Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика"N 1 (2002) 48 – 57

УДК 517.98

В.С. Рыхлов[1]

КРАТНАЯ ПОЛНОТА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПРОСТЕЙШЕГО ПУЧКА 5-ГО ПОРЯДКА

Keywords: полнота, собственные функции, пучок обыкновенных дифференциальных операторов

Полностью решена задача о 5-кратной полноте собственных функций простейшего пучка обыкновенных дифференциальных операторов 5-го порядка в пространстве $L_2[0,1]$, порожденного дифференциальным выражением $y^{(5)} + \lambda^5 y$ и двухточечными двучленными граничными условиями $\alpha_i y^{(i-1)}(0) + \beta_i y^{(i-1)}(1) = 0$, $i = \overline{1,5}$.

Keywords: completeness, eigenfunctions, pencil of ordinary differential operators

The problem of 5-fold completeness is fully solved for the simpliest pencil of ordinary differential operators of the 5-th order in the space $L_2[0,1]$, generated by the differential expression $y^{(5)} + \lambda^5 y$ and the two-point two-term boundary conditions $\alpha_i y^{(i-1)}(0) + \beta_i y^{(i-1)}(1) = 0$, $i = \overline{1,5}$.

1. В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок $L(\lambda)$ обыкновенных дифференциальных операторов

$$l(y,\lambda) := y^{(5)} + \lambda^5 y, \quad U_i(y) := \alpha_i y^{(i-1)}(0) + \beta_i y^{(i-1)}(1) = 0, \quad i = \overline{1,5}, \tag{1}$$

где $|\alpha_i| + |\beta_i| > 0$, $i = \overline{1,5}$.

Определение 1. Будем называть пучок (1) *вырожденным*, если он либо имеет не более конечного числа собственных значений (с.з.), либо все $\lambda \in \mathbb{C}$ являются его с.з.

Теорема 1. *Справедлива следующая альтернатива: либо система собственных функций (с.ф.) пучка* (1) *5-кратно полна в* $L_2[0,1]$, *либо этот пучок вырожденный.*

Дальнейшее изложение посвящено доказательству этой теоремы.

2. Уравнение $l(y,\lambda) = 0$ имеет фундаментальную систему решений $y_j(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_j x)$, $j = \overline{1,5}$, где $\omega_j = \exp((2j-1)\pi i/5)$. Обозначим $U_i(y_j) =: u_{ij}(\lambda) = \left(v_{ij} + e^{\lambda\omega_j} w_{ij}\right)$, где $v_{ij} = \alpha_i \omega_j^{i-1}$, $w_{ij} = \beta_i \omega_j^{i-1}$,

$$V_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \\ v_{3j} \\ v_{4j} \\ v_{5j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2\omega_j \\ \alpha_3\omega_j^2 \\ \alpha_4\omega_j^3 \\ \alpha_5\omega_j^4 \end{pmatrix}, \quad W_j = \begin{pmatrix} w_{1j} \\ w_{2j} \\ w_{3j} \\ w_{4j} \\ w_{5j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2\omega_j \\ \beta_3\omega_j^2 \\ \beta_4\omega_j^3 \\ \beta_5\omega_j^4 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_0 = \det(V_1V_2V_3V_4V_5) =: |V_1V_2V_3V_4V_5|, \quad \Delta_1 = |W_1V_2V_3V_4V_5|,$$

$$\Delta_2 = |V_1W_2V_3V_4V_5|, \ldots, \Delta_{12} = |W_1W_2V_3V_4V_5|, \ldots, \Delta_{12345} = |W_1W_2W_3W_4W_5|.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 00-01-00075), программы "Ведущие научные школы"(проект N 00-15-96123) и программы "Университеты России"Министерства образования России (проект N 99-01-89).

Отметим на рисунке все точки 0, ω_j, $\omega_1+\omega_2$, $\omega_1+\omega_3$, $\ldots$, $\omega_1+\omega_5$, $\ldots$, $\omega_4+\omega_5$, $\ldots$, $\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5$ (для краткости через j обозначается ω_j, через $1+2$ обозначается $\omega_1+\omega_2$ и т.д.). Пусть M есть выпуклая оболочка отмеченных точек.

Характеристический определитель пучка $L(\lambda)$ есть

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{15}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ u_{51} & \ldots & u_{55}\end{vmatrix}=\lambda^{10}\left|V_1+e^{\lambda\omega_1}W_1,\ldots,V_5+e^{\lambda\omega_1}W_5\right|$$

$$=\lambda^{10}\Big\{\Big[\Delta_{12}e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}+\Delta_{23}e^{\lambda(\omega_2+\omega_3)}+\cdots+\Delta_{15}e^{\lambda(\omega_5+\omega_1)}\Big]$$

$$+\Big[\Delta_{123}e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}+\Delta_{234}e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}+\cdots+\Delta_{125}e^{\lambda(\omega_5+\omega_1+\omega_2)}\Big]$$

