q,x,\lambda)$ при $\lambda \geqslant 1$, $x \in [-a, a]$ с помощью асимптотических рядов (3).

В работе [3] В. А. Садовничим и А. Ю. Поповым для потенциалов, аналитических в круге $|z| < R$, $R > a$ и удовлетворяющих условию $q(0) = 0$, а также для потенциалов, аналитических в некоторой ρ-окрестности отрезка $[-a, a]$, получены оценки для погрешности наилучшего приближения фундаментальной системы решений уравнения (1), удовлетворяющей начальным условиям (2), суммами (6), экспоненциально убывающие с ростом λ.

Цель настоящей работы — улучшить оценку, приведенную в статье [3] для потенциалов, аналитических в $\mathcal{O}(\rho, [-a, a])$ — ρ-окрестности отрезка $[-a, a]$, замыкание которой представляет собой объединение двух полукругов $\{|z - a| \leqslant \rho,\ \operatorname{Re} z \geqslant a\}$, $\{|z + a| \leqslant \rho,\ \operatorname{Re} z \leqslant -a\}$ и прямоугольника $\{|\operatorname{Re} z| \leqslant a,\ |\operatorname{Im} z| \leqslant \rho\}$. Существуют два аргумента в пользу необходимости рассматривать потенциалы, аналитические именно в такой окрестности, а не только потенциалы, аналитические в круге. Первое – потенциал может иметь полюса на мнимой оси, находящиеся довольно близко к нулю (например, $q(x) = \dfrac{1}{x^2+a^2}$). Второе – потенциал, аналитический в круге, может быстро расти на мнимой оси (например, $q(x) = \cos ax$, $q(x) = \exp(-bx^2)$, $b > 0$). В этом случае его норма в рассматриваемой окрестности будет существенно меньше, чем его норма в круге, что позволит улучшить оценки.

Пусть $M_0 = \max\left\{\int\limits_0^a |q(t)|\,dt,\ \int\limits_{-a}^0 |q(t)|\,dt\right\}$; через $\varphi_{n,j}(q,x,\lambda)$ обозначим невязку при приближении решения y_j суммой $S_{n,j}$: $\varphi_{n,j}(q,x,\lambda) = y_j(q,x,\lambda) - S_{n,j}(q,x,\lambda)$. Основной результат статьи заключается в следующем.

Теорема 1. *Пусть функция $q(z)$ аналитична в $\mathcal{O}(\rho,[-a,a])$ и следующая норма конечна*

$$\max_{\alpha\in[-a,a]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|q_{n,\alpha}|\rho^{n+1}}{n+1} = M_1 < +\infty, \tag{7}$$

где $q_{n,\alpha} = \dfrac{q^{(n)}(\alpha)}{n!}$. Для $\lambda > 0$ положим $N = N(\lambda) = [2\rho\lambda] - 1$. Тогда при $N > 1$ имеем

$$\sup_{\eta\geqslant\lambda} \max_{j=0,1} \max_{x\in[-a,a]} |\varphi_{N,j}(q,x,\eta)| \leqslant \frac{2e}{3}\sqrt{2\pi}aM(2\lambda\rho+2)^{3.5}\exp(M_0/\lambda + M\rho e - 2\rho\lambda), \tag{8}$$

где $M = M_1 + M_0$.

Ключом к доказательству теоремы 1 является теорема об оценках коэффициентов асимптотических рядов (3).

Задача об оценках коэффициентов асимптотических рядов по спектральному параметру для решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, по–видимому, впервые рассматривалась А. О. Кравицким и В. Б. Лидским в [4]. Для уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x,z)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x,z)\frac{dy}{dx} + p_n(x,z)y = 0,$$

где $x \in [0,1]$, а $p_\alpha(x,z)$ являются полиномами комплексного параметра z

$$p_\alpha(x,z) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} p_{\alpha,\beta}(x)z^\beta, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant n,$$

(в случае уравнения второго порядка это соответствует тому, что $q(x)$ является полиномом) ими было показано, что

$$\max_{j=0,1} \max_{|x|\in[0,1]} |B_{n,j}(x)| \leqslant C^n n^{\gamma n}, \quad 0 < \gamma < 1. \tag{9}$$

