Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика"N 1 (2002) 112 – 121

УДК 517.95

И. В. Орлов

НОРМАЛЬНЫЕ ИНДЕКСЫ И НОРМАЛЬНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

На базе понятия нормального индекса линейного непрерывного оператора строится теория нормального дифференцирования отображений в локально выпуклых пространствах. Рассмотрены элементарные свойства нормальных производных, нормальная форма теоремы о среднем и ее непосредственные приложения.

0. Введение

Классическая теория Фреше дифференцирования в банаховых пространствах [1] не допускает, как известно, прямого обобщения на важнейший для современного анализа класс локально выпуклых пространств (ЛВП). Основной причиной этого служит отсутствие в небанаховом случае подходящих топологий в пространствах линейных операторов.

Широко применявшийся на протяжении ряда лет псевдотопологический подход (см., например, [2]–[5]) хотя и дал формальный выход из положения, тем не менее, на наш взгляд, не обладает той степенью алгоритмичности и прозрачности, которая присуща анализу Фреше, и которая, безусловно, необходима для регулярного применения метода.

Предлагаемый ниже подход базируется на понятии нормального индекса линейного непрерывного оператора $A : E \to F$, описывающего непрерывность A на языке соответствия индексов преднорм из ЛВП F и E. Аналогичным образом вводятся относительные нормальные индексы малых отображений. Эти вопросы, рассмотренные в [6]–[8], мы излагаем в пп.1–2 работы в обзорном порядке.

В п.3 дается соответствующее определение нормальной дифференцируемости и строится элементарная теория нормального дифференцирования отображений ЛВП. При этом, на базе пп.1–2, вычисляются соответствующие нормальные индексы, вплоть до индексов операторной матрицы Якоби. В п.4 рассмотрена теорема о среднем для нормально дифференцируемых отображений, причем оценка связана с нормальным индексом производной. Второй идейный план работы связан с п.5. Здесь показано, что разложение $(E; F)$ в индуктивную шкалу ЛВП в соответствии с нормальными индексами операторов позволяет применять теорему о среднем вполне аналогично случаю банаховых пространств, вплоть до почленного дифференцирования.

Отметим, что в работе не затронуты вопросы, связанные с высшими производными и обратными отображениями, поскольку это требует переноса предыдущей конструкции на отображения индуктивных шкал ЛВП.

Метод дифференцирования, использованный в настоящей работе, не является принципиально новым. Как отмечено ниже (см. пп. 2.2, 3.2, 5.5), дифференцируемость по Хайерсу-Ленгу (см. [13]) в топологических векторных пространствах в случае ЛВП равносильна нормальной дифференцируемости. Таким образом, данный метод является псевдотопологическим методом дифференцирования в смысле Ламадрида-Смолянова ([13]). Цель данной работы — продемонстрировать преимущества применения в дифференцировании нормальных индексов и соответствующих нормальных разложений операторных пространств в шкалы ЛВП. Это позволило, в частности, получить и существенно новые результаты, такие, как нормальная форма теоремы о среднем 1 и теорема о почленном дифференцировании 2.

Всюду далее $\mathbb{K}$ — поле скаляров; E, E_i, F, F^j, G — ЛВП с соответствующими определяющими системами преднорм $\{\|\cdot\|_t\}_{t\in T}$, $\{\|\cdot\|_{t_i}\}_{t_i\in T_i}$, $\{\|\cdot\|^s\}_{s\in S}$, $\{\|\cdot\|^{s_j}\}_{s_j\in S_j}$, $\{\|\cdot\|_r\}_{r\in R}$, индуктивно упорядоченными в соответствии с возрастанием преднорм; $(E;F)$ — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из E в F; $(E_1,E_2;F)$ — пространство билинейных непрерывных операторов, действующих из $E_1 \times E_2$ в F.

1. Нормальные индексы линейных операторов в ЛВП (n-индексы)

Определение 1. Пусть $A \in (E;F)$. Для любого $s \in S$ положим

$$n_A(s) = \{t \in T \,|\, \|A\|_t^s := \sup_{\|x\|_t \le 1} \|Ax\|^s < +\infty\}.$$

Многозначное отображение n_A назовем *нормальным индексом*, или *n-индексом* оператора A, величины $\|A\|_t^s$ — *конормами.*

Замечание 9. Пусть $\mathrm{ray}(T)$ — множество всех *лучей* в T, т.е. подмножеств T, содержащих вместе с каждым своим элементом все последующие. Множество $\mathrm{ray}(T)$ индуктивно упорядочено противоположно включению и образует решетку относительно операций $T' \vee T'' := T' \cap T''$ и $T' \wedge T'' := T' \cup T''$. Легко видеть, что всякий нормальный индекс n_A отображает S в $\mathrm{ray}(T)$. Отметим также, что конормы обладают обычными свойствами норм; кроме того, при $t \in n_A(s)$ и $x \in E$

$$\|Ax\|^t \le \|A\|_s^t \cdot \|x\|_s. \tag{1}$$

Отметим основные свойства нормальных индексов (см. [6], [7]).