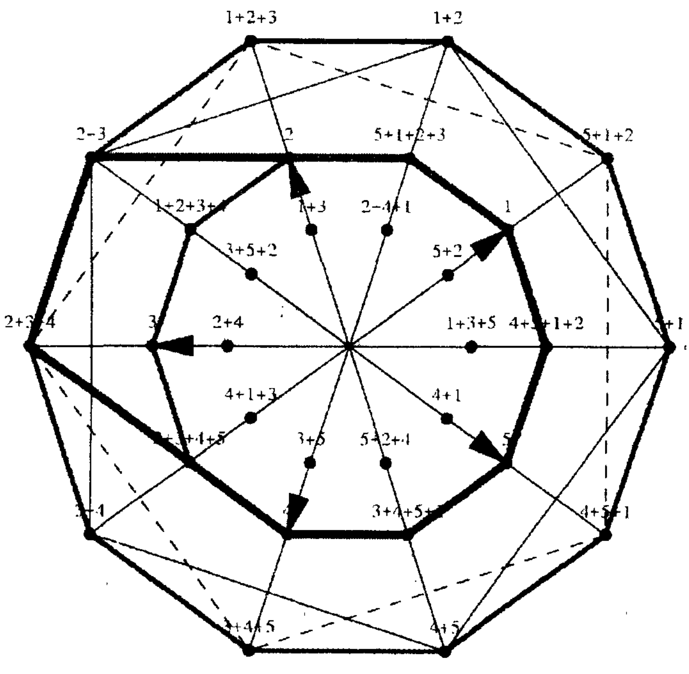
$$+\left[\Delta_1e^{\lambda\omega_1}+\Delta_2e^{\lambda\omega_2}+\cdots+\Delta_5e^{\lambda\omega_5}\right]$$

$$+\Big[\Delta_{1234}e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}+\Delta_{2345}e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)}+\cdots+\Delta_{1235}e^{\lambda(\omega_5+\omega_1+\omega_2+\omega_3)}\Big]$$

$$+\Big[\Delta_{13}e^{\lambda(\omega_1+\omega_3)}+\Delta_{24}e^{\lambda(\omega_2+\omega_4)}+\cdots+\Delta_{25}e^{\lambda(\omega_5+\omega_2)}\Big]$$

$$+\Big[\Delta_{124}e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_4)}+\Delta_{235}e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_5)}+\cdots+\Delta_{135}e^{\lambda(\omega_5+\omega_1+\omega_3)}\Big]$$

$$+\Delta_{12345}+\Delta_0\Big\}.$$



Лемма 1. *Справедливы следующие равенства*

$$
\begin{array}{lllllllll}
\Delta_{12} & = & \Delta_{23} & = & \Delta_{34} & = & \Delta_{45} & = & \Delta_{15}, \\
\Delta_{123} & = & \Delta_{234} & = & \Delta_{345} & = & \Delta_{145} & = & \Delta_{125}, \\
\Delta_{1} & = & \Delta_{2} & = & \Delta_{3} & = & \Delta_{4} & = & \Delta_{5}, \\
\Delta_{1234} & = & \Delta_{2345} & = & \Delta_{1345} & = & \Delta_{1245} & = & \Delta_{1235}, \\
\Delta_{13} & = & \Delta_{24} & = & \Delta_{35} & = & \Delta_{14} & = & \Delta_{25}, \\
\Delta_{124} & = & \Delta_{235} & = & \Delta_{134} & = & \Delta_{245} & = & \Delta_{135}.
\end{array}
$$

В силу этой леммы

$$
\begin{gathered}
\Delta(\lambda) = \lambda^{10}\Big\{\Delta_{12}\left[e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3)} + \dots + e^{\lambda(\omega_5+\omega_1)}\right] \\
+\Delta_{123}\left[e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3)} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + \dots + e^{\lambda(\omega_5+\omega_1+\omega_2)}\right] \\
+\Delta_1\left[e^{\lambda\omega_1} + \Delta_2 e^{\lambda\omega_2} + \dots + e^{\lambda\omega_5}\right] \\
+\Delta_{1234}\left[e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)} + \dots + e^{\lambda(\omega_5+\omega_1+\omega_2+\omega_3)}\right] \\
+\Delta_{13}\left[e^{\lambda(\omega_1+\omega_3)} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_4)} + \dots + e^{\lambda(\omega_5+\omega_2)}\right] \\
+\Delta_{124}\left[e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_4)} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_5)} + \dots + e^{\lambda(\omega_5+\omega_1+\omega_3)}\right] \\
+\Delta_{12345} + \Delta_0\Big\}.
\end{gathered}
$$

Отметим на рисунке точки $\omega_1+\omega_2$, $\omega_2+\omega_3, \dots, \omega_5+\omega_1$, если $\Delta_{12} \neq 0$, точки $\omega_1+\omega_2+\omega_3$, $\omega_2+\omega_3+\omega_4, \dots, \omega_5+\omega_1+\omega_2$, если $\Delta_{123} \neq 0$, и т.д. Пусть M_Δ есть выпуклая оболочка отмеченных точек. Возможны следующие случаи:

(I) $\Delta_{12} \neq 0 \wedge \Delta_{123} \neq 0$. Здесь $M_\Delta = M$ и, следовательно, пучок (1) регулярен [1]. Из результатов [1] следует, что в этом случае система с.ф. пучка 5-кратно полна в $L_2[0,1]$.

(II) $(\Delta_{12} \neq 0 \wedge \Delta_{123} = 0) \vee (\Delta_{12} = 0 \wedge \Delta_{123} \neq 0)$. Здесь $M_\Delta \subset M$ и M_Δ касается M либо в точках $1+2$, $2+3$, $\dots$, $5+1$, либо в точках $1+2+3$, $2+3+4$, $\dots$, $5+1+2$. Следовательно, пучок (1) является нормальным (по терминологии [1]). В этом случае система с.ф. пучка также 5-кратно полна в $L_2[0,1]$ (см. [1]).