А. С. Печенцов в [5] распространил результаты работы [4] на случай потенциалов – произвольных целых функций конечного экспоненциального типа. Х. М. Мкоян в [6] получил оценки коэффициентов $B_{k,j}$ для потенциалов из классов Жеврея, которые состоят из функций $q \in C^\infty[-a,a]$, имеющих следующие мажоранты максимумов n–х производных:

$$\max_{|x|\leqslant a} |q^{(n)}(x)| \leqslant c_0 B^n (n!)^\alpha, \quad \alpha \geqslant 1.$$

Для частного случая $\alpha = 1$ функции из рассматриваемого класса аналитичны в $1/B$ окрестности отрезка $[-a,a]$ и оценка Мкояна при $\alpha = 1$ выглядит так:

$$\max_{|x|\leqslant a} |B_{n,j}(q,x)| \leqslant c_1 C^n n!, \tag{10}$$

где c_1, C – некоторые положительные постоянные.

Теорема 2. *Для коэффициентов асимптотического ряда (3) и их производных справедливы следующие оценки:*

$$\max_{j=0,1}\max_{|x|\leqslant a}|B_{n,j}(q,x)| < \frac{1}{6}M(n+2)!\rho^{1-n}\exp(M\rho e), \tag{11}$$

$$\max_{j=0,1}\max_{|x|\leqslant a}|B'_{n,j}(q,x)| < \frac{1}{6}Mn(n+2)!\rho^{-n}\exp(M\rho e). \tag{12}$$

Полученная оценка является почти неулучшаемой при растущем n на классе потенциалов с заданным ограничением на норму (7). В работе [7] для $q(x) = -\ln(1-\frac{x}{a+\rho})$ (легко проверяется, что $\max\limits_{\alpha\in[-a,a]}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{|q_{k,\alpha}|\rho^{k+1}}{k+1} = \rho(1-\ln\frac{\rho}{a+\rho}) < \infty$) была получена оценка снизу

$$B_{n,j}(q,a) > q^{(n-2)}(a) - q^{(n-2)}(0) = (n-3)!\left(\frac{1}{\rho^{n-2}} - \frac{1}{(a+\rho)^{n-2}}\right) \sim \rho^{2-n}(n-3)! \quad (n\to\infty).$$

Таким образом, зазор между оценками $\max\limits_{|x|\leqslant a}|B_{n,j}(q,x)|$ сверху и снизу на рассматриваемом классе потенциалов при $n\to\infty$ составляет величину порядка n^5, которая очень мала в сравнении с главным членом оценки, растущим как $(n+2)!\rho^{-n}$.

Теорема 2 и разобранный пример показывают, что наименьшей постоянной C в неравенствах типа (9) и (10) является $1/\rho$. Важно также то, что получена явная зависимость c_1 от потенциала q.

Доказательство приведенных результатов опубликовано в работе [8].

Список литературы

[1] Тамаркин Я. Д. "О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений" Петроград, 1917.

[2] Bigrkgoff G. D. Trans. Amer. Math. Soc. 1908, vol. 9, pp. 219–231.

[3] Садовничий В. А., Попов А. Ю. Дифференциальные уравнения, 1999, т. 35, N 4, стр. 498–506.

[4] Кравицкий А. О., Лидский В. Б. Сиб. мат. журн., 1971, т. 12, N 4, стр. 748–759.

[5] Печенцов А. С. Труды сем. им. И. Г. Петровского, 1981, вып. 7, стр. 190–198.

[6] [illegible]коян Х. М. Сборник материалов IX конференции Ленинаканского филиала ЕрПИ, часть 2, физико–математические науки, 1974, стр. 35–44.

[7] Садовничий В. А., Попов А. Ю. Дифференциальные уравнения, 1999, т. 35, N 2, стр. 280–284, N 3, стр. 403–410.

[8] Садовничая И. В. Новая оценка приближения решений уравнения Штурма–Лиувилля с аналитическим потенциалом частичными суммами асимптотических рядов. препринт.

Поступила в редакцию 21.09.2001