Предложение 8. Любой нормальный индекс является возрастающим отображением $S \to \mathrm{ray}(T)$. Кроме того:

1) если $c \in \mathbb{K}$, $c \ne 0$, то $n_{c\cdot A}(s) = n_A(s)$;

2) если $A_i \subset (E;F)$, $i = \overline{1,k}$, то $n_{\sum\limits_{i=1}^{k} A_i}(s) \preccurlyeq \bigvee_{i=1}^{k} n_{A_i}(s)$;

3) если $A_j \in (E;F^j)$, $j = \overline{1,m}$, то $n_{(A_1,\dots,A_m)}(s_1,\dots,s_m) = \bigvee_{j=1}^{m} n_{A_j}(s_j)$; при этом $\|(A_1,\dots,A_m)\|_t^{s_1\dots s_m} = \max\limits_{1\le j\le m} \|A_j\|_t^{s_j}$;

4) если $A_i \in (E_i;F)$, $i = \overline{1,k}$, то $n_{\bigoplus\limits_{i=1}^{k} A_i}(s) = \prod\limits_{i=1}^{k} n_{A_k}(s)$; при этом $\|\bigoplus\limits_{i=1}^{k} A_i\|_{t_1\dots t_k}^{s} = \max\limits_{1\le i\le k} \|A_i\|_t^{s_i}$;

5) если $A_1 \in (E;F)$, $A_2 \in (F;G)$, то $n_{A_2\circ A_1}(r) \preccurlyeq n_{A_1}[n_{A_2}(r)]$; при этом $\|A_2 \circ A_1\|_t^r \le \|A_2\|_s^r \cdot \|A_1\|_t^s$.

Примеры вычисления нормальных индексов рассмотрены в [7]. Отметим лишь один важный пример.

Пример 5. Если $I_j : E_j \to \prod\limits_{i=1}^{k} E_i$ — канонические инъекции, $j = \overline{1,k}$, то

$$n_{I_j}(t_1^0,\dots,t_k^0) \preccurlyeq (t_j \succcurlyeq t_j^0); \quad j = \overline{1,k}. \tag{2}$$

2. Относительные нормальные индексы малых отображений в ЛВП (ν-индексы)

Определение 2. Пусть отображение $\varphi: E \to F$ определено в некоторой окрестности нуля в E. Будем говорить, что $\varphi(h) = o(h)$, если

$$\forall s \in S\, \exists t \in T: \; (\|\varphi(h)\|^s/\|h\|_t) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{3}$$

Обозначим через $\nu_\varphi(s)$ множество всех $t \in T$, удовлетворяющих условию (3). Многозначное отображение $s \mapsto \nu_\varphi(s)$ назовем *относительным нормальным индексом* (или *ν-индексом*) отображения φ.

Замечание 10. Нетрудно видеть, что условие (3) равносильно определению малого отображения топологических векторных пространств по Хайерсу-Ленгу (см. [13]): если U — окрестность нуля в E, V — окрестность нуля в F, то $\varphi(h) = o(h)$ тогда, когда

$$\forall V\, \exists U \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, (h \in U, |\lambda| < \delta) \Rightarrow \left(\frac{\varphi(\lambda h)}{\lambda} \in \varepsilon V\right); \tag{4}$$

(достаточно рассмотреть $V = V^s = \{y \in F |\, \|y\|^s < 1\}$ и $U = U_t = \{x \in E |\, \|x\|_t < 1\}$, где $t \in \nu_\varphi(s)$). Однако метод нормальных индексов существенно упрощает в локально выпуклом случае работу с малыми отображениями.

Аналогично n-индексам, ν-индексы также являются отображениями $S \to \mathrm{ray}(T)$. Примеры вычисления ν-индексов рассмотрены в [6]; мы приведем здесь лишь один важный пример.

Предложение 9. Если $B \in (E_1, E_2; F)$, то $B(h_1, h_2) = o((h_1, h_2))$. При этом

$$\nu_B(s) = \{(t_1, t_2) |\, \|B\|^s_{t_1 t_2} := \sup_{\|h_1\|_{t_1} \le 1, \|h_2\|_{t_2} \le 1} \|B(h_1, h_2)\|^s < \infty\}. \tag{5}$$

Определенное формулой (5) отображение называется также *бинормальным индексом* B и обозначается n_B^2 (см. [7]).

Отметим основные свойства малых отображений и относительных нормальных индексов (см. [6]).

Предложение 10. Любой ν-индекс является возрастающим отображением $S \to \mathrm{ray}(T)$. Кроме того:

1) если $c \in \mathbb{K}$, $c \neq 0$, то $\nu_{c \cdot \varphi}(s) = \nu_\varphi(s)$;

2) если $\varphi_i = o(h)$, $i = \overline{1, n}$, то $\nu_{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i}(s) \preccurlyeq \bigvee_{i=1}^n \nu_{\varphi_i}(s)$;

3) если $\varphi(h) = o(h)$, то $\lim\limits_{\lambda \to 0} (\varphi(\lambda h)/\lambda) = 0$;

4) если $\varphi_j: E \to F^j$, $j = \overline{1, m}$, то $\nu_{(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}(s_1, \ldots, s_m) = \bigvee_{j=1}^m \nu_{\varphi_j}(s_j)$;