(III) $\Delta_{12} = \Delta_{123} = 0$. Здесь $M_\Delta \subset M$ и M_Δ не касается границы M. Следовательно, пучок (1) не является нормальным (см. [1]). Этот случай содержит как пучки с распадающимися граничными условиями, так и пучки с нераспадающимися граничными условиями. В первом подслучае система с.ф. является 5-кратной полной в $L_2[0,1]$. Этот результат есть частный случай теоремы Келдыша, которая была сформулирована без доказательства в [2]. Во втором подслучае вопрос о полноте с.ф. пучка (1) до сих пор до конца не решен.

Замечание 7. Так как доказательство теоремы Келдыша полностью так и не было опубликовано, то было много попыток доказать различные варианты этой теоремы. Серьезное продвижение в этом направлении было сделано в 1973 Хромовым в его докторской диссертации [3]. Им было получено доказательство теоремы Келдыша в случае аналитических коэффициентов дифференциального выражения. Аналогичный результат другим методом был доказан Эберхардом [5]. В случае произвольных суммируемых коэффициентов эта теорема была доказана Шкаликовым в 1976 году [6].

Замечание 8. Хромов [7] был первым, кто рассмотрел нерегулярную задачу на собственные значения третьего порядка (то есть при $n=3$) вида

$$
y^{(3)} + \lambda y = 0, \quad \alpha_i y^{(i-1)}(0) + \beta_i y^{(i-1)}(1) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}
$$

Он доказал, что условие $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$ в случае $\beta_1=\beta_2=\beta_3=1$ является необходимым и достаточным для обращения в нуль коэффициентов при экспонентах, соответствующих точкам $\omega_1+\omega_2$, $\omega_2+\omega_3$, $\omega_3+\omega_1$, в характеристическом определителе. Хромов исследовал вопрос о разложении функций в биортогональные ряды по с.ф. задачи (2) при выполнении этого условия. Решение этого вопроса имело принципиальное значение, так как функция Грина задачи (2) в данном случае имеет экспоненциальный рост по λ как при $t\le x$, так и при $t\ge x$, в отличие от случая распадающихся граничных условий, когда функция Грина имеет экспоненциальный рост или при $t\le x$, или при $t\ge x$. Но с точки зрения вопроса о полноте системы с.ф. эта задача не представляет трудности, так как она является нормальной в указанном выше смысле. Отметим, что все возможные нерегулярные ситуации при $n=3$ или $n=4$ либо также нормальные, либо вырожденные.

Дмитриев [8] распространил результаты [7] на случай задачи n-го порядка, аналогичной задаче (2), где $n=4k+1$. В случае $\beta_i=1$, $i=\overline{1,n}$ он накладывал на коэффициенты α_i условия, которые при $n=5$ имеют вид

$$\alpha_1-\omega_j\alpha_2+\omega_j^2\alpha_3-\omega_j^3\alpha_4+\omega_j^4\alpha_5=0,\quad j=1,2,3,4.$$

Эти условия являются достаточными для того, чтобы соответствующая задача на собственные значения принадлежала случаю **(III)** (см. выше).

В этой статье дается полное описание пучков, принадлежащих случаю **(III)**.

Рассмотрим следующую матрицу

$$\Omega:=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ \omega_1&\omega_2&\cdots&\omega_5\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \omega_1^4&\omega_2^4&\cdots&\omega_5^4\end{pmatrix}=(Y_1Y_2\dots Y_5)\,,$$

а также транспонированную к ней матрицу

$$\Omega^T:=\begin{pmatrix}1&\omega_1&\cdots&\omega_1^4\\ 1&\omega_2&\cdots&\omega_2^4\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 1&\omega_5&\cdots&\omega_5^4\end{pmatrix}=(Z_1Z_2\dots Z_5)\,.$$

Очевидно, справедливо равенство $\theta:=\det\Omega=\det\Omega^T\ne0$ и, следовательно, векторы Y_1, $Y_2,\dots,Y_5$ и векторы $Z_1,Z_2,\dots,Z_5$ образуют базисы в $\mathbb{C}^n$. Обозначим $\alpha:=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_5)^T$, $\beta:=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_5)^T$ и разложим эти векторы по системе Z_1, Z_2, $\dots$, Z_5

$$\alpha=\hat\alpha_1Z_1+\hat\alpha_2Z_2+\dots+\hat\alpha_5Z_5=\Omega^T\hat\alpha,$$
$$\beta=\hat\beta_1Z_1+\hat\beta_2Z_2+\dots+\hat\beta_5Z_5=\Omega^T\hat\beta,$$

где $\hat\alpha:=(\hat\alpha_1,\hat\alpha_2,\dots,\hat\alpha_5)^T$ и $\hat\beta:=(\hat\beta_1,\hat\beta_2,\dots,\hat\beta_5)^T$. Так как $\theta\ne0$, то соответствия между α и $\hat\alpha$ и между β и $\hat\beta$ взаимно однозначны.

Обозначим для краткости $\omega:=\omega_1$.

Лемма 2. *Имеют место следующие равенства для $j=\overline{1,5}$*

$$V_j=a_1Y_j+a_2Y_{\mathrm{mod}_5(j+1)}+\dots+a_5Y_{\mathrm{mod}_5(j+4)}=\Omega\hat V_j,$$
$$W_j=b_1Y_j+b_2Y_{\mathrm{mod}_5(j+1)}+\dots+b_5Y_{\mathrm{mod}_5(j+4)}=\Omega\hat W_j,$$

где $a_k=\hat\alpha_k\omega^{k-1}$, $b_k=\hat\beta_k\omega^{k-1}$, $k=\overline{1,5}$ и

$$\hat V_j=\left(a_{\mathrm{mod}_5(2-j)},a_{\mathrm{mod}_5(3-j)},\dots,a_{\mathrm{mod}_5(6-j)}\right)^T,$$

$$\hat W_j = \left(b_{\mathrm{mod}_5(2-j)}, b_{\mathrm{mod}_5(3-j)}, \dots, b_{\mathrm{mod}_5(6-j)}\right)^T.$$