5) если $\varphi_i: E_i \to F$, $i = \overline{1, k}$, то $\nu_{\bigoplus\limits_{i=1}^{k} \varphi_i}(s) = \prod\limits_{i=1}^{k} \nu_{\varphi_k}(s)$;

6) если $\varphi_1: E \to F$, $A_1 \in (E; F)$, $\varphi_2: F \to G$, $\varphi_1(h) = o(h)$, $\varphi_2(k) = o(k)$, то $(\varphi_2 \circ (\varphi_1 + A_1))(h) = o(h)$, и

$$\nu_{\varphi_2 \circ (\varphi_1 + A_1)}(r) \preccurlyeq (\nu_{\varphi_1} \vee n_{A_1}) \circ \nu_{\varphi_2}(r); \tag{6}$$

7) если $\varphi: E \to F$, $\varphi(h) = o(h)$, $A_2 \in (F; G)$, то $(A_2 \circ \varphi)(h) = o(h)$, и

$$\nu_{A_2 \circ \varphi}(r) \preccurlyeq (\nu_\varphi \circ n_{A_2})(r);$$

8) если $\varphi: E_1 \times E_2 \to F$, $\varphi(h_1, h_2) = o((h_1, h_2))$, то $\varphi_1(h_1) := \varphi(h_1, 0) = o(h_1)$, $\varphi_2(h_2) := \varphi(0, h_2) = o(h_2)$, и

$$\nu_{\varphi_1}(s) \times \nu_{\varphi_2}(s) \preccurlyeq \nu_\varphi(s).$$

Заметим, что последнее неравенство следует из (2) и (6).

3. Нормальное дифференцирование в ЛВП (элементарная теория)

Определение 3. Будем говорить, что отображение $f : E \to F$, определенное в окрестности точки $x \in E$, *(нормально) дифференцируемо* в точке x, если $\Delta f(x,h) = A_x h + \varphi_x(h)$, где $A_x \in (E;F)$, $\varphi_x(h) = o(h)$. Оператор A_x назовем *(нормальной) производной* f в точке x и обозначим обычным символом $f'(x)$. Под *n-индексом* и *ν-индексом* f в точке x будем понимать соответствующие индексы главной части и остаточного члена Δf: $n_f(x) := n_{f'(x)}$; $\nu_f(x) := \nu_{\varphi_x}$.

Замечание 11. Очевидно, если E — банахово пространство, то $\varphi_x(h) = o(\|h\|)$ и мы приходим к определению Фреше. В этом случае *n-индекс* и *ν-индекс* f постоянны. Отметим также, что выбор определяющих систем преднорм в E и F не влияет на нормальную дифференцируемость; изменяется лишь $n_f(x)$ и $\nu_f(x)$. Удобно рассматривать максимальные определяющие системы попарно неэквивалентных преднорм.

В случае произвольных ЛВП E и F, как вытекает из замечания 10, определение нормальной дифференцируемости равносильно определению Хайерса-Ленга ([13]): $\Delta f(x,h) = A_x h + \varphi_x(h)$, где φ_x удовлетворяет условию (4). Однако метод нормальных индексов дает существенную дополнительную информацию о поведении линейной части и малого члена и приводит ниже к новой форме теоремы о среднем в ЛВП (теор. 1) и к новому результату о почленном дифференцировании в ЛВП (теор. 2) и некоторым другим новым результатам.

Следующие утверждения очевидно следуют из определения 3 и свойств нормальных индексов 8(1–2) и 10(1–3).

Предложение 11. Если f нормально дифференцируемо в точке $x \in E$, то f непрерывно в точке x.

Предложение 12. Если $f_i : E \to F$ дифференцируемы в точке $x \in E$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $(i = \overline{1,n})$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ также дифференцируемо в точке x, причем:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right)'(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i'(x); \quad n_{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i}(x) \preccurlyeq \bigvee_{i=1}^{n} n_{f_i}(x); \quad \nu_{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i}(x) \preccurlyeq \bigvee_{i=1}^{n} \nu_{f_i}(x).$$

Предложение 13. Если f дифференцируемо в точке x, то для любого $h \in E$ существует производная по направлению $\sigma f(x,h) = \lim\limits_{\lambda \to +0} (\Delta f(x,\lambda h)/\lambda)$, и $\sigma f(x,h) = f'(x)h$.

Замечание 12. Таким образом, алгоритм вычисления нормальной производной следующий: 1) вычислить $\sigma f(x,h)$; 2) проверить линейность $\sigma f(x,h)$ по h и вычислить n-индекс; 3) проверить малость $\Delta f(x,h) - \sigma f(x,h)$ и вычислить ν-индекс.

Проиллюстрируем это на простом примере. Пусть $E = F = C_{loc}(\mathbb{R})$ (с преднормами $\|x\|_t = \sup\limits_{|\tau| \le t} |x(\tau)|$, $t \ge 0$), $f(x)(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n(t)$, где $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$. Тогда $\sigma f(x,h) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} h$, откуда $\|\sigma f(x,h)\|_t \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} n|c_n| \cdot \|x\|_t^{n-1} \cdot \|h\|_t$, и, следовательно, $n_{\sigma f(x,\cdot)}(t) \preccurlyeq [t; +\infty)$ при любом $x \in E$. Далее, $\Delta f(x,h) - \sigma f(x,h) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n \cdot \sum\limits_{k=2}^{n} C_n^k x^{n-k} h^k$, откуда $\|\Delta f(x,h) - \sigma f(x,h)\|_t \le \sum\limits_{n=2}^{\infty} |c_n| \cdot (\|x\|_t + 1)^n \cdot \|h\|_t^2$ при $\|h\|_t \le 1$, и, следовательно, $\nu_f(x)(t) \preccurlyeq [t; +\infty)$.

Предложение 14. Если $f : E \to F$ дифференцируемо в точке $x \in E$, $g : F \to G$ дифференцируемо в точке $y = f(x) \in F$, то $g \circ f : E \to G$ дифференцируемо в точке x; при этом

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \circ f'(x); \quad n_{g \circ f}(x) \preccurlyeq n_f(x) \circ n_g(y); \tag{7}$$

$$\nu_{g \circ f}(x) \preccurlyeq (\nu_f(x) \circ n_g(y)) \vee ((n_f(x) \vee \nu_f(x)) \circ \nu_g(y)). \tag{8}$$

Доказательство. Действительно, стандартная выкладка дает

$$\Delta(g \circ f)(x, h) = g'(y) \circ f'(x)h + [g'(y) \cdot \varphi_x(h) + \varphi^y(f'(x)h + \varphi_x(h))], \tag{9}$$

где φ_x и φ^y — соответствующие малые члены приращений f и g. Отсюда, применяя 8(5) к главной части (9), получаем (7), а применяя 10(2) и 10(6–7) к малой части (9), получаем (8). □

Предложение 15. Если $B \in (F^1, F^2; G)$, то B дифференцируемо в любой точке $(y_1, y_2) \in F_1 \times F_2$; при этом $B'(y_1, y_2)(k_1, k_2) = B(y_1, k_2) + B(k_1, y_2)$;

$$n_B(y_1, y_2) = n_{B(\cdot, y_2)}(y_1) \times n_{B(y_1, \cdot)}(y_2); \tag{10}$$

$$\nu_B(y_1, y_2) = n_B^2(y_1, y_2). \tag{11}$$

Доказательство. Действительно, т.к.

$$\Delta B((y_1, y_2), (k_1, k_2)) = [B(k_1, y_2) + B(y_1, k_2)] + B(k_1, k_2), \tag{12}$$

то применяя 8(4) к главной части (12), получаем (10), а применяя 9 к малой части (12), получаем (11). □

Предложение 16. Отображение $(f_1, f_2) : E \to F^1 \times F^2$ дифференцируемо тогда и только тогда, когда дифференцируемы f_1 и f_2; при этом

$$(f_1, f_2)'(x) = (f_1'(x), f_2'(x)); \quad n_{(f_1, f_2)}(x) = n_{f_1}(x) \vee n_{f_2}(x); \tag{13}$$

$$\nu_{(f_1, f_2)}(x) = \nu_{f_1}(x) \vee \nu_{f_2}(x). \tag{14}$$

Доказательство. Действительно, если $\Delta f_i(x, h) = f_i'(x)h + \varphi_i(h)$, то

$$\Delta(f_1, f_2)(x, h) = (f_1'(x), f_2'(x))h + (\varphi_1, \varphi_2)(h), \tag{15}$$

и применяя 8(5) к главной части (15), получаем (13), а применяя 10(4) к малой части (15), получаем (14). Обратный вывод аналогичен. □

Следствие 1. *Если $(f_1, f_2) : E \to F^1 \times F^2$ дифференцируемо в точке $x \in E$, $B \in (F_1, F_2; G)$, то $B(f_1, f_2) : E \to G$ дифференцируемо в точке x; при этом:*

$$B(f_1, f_2)'(x)h = B(f_1'(x)h, f_2(x)) + B(f_1(x), f_2'(x)h);$$

$$n_{B(f_1, f_2)}(x) \preccurlyeq [n_{f_1}(x) \vee n_{f_2}(x)] \circ n_B(f_1(x), f_2(x));$$

$$\nu_{B(f_1, f_2)}(x) \preccurlyeq ([\nu_{f_1}(x) \vee \nu_{f_2}(x)] \circ n_B(f_1(x), f_2(x))) \vee$$
$$\vee (n_{f_1}(x) \vee n_{f_2}(x) \vee \nu_{f_1}(x) \vee \nu_{f_2}(x)) \circ n_B^2(f_1(x), f_2(x)).$$

Предложение 17. Если $f : E_1 \times E_2 \to F$ дифференцируемо в точке $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, то существуют $(\partial f/\partial x_1)(x_1, x_2)$ и $(\partial f/\partial x_2)(x_1, x_2)$; при этом

$$f'(x_1, x_2)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)h_2; \tag{16}$$

$$n_f(x_1, x_2) = n_{f(\cdot, x_2)}(x_1) \times n_{f(x_1, \cdot)}(x_2); \tag{17}$$

$$\nu_{f(\cdot, x_2)}(x_1) \times \nu_{f(x_1, \cdot)}(x_2) \preccurlyeq \nu_f(x_1, x_2). \tag{18}$$