Выясним, при каких значениях параметров a_j, b_j реализуется случай **(III)**. Очевидно,

$$\Delta_{12} = |W_1W_2V_3V_4V_5| = \theta \left|\hat W_1 \hat W_2 \hat V_3 \hat V_4 \hat V_5\right| = \theta\hat\Delta_{12},$$

$$\Delta_{123} = |W_1W_2W_3V_4V_5| = \theta \left|\hat W_1 \hat W_2 \hat W_3 \hat V_4 \hat V_5\right| = \theta\hat\Delta_{123},$$

$$\Delta_{1} = |W_1V_2V_3V_4V_5| = \theta \left|\hat W_1 \hat V_2 \hat V_3 \hat V_4 \hat V_5\right| = \theta\hat\Delta_{1},$$

$$\Delta_{1234} = |W_1W_2W_3W_4V_5| = \theta \left|\hat W_1 \hat W_2 \hat W_3 \hat W_4 \hat V_5\right| = \theta\hat\Delta_{1234},$$

где

$$\hat\Delta_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & b_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ b_2 & b_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ b_3 & b_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ b_4 & b_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ b_5 & b_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \hat\Delta_{123} = \begin{vmatrix} b_1 & b_5 & b_4 & a_3 & a_2 \\ b_2 & b_1 & b_5 & a_4 & a_3 \\ b_3 & b_2 & b_1 & a_5 & a_4 \\ b_4 & b_3 & b_2 & a_1 & a_5 \\ b_5 & b_4 & b_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix},$$

$$\hat\Delta_{1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ b_2 & a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ b_3 & a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ b_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ b_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \hat\Delta_{1234} = \begin{vmatrix} b_1 & b_5 & b_4 & b_3 & a_2 \\ b_2 & b_1 & b_5 & b_4 & a_3 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_5 & a_4 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & a_5 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Далее рассмотрим для определенности случай $\beta_i \neq 0$, $i = \overline{1,5}$. Не нарушая общности, можно считать, что $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_5 = 1$. Это дает $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$, или

$$\hat W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad, \hat W_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Лемма 3. *Случай* **(III)** *имеет место тогда и только тогда, когда для вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_5)$ имеет место одно из следующих представлений при $x, t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ и $y, p, q \in \mathbb{C}$*

(1) *$a = (tx, t^2x, t^3x, y, x)$ (здесь $\Delta_{1234} \neq 0$, а $\Delta_1 = 0$ тогда и только тогда, когда $y = t^4x$ или $y = \frac{x}{t}$);*

(2) *$a = (t^2x, t^3x, y, x, tx)$ (здесь $\Delta_{1234} \neq 0$, а $\Delta_1 = 0$ тогда и только тогда, когда $y = t^4x$ или $y = \frac{x}{t}$);*

(3) *$a = (0, 0, 0, p, q)$, где $q \neq 0$ (здесь $\Delta_{1234} = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$ тогда и только тогда, когда $p \neq 0$, то есть $p = 0$ дает вырожденный случай);*

(4) *$a = (0, 0, p, q, 0)$, (здесь $\Delta_{1234} = 0$ и $\Delta_1 \neq 0$ тогда и только тогда, когда $p \neq 0$ и $q \neq 0$, то есть любое равенство $p = 0$ или $q = 0$ дает вырожденный случай);*

(5) *$a = (0, p, q, 0, 0)$, где $p \neq 0$ (здесь $\Delta_{1234} = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$ тогда и только тогда, когда $q \neq 0$, то есть $q = 0$ дает вырожденный случай).*

Далее будем считать, что для вектора a имеет место одно из представлений **(1)–(5)** Леммы **3**, дающее невырожденный случай.

Предположим, что вектор-функция $f = (\bar f_0, \bar f_1, \dots, \bar f_4) \in L_2^5[0,1]$ ортогональна системе производных цепочек пучка (1). Обозначая через $g(x,\lambda)$ порождающую функцию для системы с.ф. и предполагая, что $g(x,\lambda)$ есть целая аналитическая функция по λ первой степени, условие ортогональности можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 g(x,\lambda)\left(f_0(x)+\lambda f_1(x)+\dots+\lambda^4 f_4(x)\right)\,dx \\
&= \int_0^1 g(x,\lambda) f(x,\lambda)\,dx =: F(\lambda), \quad \lambda\in\Lambda,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где Λ есть множество нулей характеристического определителя $\Delta(\lambda)$. Известно, что множество Λ совпадает с множеством с.з. пучка (1) с возможным исключением $\lambda = 0$.

Рассмотрим следующую функцию

$$
\mathcal{F}(\lambda) := \frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad \lambda\in\mathbb{C}.
$$

Эта функция, вообще говоря, есть мероморфная функция, полюсами которой могут быть только нули $\Delta(\lambda)$. В силу предположения (4) полюса функции $\mathcal{F}(\lambda)$ являются устранимыми, то есть $\mathcal{F}(\lambda)$ на самом деле есть целая аналитическая функция.

Введем следующее условие для целой аналитической функции $F(\lambda)$ первой степени:

(A) *Существуют по крайней мере три луча в λ-плоскости, исходящие из начала координат, такие, что углы между соседними лучами меньше π и функция $\mathcal{F}(\lambda)$ имеет не более чем степенной рост на этих лучах.*

Если $F(\lambda)\in(A)$ (то есть F удовлетворяет (A)), то на основании принципа Фрагмена-Линделефа функция $\mathcal{F}(\lambda)$ имеет не более чем степенной рост во всей $\mathbb{C}$. По теореме Лиувилля отсюда следует, что $\mathcal{F}(\lambda)$ есть полином по λ, коэффициенты которого есть функционалы от $f(x)$, порожденные вполне конкретным конечным набором функций из $L_2^5[0,1]$. Предполагая, что $f(x)$ ортогональна этому конечному набору функций (это предположение не приводит к конечному дефекту системы с.ф., так как из [9] следует, что для пучка (1) справедлива следующая альтернатива: *либо система с.ф. пучка* (1) *5-кратно полна в* $L_2^5[0,1]$, *либо эта система имеет бесконечный дефект*), получим $\mathcal{F}(\lambda)\equiv 0$. Следовательно, $F(\lambda)\equiv 0$, откуда стандартными расуждениями (см., например, [6, 9]) выводим, что $f(x)=0$ п.в. на $[0,1]$, и 5-кратная полнота тем самым установлена.

Из изложенного видно, что проблема заключается в нахождении подходящей порождающей функции, то есть такой порождающей функции, что $F(\lambda)\in(A)$. Традиционно (см., например, [10]) в качестве порождающих функций берутся функции

$$
g_1(\cdot,\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(\cdot,\lambda) & \dots & y_5(\cdot,\lambda) \\ u_{21} & \dots & u_{25} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{51} & \dots & u_{55} \end{vmatrix}, \ \dots, \ g_5(\cdot,\lambda) = \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{41} & \dots & u_{45} \\ y_1(\cdot,\lambda) & \dots & y_5(\cdot,\lambda) \end{vmatrix}.
$$

Некоторые из этих функций хорошо работают в случае распадающихся краевых условий (см. [3, 6, 9]), но в случае пучка (1) для каждой из этих функций $F(\lambda)\notin(A)$.

В [11] предлагается искать подходящую порождающую функцию в виде линейной комбинации функций $g_j(x,\lambda)$, $j=\overline{1,5}$,

$$
\begin{aligned}
g(x,\lambda;\Gamma) &:= \gamma_1 g_1(x,\lambda)+\dots+\gamma_5 g_5(x,\lambda) \\
&= \lambda^{10}\begin{vmatrix} 0 & e^{\lambda\omega_1 x} & e^{\lambda\omega_2 x} & \dots & e^{\lambda\omega_5 x} \\ -\Gamma & V_1+e^{\lambda\omega_1}W_1 & V_2+e^{\lambda\omega_2}W_2 & \dots & V_5+e^{\lambda\omega_5}W_5 \end{vmatrix},
\end{aligned}
$$

где вектор $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_5)^T$ является параметром. Покажем, что этот вектор можно подобрать так, что соответствующая функция $F(\lambda) \in (A)$. Чтобы подчеркнуть зависимость этой функции от Γ, будем писать $F(\lambda; \Gamma)$.

Запишем $g(x, \lambda; \Gamma)$ подробно. Для краткости будем использовать следующие обозначения

$$X^1 := |\Gamma V_2 V_3 V_4 V_5|,\ X^1_2 := |\Gamma W_2 V_3 V_4 V_5|,\ \ldots\ , X^3_{124} := |W_1 W_2 \Gamma W_4 V_5|,\ \ldots\ ,$$

где верхний индекс обозначает позицию, на которой находится вектор Γ, а нижние индексы обозначают позиции, на которых находятся векторы W_j. Имеет место представление