Доказательство. Существование частных производных и равенство (16) доказываются стандартным образом. Поскольку при этом

$$f'(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \oplus \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2); \quad \varphi_{\mathbf{x}_1, x_2} = \varphi_{x_1, x_2} \circ I_1; \quad \varphi_{x_1, \mathbf{x}_2} = \varphi_{x_1, x_2} \circ I_2;$$

где φ_{x_1, x_2}; $\varphi_{\mathbf{x}_1, x_2}$ и $\varphi_{x_1, \mathbf{x}_2}$ — соответственно малые части приращений $f(\cdot, \cdot)$, $f(x_1, \cdot)$ и $f(\cdot, x_2)$; I_j $(j = 1, 2)$ — канонические инъекции $E_j \to E_1 \times E_2$, то равенства (17) и (18) следуют соответственно из 8(4) и 10(8). □

Следствие 2. *Если $f = (f_1, \ldots, f_m) : E_1 \times \ldots \times E_n \to F^1 \times \ldots \times F^m$ дифференцируемо в точке $(x_1, \ldots, x_n)$, то $f'(x)$ задается операторной матрицей Якоби $(\partial f_i/\partial x_j)$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$. При этом:*

$$n_f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{i=1}^{m} \left(n_{f(\cdot, x_2, \ldots, x_n)}(x_1) \times \ldots \times n_{f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \cdot)}(x_n)\right);$$

$$\bigvee_{i=1}^{m} \left(\nu_{f(\cdot, x_2, \ldots, x_n)}(x_1) \times \ldots \times \nu_{f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \cdot)}(x_n)\right) \preccurlyeq \nu_f(x_1, \ldots, x_n).$$

В заключение этого пункта отметим, что, используя оценки конорм в предложении 8, легко получить соответствующие оценки конорм производных в предложениях 11–2.

4. Теорема о среднем для нормально дифференцируемых отображений

Напомним сначала классическую теорему о конечных приращениях для отображений отрезка в ЛВП (см., например, [3]).

Предложение 18. Пусть F — вещественное ЛВП, B — замкнутое выпуклое подмножество F, D — конечное или счетное подмножество $[0; 1]$, $g : [0; 1] \to \mathbb{R}$, $f : [0; 1] \to F$. Если f и g непрерывны на $[0; 1]$ и дифференцируемы на $[0; 1] \backslash D$, причем $f'(t) \in g'(t) \cdot B$ и $g'(t) \geq 0$ при $t \in [0; 1] \backslash D$, то $f(1) - f(0) \in [g(1) - g(0)] \cdot B$.

Перейдем теперь к отображениям из ЛВП в ЛВП.

Предложение 19. Пусть E и F — вещественные ЛВП, B — замкнутое выпуклое подмножество F, $[a; b] \subset E$, D^* — конечное или счетное подмножество $[a; b]$, $D = \{t | \, (1 - t)a + tb \in D^*\}$, $g : [0; 1] \to \mathbb{R}$, $f : [a; b] \to F$.

Если f непрерывно на $[a; b]$ и нормально дифференцируемо на $[a; b] \backslash D^*$, g непрерывно на $[0; 1]$ и дифференцируемо на $[0; 1] \backslash D$, причем $f'((1-t)a + tb) \cdot (b - a) \in g'(t) \cdot B$ и $g'(t) \geq 0$ при $t \in [0; 1] \backslash D$, то:

$$f(b) - f(a) \in [g(1) - g(0)] \cdot B. \tag{19}$$

Доказательство. Достаточно применить предложение 18 к функции $\widetilde{f}(t) = f((1-t)a + tb)$, $0 \leq t \leq 1$, дифференцируемой на $[0; 1] \backslash D$ в силу предложения 14. □

Следствие 3 (теорема о среднем). *В условиях предложения 19 для f,*

$$f(b) - f(a) \in \overline{\text{conv}} \left[f'([a; b] \backslash D^*) \cdot (b - a)\right]. \tag{20}$$

С точки зрения нормальных индексов, наиболее полезной, по-видимому, является следующая форма теоремы о среднем.

Теорема 1 (нормальная форма теоремы о среднем). *Пусть, в условиях предложения 19 для f, $n_f(x) \preccurlyeq n$ при $x \in [a;b]\backslash D^*$, где n — некоторый нормальный индекс. Тогда для всех $s \in S$ и $t \in n(s)$:*

$$\|f(b) - f(a)\|^s \leq \sup_{x\in[a;b]\backslash D^*} \|f'(x)\|_t^s \cdot \|b-a\|_t. \tag{21}$$

Доказательство. Из неравенства (1) следует, что при $\bar{x} \in [a;b]\backslash D^*$, $s \in S$ и $t \in n(s)$:

$$\|f'(\bar{x}) \cdot (b-a)\|^s \leq \sup_{x\in[a;b]\backslash D^*} \|f'(x)\|_t^s \cdot \|b-a\|_t.$$

Поэтому

$$\overline{\operatorname{conv}}\,[f'([a;b]\backslash D^*) \cdot (b-a)] \subset B, \tag{22}$$

где $B = \{y \in F \mid \|y\|^s \leq \sup\limits_{x\in[a;b]\backslash D^*} \|f'(x)\|_t^s \cdot \|b-a\|_t$ при $s \in S$, $t \in n(s)\}$ — замкнутое выпуклое множество. Следовательно, из (20) и (22) получаем $f(b) - f(a) \in B$, что равносильно (21). □

Отметим, что (см. ниже п.5) в случае непрерывной дифференцируемости f условие $n_f(x) \preccurlyeq n$ выполняется.

5. Приложения теоремы о среднем и шкалы пространств

Предварительные замечания 1. Изучение производного отображения $f' : E \to (E;F)$ требует определения сходимости в $(E;F)$. Однако в небанаховом случае, как известно, [9], никакая отделимая линейная топология в $(E;F)$ не обеспечивает непрерывность отображений вычисления $(A,x) \mapsto Ax$ и композиции $(A_1, A_2) \mapsto A_2 \circ A_1$. Существуют различные подходы к этой проблеме ([2]–[4]). Предлагаемый ниже подход состоит в подчинении различных типов сходимости в $(E;F)$ различным нормальным индексам, что приводит к разложению $(E;F)$ в индуктивную шкалу ЛВП. Приведем необходимые сведения об индуктивных шкалах (см. также [10]).

Определение 4. Система ЛВП $\overrightarrow{X} = \{X_i\}_{i\in I}$, индуктивно упорядоченная по непрерывному вложению: $(i_1 \preccurlyeq i_2) \Rightarrow (X_{i_1} \underset{\to}{\subseteq} X_{i_2})$, называется *индуктивной шкалой ЛВП.*

Операции над шкалами определяются покоординатно; например, если $\overrightarrow{Y} = \{Y_i\}_{i\in I}$, то $\overrightarrow{X} \times \overrightarrow{Y} = \{X_i \times Y_i\}_{i\in I}$. Шкалы $\overrightarrow{X}$ и $\overrightarrow{Y}$ изометрически изоморфны, если изометрически изоморфны соответствующие пространства шкал: $X_i \cong Y_i$, $i \in I$. $A \in (E;\overrightarrow{X})$, если $A \in (E;X_i)$ при некотором $i \in I$. Вообще, сходимость в шкале есть сходимость в каком-либо из пространств шкалы: отображение $\varphi : E \to \overrightarrow{X}$ непрерывно в точке $x_0 \in E$, если $(x \to x_0) \Rightarrow (\varphi(x) \to \varphi(x_0)$ в некотором $X_i)$; φ равномерно непрерывно на множестве $D \subset E$, если φ равномерно непрерывно как отображение D в некоторое X_i.

Определение 5. Пусть $\mathcal{N} = \mathcal{N}(E,F)$ — множество всех нормальных индексов в $(E;F)$. Для каждого $n \in \mathcal{N}$ положим

$$(E;F)_n = \{A \in (E;F) \mid n_A \preccurlyeq n\}.$$

Снабдим каждое пространство $(E;F)_n$ проективной топологией τ_n относительно топологий с определяющими системами преднорм $\{\|\cdot\|_t^s\}_{t\in n(s)}$, $s \in S$. Систему ЛВП

$$\overrightarrow{(E;F)} := \{((E;F)_n, \tau_n)\}_{n\in\mathcal{N}} \tag{23}$$

назовем *нормальным разложением* пространства $\overrightarrow{(E;F)}$.

Предложение 20 ([6]). Система (23) образует индуктивную шкалу ЛВП.

Замечание 13. Пусть Φ_n — фильтры окрестностей нуля в топологиях τ_n, $n \in \mathcal{N}$. Система $\{\Phi_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ порождает линейную псевдотопологию в $(E; F)$, которую нетрудно продолжить на пространство всех отображений из E в F. Это именно та топология, относительно которой данный метод дифференцирования является псевдотопологическим в смысле Ламадрида-Смолянова (см. [13]).

Отметим ряд свойств нормальных разложений.

Предложение 21 ([11]). Отображения вычисления $\overrightarrow{(E; F)} \times E \to F$, $(A, x) \mapsto Ax$, и композиции $\overrightarrow{(E; F)} \times \overrightarrow{(F; G)} \to \overrightarrow{(E; G)}$, $(A_1, A_2) \mapsto A_2 \circ A_1$, непрерывны по совокупности переменных.

Предложение 22 ([11]). Имеют место изометрические изоморфизмы:

$$\overrightarrow{\left(\bigoplus_{i=1}^{k} E_i; F\right)} \cong \prod_{i=1}^{k} \overrightarrow{(E_i; F)}; \quad \overrightarrow{(E; \prod_{j=1}^{m} F^j)} \cong \prod_{j=1}^{m} \overrightarrow{(E; F^j)}. \tag{24}$$

Эти свойства позволяют систематически применять теорему о среднем 1 к нормально дифференцируемым на множестве отображениям.