$$\begin{aligned}
g(x, \lambda; \Gamma) = \lambda^{10} e^{\lambda\omega_1 x} \Big(& X^1 + e^{\lambda\omega_2} X^1_2 + e^{\lambda\omega_3} X^1_3 + e^{\lambda\omega_4} X^1_4 + e^{\lambda\omega_5} X^1_5 + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3)} X^1_{23} \\
& + e^{\lambda(\omega_2+\omega_4)} X^1_{24} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_5)} X^1_{25} + e^{\lambda(\omega_3+\omega_4)} X^1_{34} + e^{\lambda(\omega_3+\omega_5)} X^1_{35} \\
& + e^{\lambda(\omega_4+\omega_5)} X^1_{45} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} X^1_{234} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_5)} X^1_{235} \\
& + e^{\lambda(\omega_2+\omega_4+\omega_5)} X^1_{245} + e^{\lambda(\omega_3+\omega_4+\omega_5)} X^1_{345} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)} X^1_{2345} \Big) \\
+ \lambda^{10} e^{\lambda\omega_2 x} \Big(& X^2 + e^{\lambda\omega_1} X^2_1 + e^{\lambda\omega_3} X^2_3 + e^{\lambda\omega_4} X^2_4 + e^{\lambda\omega_5} X^2_5 + e^{\lambda(\omega_1+\omega_3)} X^2_{13} \\
& + e^{\lambda(\omega_1+\omega_4)} X^2_{14} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_5)} X^2_{15} + e^{\lambda(\omega_3+\omega_4)} X^2_{34} + e^{\lambda(\omega_3+\omega_5)} X^2_{35} \\
& + e^{\lambda(\omega_4+\omega_5)} X^2_{45} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_3+\omega_4)} X^2_{134} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_3+\omega_5)} X^2_{135} \\
& + e^{\lambda(\omega_1+\omega_4+\omega_5)} X^2_{145} + e^{\lambda(\omega_3+\omega_4+\omega_5)} X^2_{345} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_3+\omega_4+\omega_5)} X^2_{1345} \Big) \\
+ \lambda^{10} e^{\lambda\omega_3 x} \Big(& X^3 + e^{\lambda\omega_1} X^3_1 + e^{\lambda\omega_2} X^3_2 + e^{\lambda\omega_4} X^3_4 + e^{\lambda\omega_5} X^3_5 + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)} X^3_{12} \\
& + e^{\lambda(\omega_1+\omega_4)} X^3_{14} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_5)} X^3_{15} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_4)} X^3_{24} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_5)} X^3_{25} \\
& + e^{\lambda(\omega_4+\omega_5)} X^3_{45} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_4)} X^3_{124} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_5)} X^3_{125} \\
& + e^{\lambda(\omega_1+\omega_4+\omega_5)} X^3_{145} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_4+\omega_5)} X^3_{245} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_4+\omega_5)} X^3_{1245} \Big) \\
+ \lambda^{10} e^{\lambda\omega_4 x} \Big(& X^4 + e^{\lambda\omega_1} X^4_1 + e^{\lambda\omega_2} X^4_2 + e^{\lambda\omega_3} X^4_3 + e^{\lambda\omega_5} X^4_5 + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)} X^4_{12} \\
& + e^{\lambda(\omega_1+\omega_3)} X^4_{13} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_5)} X^4_{15} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3)} X^4_{23} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_5)} X^4_{25} \\
& + e^{\lambda(\omega_3+\omega_5)} X^4_{35} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3)} X^4_{123} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_5)} X^4_{125} \\
& + e^{\lambda(\omega_1+\omega_3+\omega_5)} X^4_{135} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_5)} X^4_{235} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_5)} X^4_{1235} \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+ \lambda^{10} e^{\lambda\omega_5 x} \Big(& X^5 + e^{\lambda\omega_1} X^5_1 + e^{\lambda\omega_2} X^5_2 + e^{\lambda\omega_3} X^5_3 + e^{\lambda\omega_4} X^5_4 + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)} X^5_{12} \\
& + e^{\lambda(\omega_1+\omega_3)} X^5_{13} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_4)} X^5_{14} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3)} X^5_{23} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_4)} X^5_{24} \\
& + e^{\lambda(\omega_3+\omega_4)} X^5_{34} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3)} X^5_{123} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_4)} X^5_{124} \\
& + e^{\lambda(\omega_1+\omega_3+\omega_4)} X^5_{134} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} X^5_{234} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_5)} X^4_{1235} \Big) .
\end{aligned} \tag{5}$$

Анализируя $g(x,\lambda;\Gamma)$, можно заметить, что "плохими"слагаемыми (с точки зрения условия $F(\lambda;\Gamma)\in(A)$) являются слагаемые с коэффициентами

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
(i) & X_2^1 & X_5^1 & X_{23}^1 & X_{25}^1 & X_{34}^1 & X_{45}^1 & X_{234}^1 & X_{345}^1 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
(ii) & X_3^2 & X_1^2 & X_{34}^2 & X_{13}^2 & X_{45}^2 & X_{15}^2 & X_{345}^2 & X_{145}^2 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
(iii) & X_4^3 & X_2^3 & X_{45}^3 & X_{24}^3 & X_{15}^3 & X_{12}^3 & X_{145}^3 & X_{125}^3 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
(iv) & X_5^4 & X_3^4 & X_{15}^4 & X_{35}^4 & X_{12}^4 & X_{23}^4 & X_{125}^4 & X_{123}^4 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
(v) & X_1^5 & X_4^5 & X_{12}^5 & X_{14}^5 & X_{23}^5 & X_{34}^5 & X_{123}^5 & X_{234}^5 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow
\end{array} \tag{6}$$

(для дальнейшего изложения удобно разбить эти коэффициенты на пять групп (i) — (v)). Смысл стрелок будет ясен из дальнейшего изложения.

Введем вектор $\hat\Gamma=\Omega^{-1}\Gamma=(\hat\gamma_1,\hat\gamma_2,\ldots,\hat\gamma_5)^T$. Далее будем писать $X_2^1(\Gamma), X_5^1(\Gamma),\ldots$, чтобы подчеркнуть, какой вектор Γ используется. Аналогично будем писать $\hat X_2^1(\hat\Gamma)$, $\hat X_5^1(\hat\Gamma)$, ... Кроме того, введем оператор S циклического сдвига вверх

$$\hat\Gamma=(\hat\gamma_1,\hat\gamma_2,\ldots,\hat\gamma_5)^T\longmapsto S\hat\Gamma:=(\hat\gamma_2,\hat\gamma_3,\ldots,\hat\gamma_5,\hat\gamma_5)^T.$$

Лемма 4. *Для любого вектора $\hat\Gamma$ справедливы равенства (см. стрелки в таблице* (6)*):*