Теорема 2. *Пусть U — открытое выпуклое подмножество E, F — полное ЛВП, $\{f_k : U \to F\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность нормально дифференцируемых на U отображений, причем:*

1) для некоторой точки $x_0 \in U$ последовательность $\{f_k(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится;

2) последовательность производных $f'_k : U \to \overrightarrow{(E; F)}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно на U (к некоторому g).

Тогда $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится на U к некоторому $f : U \to F$; отображение f нормально дифференцируемо на U, и $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_k(x)$.

Доказательство. Применяя теорему 1, получаем

$$\|(f_l(x) - f_m(x)) - (f_l(x_0) - f_m(x_0))\|^s \leq \sup_{y\in U} \|f'_l(x) - f'_m(y)\|_t^s \cdot \|x - x_0\|_t, \tag{25}$$

где $s \in S$, $t \in n^1(s)$, $f'_k \rightrightarrows$ в $(E; F)_{n^1}$. В силу равномерной сходимости, правая часть (25) стремится к нулю при $m, l \to \infty$, если $\|x - x_0\|_t \leq C$. Поскольку $\|f_l(x_0) - f_m(x_0)\|^s \to 0$ при $m, l \to \infty$, то из (25) следует $\|f_l(x) - f_m(x)\|^s \to 0$ при $m, l \to \infty$ и $\|x - x_0\|_t \leq C$, $t \in n^1(s)$. Отсюда, по критерию Коши, вытекает сходимость $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ в каждой точке $x \in U$ к некоторому предельному отображению f.

Далее, фиксируя $x \in U$, имеем:

$$\begin{aligned}\|f(x+h) - f(x) - g(x)h\|^s \leq \|(f(x+h) - f(x)) - (f_k(x+h) - f_k(x))\|^s + \\ + \|f_k(x+h) - f_k(x) - f'_k(x)h\|^s + \|f'_k(x)h - g(x)h\|^s.\end{aligned} \tag{26}$$

Для первого слагаемого справа в (26), переходя к пределу в (25) при $l \to \infty$ и заменяя $m \mapsto k$, $x_0 \mapsto x$, $x \mapsto x + h$, получаем:

$$(\|(f(x+h) - f(x)) - (f_k(x+h) - f_k(x))\|^s / \|h\|_t) \leq \sup_{y\in U} \|g(x) - f'_k(x)\|_t^s < \varepsilon \tag{27}$$

при $t \in n^1(s)$ и достаточно больших k.

Для третьего слагаемого из равномерной сходимости $f'_k \rightrightarrows g$ и неравенства (21) аналогично следует для $t \in n^1(s)$ и достаточно больших k:

$$(\|f'_k(x)h - g(x)h\|^s / \|h\|_t) \leq \sup_{y \in U} \|g(x) - f'_k(x)\|_t^s < \varepsilon. \tag{28}$$

Наконец, фиксируя k, из определения нормальной дифференцируемости имеем:

$$(\|f_k(x+h) - f_k(x) - f'_k(x)h\|^s / \|h\|_t) < \varepsilon \tag{29}$$

при $t \in n_k(s)$, где $n_k = n_{f_k}(x)$ и $\|h\|_t < \delta$. В итоге, при $t \in (n^1 \vee n_k)(s)$ и $\|h\|_t < \delta$ из (27)–(29) получаем: $(\|f(x+h) - f(x) - g(x)h\|^s / \|h\|_t) < 3\varepsilon$, т.е. $f(x+h) - f(x) - g(x)h = o(h)$, что означает нормальную дифференцируемость f (с индексом $n_f \preccurlyeq n^1 \vee n_k$) и равенство $f'(x) = g(x)$. □

Отметим, что условия почленного дифференцирования для отображений в индуктивные шкалы ЛВП рассмотрены в [12].

Теорема 3. *Если $f : E \to F$ непрерывно дифференцируемо в точке $x_0 \in E$, $g : F \to G$ непрерывно дифференцируемо в точке $y_0 = f(x_0) \in F$, то $g \circ f : E \to G$ также непрерывно дифференцируемо в точке x_0.*

Доказательство. Действительно, согласно 14, в окрестности x_0 производную $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ можно рассматривать как композицию отображения $x \mapsto (g'(f(x)), f'(x))$, $E \to \overrightarrow{(E;F)} \times \overrightarrow{(F;G)}$, непрерывного в точке x_0, и отображения композиции $(A_1, A_2) \mapsto A_2 \circ A_1$, непрерывного на $\overrightarrow{(E;F)} \times \overrightarrow{(F;G)}$ в силу 21. □

Теорема 4. *Если $f : E_1 \times E_2 \to F$ имеет непрерывные в точке (x_1, x_2) частные производные $\partial f/\partial x_1$ и $\partial f/\partial x_2$, то f дифференцируемо в этой точке.*

Доказательство. Пусть $g(\xi_1) = f(\xi_1, x_1 + h_2) - (\partial f/\partial x_1)(x_1, x_2)(\xi_1 - x_1)$. Тогда $g'(\xi_1) = (\partial f/\partial x_1)(\xi_1, x_2 + h_2) - (\partial f/\partial x_1)(x_1, x_2)$. Так как $(\partial f/\partial x_1)$ непрерывна в точке (x_1, x_2), то для некоторого $n_1 \in \mathcal{N}(E;F)$: $(\partial f/\partial x_1)(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \to (\partial f/\partial x_1)(x_1, x_2)$ в $(E;F)_{n_1}$, что позволяет применить теорему о среднем 1:

$$\|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2) - (\partial f/\partial x_1)(x_1, x_2)h_1\|^s = \|g(x_1 + h_1) - g(x_1)\|^s \leq$$
$$\leq \sup_{\xi_1 \in [x_1; x_1 + h_1]} \|(\partial f/\partial x_1)(\xi_1, x_2 + h_2) - (\partial f/\partial x_1)(x_1, x_2)\|_t^s \cdot \|h_1\|_t,$$

при $t \in n_1(s)$, откуда

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2) - (\partial f/\partial x_1)(x_1, x_2)h_1 = o_1(h_1). \tag{30}$$

Аналогично проверяется, что

$$f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) - (\partial f/\partial x_2)(x_1, x_2)h_2 = o_2(h_2). \tag{31}$$

Суммируя (30) и (31) получаем, в силу 10(2), утверждение теоремы. □

Следствие 4. *Отображение $f : E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i \to \prod_{j=1}^{m} F^j$ непрерывно нормально дифференцируемо тогда и только тогда, когда все частные производные $\partial_j f/\partial x_i : E \to \overrightarrow{(E_i; F_j)}$ непрерывны.*

Определение 6. Будем говорить, что отображение $f : E \to F$ *строго нормально дифференцируемо* в точке $x \in E$, если f нормально дифференцируемо в точке x, и при $t \in \nu_f(x)(s)$, $s \in S$:

$$(\|f(x_2) - f(x_1) - f'(x)(x_2 - x_1)\|^s / \|x_2 - x_1\|_t) \to 0 \tag{32}$$

при $x_1 \to x$, $x_2 \to x$.

Теорема 5. *Если $f : E \to F$ нормально дифференцируемо в окрестности точки $x \in E$ и $f' : E \to \overrightarrow{(E; F)}$ непрерывно в точке x, то f строго нормально дифференцируемо в точке x.*

Доказательство. Пусть $g(h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h$, тогда $g'(h) = f'(x+h) - f'(x)$. Т.к. f' непрерывно в точке x, то $g'(h) \to 0$ в $\overrightarrow{(E; F)}$ при $h \to 0$, т.е. $g'(h) \to 0$ в некотором $(E; F)_n$, $n \in \mathcal{N}(E, F)$. Применяя теорему 1, получаем для $s \in S$, $t \in n(s)$:

$$\|f(x_2) - f(x_1) - f'(x)(x_2 - x_1)\|^s = \|g(x_2 - x) - g(x_1 - x)\|^s \leq$$
$$\leq \sup_{h \in [x_1 - x; x_2 - x]} \|g'(h)\|_t^s \cdot \|x_2 - x_1\|_t, \quad (33)$$

и т.к. первый множитель справа в (33) стремится к нулю при $x_1 \to x$, $x_2 \to x$, то из (33) следует (32).

□

Список литературы

[1] *А. Картан*, Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. Мир, Москва (1971).

[2] *H.H. Keller*, Differential calculus in locally convex spaces. Lecture Notes in Math. (1974).

[3] *О.Г. Смолянов*, Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения. Изд-во МГУ, Москва (1979).

[4] *В.А. Балабанов*, Некоторые вопросы нелинейного функционального анализа и их приложения. Мецниереба, Тбилиси (1982).

[5] *М.Ф. Сухинин*, Избранные главы нелинейного анализа. Изд-во Росс. ун-та дружбы народов, Москва (1992).

[6] *И.В. Орлов*, Нормальные индексы линейных и нелинейных отображений в локально выпуклых пространствах и шкалах пространств. — Spectral and Evolution Problems, v. 11. TNU Publ., Simferopol (2001), p. 18–29.

[7] *І.В. Орлов*, Канонічний ізоморфізм лінійних і білінійних операторів у локально опуклих просторах. — Доповіді НАН України (в печати).

[8] *I.V. Orlov*, Normal functional indices and normal duality. — Methods of Functional Analysis and Topology (в печати).

[9] *G. Köthe*, Topologishe lineare Räume. Springer Verlag, Berlin (1960).

[10] *Л.Р. Волевич, С.Г. Гиндикин*, Обобщенные функции и уравнения в свертках. Наука, Москва (1994).

[11] *И.В. Орлов*, Нормальные разложения операторных пространств над ЛВП. — Функциональный анализ и его приложения (в печати).

[12] *I.V. Orlov*, A termwise differentiation in the inductive scales of the locally convex spaces. — Operator Theory: Adv. & Appl., v. 118. Birkhäuser, Basel (2000), p. 321–333.

[13] *В.И. Авербух, О.Г. Смолянов*, Дополнения к книге: *А. Фрёлихер, В. Бухер*, Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы. Мир, Москва (1970).

AMS Subject Classification: Primary 26E15 ,26E20; Secondary 58C20

Поступила в редакцию 11.05.2002