$$\begin{array}{llll}
\hat X_3^2(\hat\Gamma)=\hat X_2^1(S\hat\Gamma), & \hat X_1^2(\hat\Gamma)=\hat X_5^1(S\hat\Gamma), & \ldots, & \hat X_{145}^2(\hat\Gamma)=\hat X_{345}^1(S\hat\Gamma);\\
\hat X_4^3(\hat\Gamma)=\hat X_3^2(S\hat\Gamma), & \hat X_2^3(\hat\Gamma)=\hat X_1^2(S\hat\Gamma), & \ldots, & \hat X_{125}^3(\hat\Gamma)=\hat X_{145}^2(S\hat\Gamma);\\
\hat X_5^4(\hat\Gamma)=\hat X_4^3(S\hat\Gamma), & \hat X_3^4(\hat\Gamma)=\hat X_2^3(S\hat\Gamma), & \ldots, & \hat X_{123}^4(\hat\Gamma)=\hat X_{125}^3(S\hat\Gamma);\\
\hat X_1^5(\hat\Gamma)=\hat X_5^4(S\hat\Gamma), & \hat X_4^5(\hat\Gamma)=\hat X_3^4(S\hat\Gamma), & \ldots, & \hat X_{234}^5(\hat\Gamma)=\hat X_{123}^4(S\hat\Gamma);\\
\hat X_2^1(\hat\Gamma)=\hat X_1^5(S\hat\Gamma), & \hat X_5^1(\hat\Gamma)=\hat X_4^5(S\hat\Gamma), & \ldots, & \hat X_{345}^1(\hat\Gamma)=\hat X_{234}^5(S\hat\Gamma).
\end{array}$$

В каждом случае **(1)–(5)** Леммы 3 (и даже подслучае) дальнейшие рассуждения будут различными. Ввиду ограниченности объема статьи, рассмотрим только подслучай $y\neq t^4x$ и $y\neq\frac{x}{t}$ случая **(1)**. В этом подслучае $\Delta_1\neq0$ и $\Delta_{1234}\neq0$ (см. рисунок).

Подсчитывая в рассматриваемом подслучае коэффициенты группы (i), получим следующий результат

Лемма 5. *Справедливы следующие соотношения*

$$\begin{array}{llll}
(\alpha) & t\hat\gamma_1-\hat\gamma_2=0 & \Longleftrightarrow & X_{34}^1=X_{345}^1=0;\\
(\beta) & t\hat\gamma_2-\hat\gamma_3=0 & \Longleftrightarrow & X_{45}^1=0;\\
(\gamma) & t\hat\gamma_3-\hat\gamma_4=0 & \Longleftrightarrow & X_5^1=X_{25}^1=0;\\
(\delta) & t\hat\gamma_4-\hat\gamma_5=0 & \Longleftrightarrow & X_{21}^1=0;\\
(\varepsilon) & t\hat\gamma_5-\hat\gamma_1=0 & \Longleftrightarrow & X_{234}^1=0;
\end{array}$$

и всегда $X_{23}^1=0$ без каких-либо условий на вектор $\hat\Gamma$.

Найдем вектор $\hat\Gamma$ из условия, что все равенства системы (α) — (ε) выполняются. Очевидно, для существования такого вектора, необходимо и достаточно, чтобы $t^5=1$, то есть $t=\varepsilon_j$, $j=\overline{1,5}$, где ε_j есть различные корни пятой степени из 1. Следовательно, в случае $t^5=1$ имеется 5 линейно независимых решений системы (α) — (ε), нормированных условием $\hat\gamma_1=1$,

$$\hat\Gamma_j^0=(1,\varepsilon_j,\varepsilon_j^2,\varepsilon_j^3,\varepsilon_j^4)^T,\quad j=\overline{1,5}.$$

По построению все коэффициенты группы (i) на векторах Γ_j^0 равны нулю. С учетом этого и на основании Леммы 4 получаем следующий результат.

Лемма 6. $(\forall j = \overline{1,5})\ F(\lambda, \Gamma_j^0) \in (A)$.

Если $t^5 \neq 1$, то ищем вектор $\hat{\Gamma}$ из условия выполнения всех равенств системы (α) – (ε), кроме одного. В этом случае существуют также 5 линейно независимых решений (с точностью до умножения на отличную от нуля константу)

$$\hat{\Gamma}_1^1 = \begin{pmatrix} 1, \\ t, \\ t^2, \\ t^3, \\ t^4 \end{pmatrix}, \hat{\Gamma}_2^1 = \begin{pmatrix} t^4, \\ 1, \\ t, \\ t^2, \\ t^3 \end{pmatrix}, \hat{\Gamma}_3^1 = \begin{pmatrix} t^3, \\ t^4, \\ 1, \\ t, \\ t^2 \end{pmatrix}, \hat{\Gamma}_4^1 = \begin{pmatrix} t^2, \\ t^3, \\ t^4, \\ 1, \\ t \end{pmatrix}, \hat{\Gamma}_4^1 = \begin{pmatrix} t, \\ t^2, \\ t^3, \\ t^4, \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При этом

1) для $\hat{\Gamma}_1^1$ не выполняется равенство (ε), то есть $\hat{X}_{234}^1(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) равны нулю;
2) для $\hat{\Gamma}_2^1$ не выполняется равенство (α), то есть $\hat{X}_{34}^1(\hat{\Gamma}_2^1) \neq 0$ и $\hat{X}_{345}^1(\hat{\Gamma}_2^1) \neq 0$, а все остальные коэфффициенты группы (i) равны нулю;
3) для $\hat{\Gamma}_3^1$ не выполняется равенство (β), то есть $\hat{X}_{45}^1(\hat{\Gamma}_3^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) равны нулю;
4) для $\hat{\Gamma}_4^1$ не выполняется равенство (γ), то есть $\hat{X}_5^1(\hat{\Gamma}_4^1) \neq 0$ и $\hat{X}_{25}^1(\hat{\Gamma}_4^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) равны нулю;
5) для $\hat{\Gamma}_5^1$ не выполняется равенство (δ), то есть $\hat{X}_2^1(\hat{\Gamma}_5^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) равны нулю.

Легко видеть, что $|\hat{\Gamma}_1, \ldots, \hat{\Gamma}_5| = \left(1 - t^5\right)^4 \neq 0$, откуда следует линейная независимость векторов Γ_j, $j = \overline{1,5}$.

Лемма 7. $(\forall j = \overline{1,5})\ F(\lambda, \Gamma_j^1) \in (A)$.

Доказательство. Рассуждения проведем только для случая $j = 1$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Очевидно,

$$S\hat{\Gamma}_1^1 = \Gamma_5^1, \quad S\hat{\Gamma}_2^1 = \Gamma_1^1, \quad S\hat{\Gamma}_3^1 = \Gamma_2^1, \quad S\hat{\Gamma}_4^1 = \Gamma_3^1, \quad S\hat{\Gamma}_5^1 = \Gamma_4^1. \tag{7}$$

Выясним, какие коэффициенты из таблицы (6) на векторе Γ_1^1 не равны нулю. По построению $\hat{X}_{234}^1(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0$. Далее, используя соотношения (7) и Лемму 5, будем иметь

$$\begin{array}{lll}
0 \neq \hat{X}_{34}^1(\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{23}^5(S\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{23}^5(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow & \hat{X}_{23}^5(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0; \\
0 \neq \hat{X}_{345}^1(\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{234}^5(S\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{234}^5(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow & \hat{X}_{234}^5(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0; \\
0 \neq \hat{X}_{45}^1(\hat{\Gamma}_3^1) = \hat{X}_{34}^5(\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{23}^4(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow & \hat{X}_{23}^4(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0; \\
0 \neq \hat{X}_5^1(\hat{\Gamma}_4^1) = \hat{X}_4^5(\hat{\Gamma}_3^1) = \hat{X}_3^4(\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_2^3(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow & \hat{X}_2^3(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0; \\
0 \neq \hat{X}_{25}^1(\hat{\Gamma}_4^1) = \hat{X}_{14}^5(\hat{\Gamma}_3^1) = \hat{X}_{35}^4(\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{24}^3(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow & \hat{X}_{24}^3(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0; \\
0 \neq \hat{X}_2^1(\hat{\Gamma}_5^1) = \hat{X}_1^5(\hat{\Gamma}_4^1) = \hat{X}_5^4(\hat{\Gamma}_3^1) = \hat{X}_4^3(\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_3^2(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow & \hat{X}_3^2(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0.
\end{array}$$

Следовательно, все коэффициенты из таблицы (6) на векторе Γ_1^1 обращаются в нуль, кроме коэффициентов $X_{234}^1(\Gamma_1^1)$, $X_{23}^5(\Gamma_1^1)$, $X_{234}^5(\Gamma_1^1)$, $X_{23}^4(\Gamma_1^1)$, $X_2^3(\Gamma_1^1)$, $X_{24}^3(\Gamma_1^1)$, $X_3^2(\Gamma_1^1)$.

Пусть $M(\Gamma_1^1)$ есть наименьший выпуклый многоугольник, содержащий многоугольники $M_{g_1(0,\cdot)}$ и $M_{g_1(1,\cdot)}$, где обозначено $g_1(x, \lambda) := g(x, \lambda; \Gamma_1^1)$. Сравнивая многоугольники $M(\Gamma_1^1)$ и M_Δ, получаем утверждение леммы.

В заключение сформулируем лемму, которая необходима на завершающей стадии доказательства Теоремы 1.

Лемма 8. *Если векторы Γ_j, $j=\overline{1,5}$, линейно независимы, то функции $g(\cdot,\lambda;\Gamma_j)$, $j=\overline{1,5}$, также линейно независимы $\forall\lambda\in\mathbb{C}\setminus(\sigma\bigcup\{0\})$.*

Используя Леммы 1 – 8 и применяя модифицированную схему рассуждений при доказательстве кратной полноты с.ф., которая обсуждалась выше, получаем утверждение Теоремы 1.

Список литературы

[1] А.А. Шкаликов, *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Труды семинара имени И.Г. Петровского. — М.: Изд-во Моск. ун-та. — 1983. — Вып. 9. — С. 190–229.

[2] М.В. Келдыш, *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений* // Докл. АН СССР. — 1951. — Том 77. — № 1. — С. 11–14.

[3] А.П. Хромов, *Конечномерные возмущения вольтерровых операторов.* Дис. …докт. физ.-мат. наук. — Институт математики СО АН СССР. Новосибирск. — 1973. — 242 с. (Автореферат опубликован в [4]).

[4] А.П. Хромов, *Конечномерные возмущения вольтерровых операторов* // Матем. заметки. — 1974. — **16**. — № 4. — С. 669–680.

[5] W. Eberhard, *Zur Vollständigkeit des Biorthogonalsystems von Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme*, Math. Z. 1976, **146**, no. 3, pp. 213–221 (German).

[6] А.А. Шкаликов. *О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями* // Функц. анализ. — 1976. — Том 10. — № 4. — С. 69–80.

[7] А.П. Хромов, *Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка* // В сб.: Исследования по теории операторов. — Уфа. — 1988. — С. 182–193.

[8] О.Ю. Дмитриев, *Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n-го порядка с нерегулярными краевыми условиями* // В сб.: Математика и ее приложения. Теория, методы, алгоритмы. Межвуз. сб. научн. трудов. Выпуск 2. – Саратов: Изд-во СГУ. — 1991. — С. 70–72.

[9] А.П. Вагабов, *Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов.* — Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та. — 1994. — 160 с.

[10] М.А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы.* — М.: Наука, 1968.

[11] V.S. Rykhlov, *On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators* // Spectral and Evolutional Problems: Proceedings of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. — Simferopol: Simferopol State University. — 1997. - Vol. 7. — P. 70–73.

Поступила в редакцию 09.01.2002